УДК 519.652
MSC2010 46L50, 46L55, 46L57, 46L60

© И. М. Жураев[1]

Отображения алгебр измеримых операторов, сохраняющие нулевые произведения и нулевые йордановы произведения

В работе даются критерии сохранения нулевых произведений и нулевых йордановых произведений отображениями, действующими между алгебрами измеримых операторов.

Ключевые слова: *измеримый оператор, топология сходимости по мере, след, гомоморфизм, йорданов гомоморфизм.*

В последнее время интенсивно изучаются те отображения между алгебрами, которые сохраняют нулевые произведения или нулевые йордановы произведения. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – две алгебры. Мы говорим, что линейное отображение $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *сохраняет нулевое произведение*, если $\varphi(A)\varphi(B) = 0$ для любых A, $B \in \mathcal{A}$ таких, что $AB = 0$. Мы говорим, что линейное отображение $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *сохраняет нулевое произведение в обоих направлениях*, если φ сохраняет нулевое произведение и если $AB = 0$ для любых A, $B \in \mathcal{A}$ таких, что $\varphi(A)\varphi(B) = 0$. Semrl доказал в [8], что если $B(X)$ – банахова алгебра всех ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве X, то линейное отображение из $B(X)$ в себя является автоморфизмом тогда и только тогда, когда оно сохраняет нулевое произведение в обоих направлениях. В [6] Hou и Gao привели характеризации аддитивных отображений в $B(X)$, сохраняющих нулевое произведение, когда X – гильбертово пространство. В работе [5] описан класс всех линейных отображений, которые сохраняют нулевые произведения. В [4] Cui и Hou, обобщая результаты из [8], изучили сохраняющие нулевые произведения отображения между алгебрами фон Неймана.

Мы говорим, что линейное отображение $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *сохраняет нулевое йорданово произведение*, если $\varphi(A)\varphi(B) + \varphi(B)\varphi(A) = 0$ для любых A, $B \in \mathcal{A}$ таких, что $AB + BA = 0$. Мы говорим, что линейное отображение $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *сохраняет нулевое йорданово произведение в обоих направлениях*, если φ сохраняет нулевое йорданово произведение и если $AB + BA = 0$ для любых A, $B \in \mathcal{A}$ таких, что $\varphi(A)\varphi(B) + \varphi(B)\varphi(A) = 0$. Линейные отображения примитивных колец, сохраняющие нулевые произведения, изучены в [2]. Линейные отображения алгебр фон Неймана, сохраняющие йордановы нулевые произведения, изучены в [9] и линейные отображения колец – в [3]. В данной работе мы даем критерии сохранения нулевого произведения и нулевого йорданова произведения отображениями, заданными на $S(M)$ – *-алгебре всех измеримых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана M.

Пусть H – гильбертово пространство, и пусть $B(H)$ – алгебра всех линейных ограниченных операторов, действующих из H в H. Пусть M – подалгебра фон Неймана в $B(H)$, и

[1]Национальный университет Узбекистана, Вузгородок, Ташкент, 700174, Узбекистан. Электронная почта: ijmo64@mail.ru

пусть $\mathcal{P}(M)$ – полная решетка всех ортогональных проекторов из M. Проектор E называется *конечным*, если из $F \in \mathcal{P}(M)$, $F \leq E$ и $F \sim E$ следует, что $E = F$. Алгебра фон Неймана M называется *конечной*, если $\mathbf{1}$ – конечный проектор (здесь и далее $\mathbf{1}$ – тождественный оператор в M).

Пусть M – алгебра фон Неймана, и пусть M_+ – множество всех положительных операторов из M. Функционал $\tau : M_+ \to [0, \infty]$ называется *следом* на M_+, если выполняются следующие три условия:

1) $\tau(T + S) = \tau(T) + \tau(S)$ для любых $T, S \in M_+$;

2) $\tau(\lambda T) = \lambda\tau(T)$ для каждого $T \in M_+$ и $\lambda \geq 0$;

3) $\tau(U^*TU) = \tau(T)$ для любых $T \in M_+$ и $U \in \mathcal{U}(M)$, где $\mathcal{U}(M)$ — множество всех унитарных операторов из алгебры M.

След τ называется *конечным*, если $\tau(T) < \infty$ для каждого $T \in M_+$. След τ называется *точным*, если из $\tau(T) = 0$, $T \in M_+$ следует, что $T = 0$. След τ называется *нормальным*, если при T, $T_\alpha \in M_+$ из условия $T_\alpha \uparrow T$, следует, что $\tau(T_\alpha) \uparrow \tau(T)$.

Линейное подпространство D в H называется *присоединенным* к M (обозначение: $D\eta M$), если $u(D) \subseteq D$ для любого унитарного оператора u из коммутанта $M' = \{y \in B(H) \mid xy = yx \ \forall x \in M\}$ алгебры фон Неймана M.

Линейный оператор x, действующий в H, с областью определения $D(x)$ называется *присоединенным* к M (обозначение: $x\eta M$), если $u(D(x)) \subseteq D(x)$ для любого унитарного оператора $u \in M$ и если $ux(\xi) = xu(\xi)$ для всех $\xi \in D(x)$.

Линейное подпространство D в H называется *сильно плотным* в H относительно алгебры фон Неймана M, если выполнены следующие два условия:

1) $D\eta M$;

2) существует последовательность $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ проекторов такая, что $P_n \uparrow \mathbf{1}$, $P_n(H) \subset D$ и $P_n^{\perp} = \mathbf{1} - P_n$ – конечный проектор в M для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Замкнутый линейный оператор x, действующий в гильбертовом пространстве H, называется *измеримым относительно алгебры фон Неймана M*, если $x\eta M$ и если $D(x)$ является сильно плотным в H. Обозначим через $S(M)$ множество всех операторов, измеримых относительно M.

Пусть M – конечная алгебра фон Неймана, τ – точный нормальный конечный след на M такой, что $\tau(\mathbf{1}) = 1$.

Определение. Последовательность измеримых операторов $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(M)$ *сходится* к оператору $T \in S(M)$ *по мере* при $n \to \infty$ (обозначение: $T_n \xrightarrow{\text{п.м}} T$), если для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ существует номер N такой, что для каждого $n \geq N$ найдется проектор $P_n \in \mathcal{P}(M)$ со свойствами:

1) $\tau(P_n) > 1 - \delta$,

2) $(T_n - T)P_n \in M$,

3) $\|(T_n - T)P_n\|_M < \varepsilon$.

Из утверждения 3.1.4 [5] и из [6] следует, что множества $\{T + U_{\varepsilon,\delta}\}$, где $T \in S(M)$, $\varepsilon > 0, \delta > 0$, определяют в $S(M)$ векторную топологию t, относительно которой $S(M)$ является хаусдорфовым топологическим векторным пространством, в котором множества

$$U_{\varepsilon,\delta} = \{T \in S(M) \mid \exists P \in \mathcal{P}(M) : \tau(P) > 1 - \delta, \, TP \in M, \, \|TP\|_M < \varepsilon\}$$

образуют базис окрестностей нуля. Это векторная топология t называется *топологией сходимости по мере в $S(M)$*. Отображения, непрерывные относительно топологии t, будем называть *t-непрерывными.*

Пусть M и K – конечные алгебры фон Неймана, действующие в гильбертовых пространствах H_1 и H_2 соответственно.

Теорема 1. *Пусть $S(M)$ – *-алгебра всех измеримых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана M, $S(K)$ – *-алгебра всех измеримых операторов, присоединенных к фактору K. Пусть $\varphi : S(M) \to S(K)$ – t-непрерывное, линейное, сюръективное отображение. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) φ сохраняет нулевое произведение;

2) существуют ненулевой скаляр λ и гомоморфизм $\psi : S(M) \to S(K)$ такие, что $\varphi(T) = \lambda\psi(T)$ для всех $T \in S(M)$.

Доказательство. Ясно, что из 2) следует 1). Докажем, что из 1) следует 2). Пусть $\varphi : S(M) \to S(K)$ – t-непрерывное, линейное, сюръективное отображение, сохраняющее нулевое произведение. Докажем сперва, что $\varphi(\mathbf{1}) = \lambda\mathbf{1}$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$, где $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел. Пусть $Q \in S(M)$ – произвольный проектор. Тогда $Q(\mathbf{1} - Q) = 0$ и $\varphi(Q)\varphi(\mathbf{1} - Q) = 0$. Отсюда

$$\varphi(Q)\varphi(\mathbf{1}) = \varphi(\mathbf{1})\varphi(Q) = \varphi(Q)^2. \tag{1}$$

Так как подпространство всех действительных линейных комбинаций проекторов является плотным по норме M подмножеством в множестве всех самосопряженных операторов алгебры $S(M)$, то из t-непрерывности φ получим $\varphi(S)\varphi(\mathbf{1}) = \varphi(\mathbf{1})\varphi(S)$ для всех $S \in S(M)$. Отсюда в силу сюръективности φ вытекает, что $\varphi(\mathbf{1}) \in Z(S(K))$, т.е. $\varphi(\mathbf{1}) = \lambda\mathbf{1}$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$.

Докажем, что $\lambda \neq 0$. Доказательство проведем от противного и поэтому предположим, что $\varphi(\mathbf{1}) = 0$. Тогда из (1) следует, что $\varphi(Q)^2 = 0$ для каждого проектора в $S(M)$. Если $A = \sum\limits_i \alpha_i P_i$, где P_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ – попарно ортогональные проекторы, то $\varphi(A)^2 = \sum\limits_i \alpha_i^2 \varphi(P_i)^2 = 0$. Отсюда следует, что $\varphi(A)^2 = 0$ для каждого самосопряженного оператора A в $S(M)$. Таким образом, для произвольных самосопряженных операторов A и B из $S(M)$ получаем $0 = \varphi(A + B)^2 = \varphi(A)\varphi(B) + \varphi(B)\varphi(A)$. Пусть $T = T_1 + \imath T_2$ – произвольный оператор в $S(M)$, где T_1 и T_2 – его действительная и мнимая части соответственно. Из самосопряженности каждого из операторов T_1 и T_2 получим, что $\varphi(T)^2 = 0$. Таким образом, область значений отображения φ состоит из операторов, квадраты которых равны нулю. Из сюръективности получим, что для тождественного оператора $\mathbf{1} \in S(K)$ найдется оператор $A_1 \in S(M)$ такой, что $\varphi(A_1)^2 = 0 = \mathbf{1}$. Противоречие получено; значит, $\lambda \neq 0$.

При необходимости заменив φ на $\lambda^{-1}\varphi$, можем считать, что $\varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Докажем, что φ переводит проекторы в проекторы. Пусть Q – проектор в $S(M)$, т.е. $Q(\mathbf{1} - Q) = 0$. Тогда $\varphi(Q)\varphi(\mathbf{1} - Q) = 0$ или $\varphi(Q) = \varphi(Q)^2$, поскольку $\varphi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$.

Докажем, что φ является йордановым гомоморфизмом. Так как φ сохраняет проектирующие операторы, то множество попарно ортогональных проекторов в $S(M)$ отображается в множество попарно ортогональных проекторов в $S(K)$. Если $A = A^*$ – самосопряженный оператор алгебры $S(M)$, то A является пределом по норме последовательности действительных линейных комбинаций попарно ортогональных проекторов и, согласно t-непрерывности φ, $\varphi(A)$ является пределом в смысле топологии t последовательности действительных комбинаций попарно ортогональных проекторов. Отсюда получим, что $\varphi(A^2) = \varphi(A)^2$ для каждого самосопряженного оператора $A \in S(M)$. Заменяя A выражением $C + D$, где C и D – самосопряженные операторы, получим $\varphi(CD + DC) = \varphi(C)\varphi(D) + \varphi(D)\varphi(C)$. Для любого $T \in S(M)$ имеем $T = T_1 + \imath T_2$, где T_1 и T_2 – действительная и мнимая части оператора T соответственно. Тогда для самосопряженных операторов T_1 и T_2 получим:

$$\varphi\left(T^2\right) = \varphi\left(T_1^2 - T_2^2 + \imath(T_1T_2 + T_2T_1)\right) = \varphi(T_1)^2 - \varphi(T_2)^2 +$$

$$+\imath\left(\varphi(T_1)\varphi(T_2) + \varphi(T_2)\varphi(T_1)\right) = \varphi(T)^2.$$

Следовательно, φ – йорданов гомоморфизм. Докажем, что φ является гомоморфизмом. Пусть A, $B \in S(M)$ такие, что $AB = 0$. Тогда $\varphi(A)\varphi(B) = 0$ и $\varphi(BA) = \varphi(BA + AB) = \varphi(B)\varphi(A) + \varphi(A)\varphi(B) = \varphi(B)\varphi(A)$. Для любого проектора $P \in S(M)$ и произвольного $T \in S(M)$ из $TP(\mathbf{1} - P) = 0$ имеем $\varphi(TP) = \varphi(TP)\varphi(P)$. Отсюда следует, что $\varphi(PT) - \varphi(PTP) = \varphi(PT(\mathbf{1} - P)) = \varphi(P)\varphi(T(\mathbf{1} - P)) = \varphi(P)\varphi(T) - \varphi(P)\varphi(TP) = \varphi(P)\varphi(T) - \varphi(P)\varphi(TP)\varphi(P) = \varphi(P)\varphi(T) - \varphi(PTP)$. Следовательно, $\varphi(PT) = \varphi(P)\varphi(T)$. Тогда по t-непрерывности φ заключаем, что и для произвольного $S \in S(M)$ выполняется $\varphi(ST) = \varphi(S)\varphi(T)$, т.е. φ является гомоморфизмом. □

Следствие 1. *Пусть $S(M)$ – *-алгебра измеримых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана, и пусть $S(K)$ – *-алгебра всех измеримых операторов, присоединенных к фактору K. Пусть φ – t-непрерывное линейное отображение из $S(M)$ в $S(K)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *φ – сюръективное отображение, сохраняющее нулевое произведение в обоих направлениях;*

(2) *φ – биективное отображение, сохраняющее нулевое произведение;*

(3) *существуют ненулевой скаляр λ и изоморфизм $\psi : S(M) \to S(K)$ такие, что $\varphi(T) = \lambda\psi(T)$ для всех $T \in S(M)$.*

Доказательство. Ясно, что из (3) следует (1). Докажем, что из (1) следует (2). Предположим, что $\varphi(T) = 0$. Для любого $S \in S(M)$ выполняется равенство $\varphi(T)\varphi(S) = 0$. Следовательно $TS = 0$, поскольку φ сохраняет нулевое произведение в обоих направлениях. Поэтому $T = 0$. Отсюда заключаем, что φ – инъекция. В силу теоремы 1 из (2) следует (3). □

Пусть M и K – конечные алгебры фон Неймана, действующие в гильбертовых пространствах H_1 и H_2 соответственно.

Теорема 2. *Пусть $S(M)$ – *-алгебра всех измеримых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана M, и пусть $S(K)$ – *-алгебра всех измеримых операторов, присоединенных к фактору K. Пусть $\varphi : S(M) \to S(K)$ – t-непрерывное, линейное, сюръективное отображение. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) φ сохраняет нулевое йорданово произведение;

2) существуют ненулевой скаляр λ и йорданов гомоморфизм $\psi : S(M) \to S(K)$ такие, что $\varphi(T) = \lambda\psi(T)$ для всех $T \in S(M)$.

Доказательство. Ясно, что из 2) следует 1). Докажем, что из 1) следует 2). Пусть $\varphi : S(M) \to S(K)$ – t-непрерывное линейное сюръективное отображение, сохраняющее нулевое йорданово произведение. Пусть $P^2 = P \in S(M)$ – произвольный проектор. Тогда $P(\mathbf{1}-P)+(\mathbf{1}-P)P = 0$, откуда $\varphi(P)\varphi(\mathbf{1}-P)+\varphi(\mathbf{1}-P)\varphi(P) = 0$. Следовательно, $\varphi(\mathbf{1})\varphi(P)+\varphi(P)\varphi(\mathbf{1}) = 2\varphi(P)^2$. Таким образом, $\varphi(P)^2\varphi(\mathbf{1})+\varphi(P)\varphi(\mathbf{1})\varphi(P) = 2\varphi(P)^3$ и $\varphi(\mathbf{1})\varphi(P)^2+\varphi(P)\varphi(\mathbf{1})\varphi(P) = 2\varphi(P)^3$. Сравнивая последние два равенства, мы получим равенство

$$\varphi(\mathbf{1})\varphi(P)^2 = \varphi(P)^2\varphi(\mathbf{1}). \tag{2}$$

Аналогично доказывается, что $\varphi(\mathbf{1})^2\varphi(P) + \varphi(\mathbf{1})\varphi(P)\varphi(\mathbf{1}) = 2\varphi(\mathbf{1})\varphi(P)^2$ и $\varphi(P)\varphi(\mathbf{1})^2 + \varphi(\mathbf{1})\varphi(P)\varphi(\mathbf{1}) = 2\varphi(P)^2\varphi(\mathbf{1})$, и, таким образом, $\varphi(P)\varphi(\mathbf{1})^2 = \varphi(\mathbf{1})^2\varphi(P)$.

Так как подпространство всех действительных линейных комбинаций проекторов является плотным подмножеством в множестве всех самосопряженных операторов алгебры $S(M)$, то из t-непрерывности φ получим $\varphi(A)\varphi(\mathbf{1})^2 = \varphi(\mathbf{1})^2\varphi(A)$ для всех $A \in S(M)$. В силу сюръективности отсюда получается, что $\varphi(\mathbf{1})^2 \in Z(S(K))$, т.е. $\varphi(\mathbf{1})^2 = \lambda\mathbf{1}$ для некоторого

$\lambda \in \mathbb{C}$. Пусть T, $S \in S(M)$ такие, что $ST = 0$. Для любого проектора P выполняются равенства

$$TP(\mathbf{1}-P)S + (\mathbf{1}-P)STP = 0, \quad \varphi(TP)\varphi((\mathbf{1}-P)S) + \varphi((\mathbf{1}-P)S)\varphi(TP) = 0.$$

Таким образом, для каждого проектора P справедливо равенство

$$\varphi(TP)\varphi(S) + \varphi(S)\varphi(TP) = \varphi(TP)\varphi(PS) + \varphi(PS)\varphi(TP). \tag{3}$$

С другой стороны, из $T(\mathbf{1}-P)PS + PST(\mathbf{1}-P) = 0$ следует, что $\varphi(T(\mathbf{1}-P))\varphi(PS) + \varphi(PS)\varphi(T(\mathbf{1}-P)) = 0$. Следовательно, для каждого проектора P

$$\varphi(T)\varphi(PS) + \varphi(PS)\varphi(T) = \varphi(TP)\varphi(PS) + \varphi(PS)\varphi(TP). \tag{4}$$

Из равенств (3) и (4) для каждого проектора P получим $\varphi(TP)\varphi(S)+\varphi(S)\varphi(TP) = \varphi(T)\varphi(PS)+\varphi(PS)\varphi(T)$. Следовательно, для каждого $A \in S(M)$ получаем

$$\varphi(TA)\varphi(S) + \varphi(S)\varphi(TA) = \varphi(T)\varphi(AS) + \varphi(AS)\varphi(T). \tag{5}$$

Если $T = Q$ и $S = \mathbf{1} - Q$ для некоторого $Q \in S(M)$ с $Q^2 = Q$, то $ST{=}0$ и из (4) получим $\varphi(QA)\varphi(\mathbf{1}-Q) + \varphi(\mathbf{1}-Q)\varphi(QA) = \varphi(Q)\varphi(A(\mathbf{1}-Q)) + \varphi(A(\mathbf{1}-Q))\varphi(Q)$. Таким образом, $\varphi(QA)\varphi(\mathbf{1})+\varphi(\mathbf{1})\varphi(QA)-\varphi(Q)\varphi(A)-\varphi(A)\varphi(Q) = \varphi(QA)\varphi(Q)+\varphi(Q)\varphi(QA)-\varphi(Q)\varphi(AQ)-\varphi(AQ)\varphi(Q)$. С другой стороны, полагая $T = \mathbf{1} - Q$ и $S = Q$ из (4) получим $\varphi(\mathbf{1})\varphi(AQ) + \varphi(AQ)\varphi(\mathbf{1})-\varphi(A)\varphi(Q)-\varphi(Q)\varphi(A) = \varphi(Q)\varphi(AQ)+\varphi(AQ)\varphi(Q)-\varphi(QA)\varphi(Q)-\varphi(Q)\varphi(QA)$. Следовательно, для каждого проектора Q

$$\varphi(QA + AQ)\varphi(\mathbf{1}) + \varphi(\mathbf{1})\varphi(QA + AQ) = 2(\varphi(Q)\varphi(A) + \varphi(A)\varphi(Q)).$$

Итак, для каждого $B \in S(M)$

$$\varphi(AB + BA)\varphi(\mathbf{1}) + \varphi(\mathbf{1})\varphi(AB + BA) = 2(\varphi(A)\varphi(B) + \varphi(B)\varphi(A)). \tag{6}$$

Умножая (6) слева и справа на $\varphi(\mathbf{1})$, получим $\varphi(\mathbf{1})^2\varphi(AB + BA) + \varphi(\mathbf{1})\varphi(AB + BA)\varphi(\mathbf{1}) = 2\varphi(\mathbf{1})(\varphi(A)\varphi(B) + \varphi(B)\varphi(A))$ и $\varphi(\mathbf{1})\varphi(AB + BA)\varphi(\mathbf{1}) + \varphi(AB + BA)\varphi(\mathbf{1})^2 = 2(\varphi(A)(\varphi(B) + \varphi(B)\varphi(A))\varphi(\mathbf{1})$. Учитывая в этих равенствах, что $\varphi(\mathbf{1})^2 = \lambda\mathbf{1}$, получим

$$\varphi(\mathbf{1})(\varphi(A)\varphi(B) + \varphi(B)\varphi(A)) = ((\varphi(A)\varphi(B) + \varphi(B)\varphi(A))\varphi(\mathbf{1}). \tag{7}$$

Полагая в (6) и (7) $A = B$, получим

$$\varphi(\mathbf{1})\varphi(A^2) + \varphi(A^2)\varphi(\mathbf{1}) = 2\varphi(A^2), \tag{8}$$

$$\varphi(\mathbf{1})\varphi(A^2) = \varphi(A^2)\varphi(\mathbf{1}). \tag{9}$$

Согласно сюръективности φ из (9) следует, что $\varphi(\mathbf{1})$ является центральным оператором в $S(K)$, т.е. $\varphi(\mathbf{1}) = \lambda\mathbf{1}$ для некоторого λ. Согласно (7), можно принять, что $\lambda \neq 0$, и пусть $c = \frac{1}{\lambda}$, $\psi(\cdot) = c\varphi(\cdot)$. Тогда $\psi : S(M) \to S(K)$ – t-непрерывное, сюръективное отображение, сохраняющее нулевое йорданово произведение, и $\psi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Кроме того, $\psi(A^2) = \psi(A)^2$ для каждого $A \in S(M)$, откуда следует, что ψ является йордановым гомоморфизмом. Теорема доказана. $\square$

Из теоремы 2 вытекает следствие.

Следствие 2. *Пусть $S(M)$ – *-алгебра измеримых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана M, и пусть $S(K)$ – *-алгебра измеримых операторов, присоединенных к фактору K. Пусть φ – t-непрерывное линейное отображение из $S(M)$ в $S(K)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *φ – сюръективное отображение, сохраняющее нулевое йорданово произведение в обоих направлениях;*

(2) *φ – биективное отображение, сохраняющее нулевое йорданово произведение;*

(3) *существуют ненулевой скаляр λ и йорданов изоморфизм $\psi : S(M) \to S(K)$ такие, что $\varphi(T) = \lambda\psi(T)$ для всех $T \in S(M)$.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству следствия 1. $\square$

Список литературы

[1] S. K. Berberian, “The regular ring of finite AW^*-algebra”, *Ann. Math*, **65** (1957), 224–242.

[2] M. A. Chebotar, Wen-Fong Ke, Pjek-Hwee Lee, “Maps characterized by action on zero products”, *Pacific J.Math.*, **216**:2 (2004), 217–228.

[3] M. A. Chebotar, Wen-Fong Ke, Pjek-Hwee Lee, Ruibin Zhand, “On maps preserving zero Jordan products”, *Monatsh. Math.*, **149** (2006), 91–101.

[4] J. Cui, J. Hou, “Linear maps on von Neumann algebras preserving zero products or TR-rank”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **65** (2002), 79–91.

[5] J. Cui, J. Hou, “Characterizations of nest algebra automorphisms”, *Chinese Ann. Math.* (to appear).

[6] J. Hou, M. Gao, “Additive mappings on $B(H)$ that preserve zero products”, *Kexue Tongbao (Chinese)*, **43** (1998), 2388–2392.

[7] М. А. Муратов, В. И. Чилин, *Алгебры измеримых и локально измеримых операторов.* Т. 69, Праці Ін-ту математики НАН України, Київ, 2007, 390 с.

[8] P. Semrl, “Linear mappings preserving square-zero matrices”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **48** (1993), 365–370.

[9] L. Zhao, J. Hou, “Jordan zero product preserving additive maps on operator algebras”, *J. Math. Anal. Appl.*, **314** (2006), 689–700.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 8 июня 2012 г.

Juraev I. M. Maps on the Algebras of Measurable Operators Preserving Zero and Jordan Zero-products. Far Eastern Mathematical Journal. 2012. V. 12. № 2. P. 195–200.

ABSTRACT

In this paper, we prove that a continuous linear surjection from an algebra of measurable operators onto another one preserves zero products (resp. zero Jordan products) if and only if it is a non-zero scalar multiple of a homomorphism (resp. of an Jordan homomorphism).

Key words: *von Neumann algebras, measurable operator, topology of convergence in measure, trace, homomorphism, Jordan homomorphism.*