УДК 511.9, 511.36
MSC2010 11J60, 11H16

© А. А. Илларионов[1]

О статистических свойствах локальных минимумов целочисленных решеток

Получена асимптотическая формула для среднего числа локальных минимумов целочисленных многомерных решеток.

Ключевые слова: *решетка, локальный минимум, многомерная непрерывная дробь.*

Введение

Напомним, что полной целочисленной s-мерной решеткой называется множество вида

$$\Gamma = \left\{ k_1 a^{(1)} + \ldots + k_s a^{(s)} : \quad k_i \in \mathbb{Z}, \ \ i = \overline{1,s} \right\},$$

где $a^{(i)}$ $(i = \overline{1,s})$ — линейно независимые векторы из $\mathbb{R}^s$ (базис Γ). Матрицу M со столбцами $m^{(i)T}$ будем называть базисной. Величина $\det\Gamma = |\det M|$ называется определителем решетки Γ. В дальнейшем рассматриваем только полные решетки и называем их просто решетками.

Пусть Ξ — замкнутое множество из $\mathbb{R}^s$, симметричное относительно начала координат. Разобьем $\{1,\ldots,s\}$ на непересекающиеся подмножества $I_1,\ldots,I_r$ $(1 \le r \le s)$. Для любого $t = (t_1,\ldots,t_r) \in [0,+\infty)^r$ определим

$$\Xi(t) = \{(y_1,\ldots,y_s) : \quad y_i = t_l x_i, \ \ i \in I_l, \ \ l = \overline{1,r}; \ \ (x_1,\ldots,x_s) \in \Xi\}.$$

Положим $I = (I_1,\ldots,I_r)$.

Определение. Ненулевой узел γ s-мерной решетки Γ будем называть локальным (Ξ, I)-минимумом, если существует вектор $t \in [0,+\infty)^r$ такой, что

1) γ принадлежит $\Xi(t)$;

2) для любого $t' \in [0,+\infty)^r$, удовлетворяющего неравенствам

$$t'_i \le t_i, \ \ i = \overline{1,r}; \quad \sum_{i=1}^r t'_i < \sum_{i=1}^r t_i,$$

[1]Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: `illar_a@list.ru`

множество $\Xi(t')$ не содержит ненулевых узлов решетки Γ.

Далее всюду считаем, что

$$\begin{aligned}
&I_1 = (s_0+1,\ldots,s_1), \quad I_2 = (s_1+1,\ldots,s_2),\ldots, I_r = (s_{r-1}+1,\ldots,s),\\
&\Xi = \{x \in \mathbb{R}^s : \quad \Phi_l(x) \le 1, \;\; l = \overline{1,r}\},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
&0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_{r-1} < s_r = s;\\
&\Phi_1(x) = \phi_1(x_1,\ldots,x_{s_1}),\ldots,\Phi_l(x) = \phi_l(x_{s_{l-1}+1},\ldots,x_{s_l}),\ldots,\Phi_r(x) = \phi_l(x_{s_{r-1}+1},\ldots,s),
\end{aligned}$$

а $\phi_l : \mathbb{R}^{t_l} \to \mathbb{R}$ $\quad (t_l = s_l - s_{l-1}, \;\; l = \overline{1,r})$ — лучевые, непрерывные, кусочно-дифференцируемые функции.

В этом случае ненулевой узел γ s-мерной решетки Γ является локальным (Ξ, I)-минимумом, если не существует ненулевого узла $\eta \in \Gamma$ такого, что

$$\Phi_l(\eta) \le \Phi_l(\gamma), \quad l = \overline{1,r},$$

причем хотя бы одно из неравенств строгое.

Для краткости положим $\mathbf{\Phi} = (\Phi_1,\ldots,\Phi_r) : \mathbb{R}^s \to [0,+\infty)^r$ и локальные (Ξ, I)-минимумы будем называть *локальными* $\mathbf{\Phi}$*-минимумами.*

Приведем несколько примеров использования локальных минимумов в теории чисел.

Пусть

$$\begin{aligned}
&r = s_1 + s_2, \quad s = s_1 + 2s_2,\\
&\Phi_i(x) = |x_i|, \;\; i = \overline{1,s_1},\\
&\Phi_{s_1+l}(x) = \sqrt{x_{s_1+2l-1}^2 + x_{s_1+2l}^2}, \;\; l = \overline{1,s_2}.
\end{aligned}$$

Тогда (см., например, [1, гл. 1, раздел 4]) геометрическое изображение единицы числового поля K степени $s = s_1 + 2s_2$ (s_1 — количество вещественных, а $2s_2$ — количество комплексных изоморфизмов K в $\mathbb{C}$) является локальным $\mathbf{\Phi}$-минимумом соответствующей s-мерной решетки. Это обстоятельство легло в основу алгоритмов построения единиц в кубических числовых полях, разработанных Г.Ф. Вороным [2] и Г. Минковским [3] (см. также [4, 5] и ссылки там).

Пусть $r = s$. В этом случае локальные минимумы будем называть относительными. В.А. Быковским доказано, что погрешность теоретико-числовых квадратурных формул [6, 7], а также отклонение сеток от равномерного распределения [8] выражается через множество относительных минимумов решеток специального вида.

При $r = 2$ задача о нахождении локальных минимумов решеток специального вида эквивалентна проблеме вычисления многомерных наилучших приближений. Пусть f — норма в $\mathbb{R}^m$, а g — норма в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим линейные формы $L_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,m}$.

Ненулевой вектор $(u,v) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^m$ будем называть (f,g)-наилучшим совместным приближением форм $L_1,\ldots,L_m$, если не существует ненулевого вектора $(u',v') \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^m$

такого, что

$$f(Lu' - v') \le f(Lu - v), \quad g(u') \le g(u),$$

причем хотя бы одно из неравенств строгое. Здесь $Lx = (L_1x, \ldots, L_mx)$. Пусть

$$\mathbf{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2), \quad s = n + m, \quad \Phi_1(x) = g(x_1, \ldots, x_n), \quad \Phi_2(x) = f(x_{n+1}, \ldots, x_s).$$

Определим $(n+m)$-мерную решетку

$$\Gamma = \{(Lp - q, q) : (p, q) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^m\}.$$

Тогда узел $\gamma = (Lu - v, v)$ является локальным $\mathbf{\Phi}$-минимумом Γ, если и только если (u, v) является (f, g)-наилучшим совместным приближением линейных форм $L_1, \ldots, L_m$.

Будем использовать следующие обозначения:

$\mathcal{L}_s(Q)$ — множество s-мерных целочисленных полных решеток из Q^s (Q — некоторое числовое множество);

$\mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; N) = \{\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z}) : \det \Gamma = N\}$;

$\mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; [1, R]) = \{\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z}) : \det \Gamma \in [1, R]\}$.

$\mathcal{R}_s[1, R] = \#\mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; [1, R])$ — количество решеток из $\mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; [1, R])$.

Здесь и далее $\#Q$ — количество элементов конечного множества Q.

Пусть $\mathfrak{M}_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma)$ — множество локальных $\mathbf{\Phi}$-минимумов решетки Γ. Для любого $R > 1$ определим

$$E_{\mathbf{\Phi}}[1, R] = \frac{1}{\mathcal{R}_s[1, R]} \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; [1, R])} \#\mathfrak{M}_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma)$$

— среднее количество локальных $\mathbf{\Phi}$-минимумов решеток из $\mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; [1, R])$.

Основным результатом настоящей работы является доказательство следующей асимптотической формулы:

$$E_{\mathbf{\Phi}}[1, R] = \mathcal{C}_{\mathbf{\Phi}} \cdot \ln^{r-1} R + O_{\mathbf{\Phi}}(\ln^{r-2} R), \tag{0.1}$$

где $\mathcal{C}_{\mathbf{\Phi}}$ — некоторая положительная постоянная, зависящая только от $\mathbf{\Phi}$, формула для которой будет приведена в последнем разделе (см. следствие 5.2).

Ранее асимптотическая формула (0.1) была доказана в случаях $r = 2$, $t_1 = s - 1$, $t_2 = 1$ (см. [9, 10]) и $r = s$ (см. [11, 12]).

Оставшаяся часть статьи организована следующим образом.

В разделе 1 мы докажем оценку для максимального количества локальных минимумов

$$\max_{\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; [1, R])} \#\mathfrak{M}_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma) \underset{\mathbf{\Phi}}{\ll} \ln^{r-1} R \quad \text{при } R > 1. \tag{0.2}$$

При $r = s$ неравенство (0.2) является известным [6]. Отметим, что согласно (0.1)

$$\max_{\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; [1, R])} \#\mathfrak{M}_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma) \underset{\mathbf{\Phi}}{\gg} \ln^{r-1} R \quad \text{при } R > 1,$$

то есть оценка (0.2) является неулучшаемой (с точностью до соответствующей константы, зависящей от $\mathbf{\Phi}$).

В разделе 2 мы выведем асимптотическую формулу для количества целочисленных матриц, которые лежат в множестве специального вида и имеют определитель из заданного отрезка.

В разделах 3, 4, 5 мы построим и исследуем специальную процедуру дополнения локального минимума до базиса решетки. В результате, вычисление суммы

$$\sum_{\Gamma\in\mathcal{L}_s(\mathbb{Z};[1,R])} \#\mathfrak{M}_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma)$$

будет сведено к нахождению количества целочисленных матриц M (базисных матрицы) таких, что $M \in \Omega_{\mathbf{\Phi}}$, $|\det M| \in [1, R]$, где $\Omega_{\mathbf{\Phi}}$ — некоторое множество. Для нахождения количества таких матриц применяются результаты раздела 2.

Обозначения

На протяжении всей статьи используем следующие обозначения:

mes — мера Лебега;

$\mathbb{R}_+$ — множество положительных вещественных чисел;

ζ — дзета-функция Римана;

$|x| = \left(\sum_{i=1}^{s} |x_i|^2\right)^{1/2}$; $|x|_\infty = \max_{1\le i\le s} |x_i|$;

$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ при $x, y \in \mathbb{R}^n$;

$\mathrm{M}_s(Q)$ — множество матриц размера $s \times s$ с элементами из числового множества Q;

$\mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$ — множество невырожденных матриц из $\mathrm{M}_s(\mathbb{R})$.

Пусть $a_{ij}, a_i^{(j)} \in \mathbb{R}$, $i, j = \overline{1, s}$ — некоторые элементы. Тогда полагаем

$$(\!(a_{ij})\!) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}, \quad (\!(a_i^{(j)})\!) = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & \dots & a_1^{(s)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_s^{(1)} & \dots & a_s^{(s)} \end{pmatrix}.$$

Если $X \in \mathrm{M}_s(\mathbb{R})$, $k \in I_l$, $l \in \{1, \dots, r\}$, то

$$T_k(X) = \max\left\{\max_{1\le j\le s} |x_{kj}|, \max_{i\in I_l} |x_{ik}|\right\}.$$

Запись

$$f(x) = O(g(x)) \quad (\text{либо } f(x) \ll g(x)) \quad \text{при } x \in X$$

означает, что существует абсолютная постоянная $C > 0$, такая что $|f(x)| \leq C \cdot g(x)$ при всех $x \in X$. Если C зависит от параметра θ, то пишем $f(x) = O(g(x))$ (либо $f(x) \ll_{\theta} g(x)$). Запись $f \asymp g$ означает что $f \ll g \ll f$.

Поверхность $S \subset \mathbb{R}^s$ называем кусочно-дифференцируемой, если она состоит из фиксированного числа поверхностей класса C^1.

1. Оценка количества локальных минимумов

В этом разделе мы докажем оценку (0.2).

Так как функции ϕ_l непрерывные, лучевые и кусочно-дифференцируемые, то существует постоянная $\kappa \geq 1$ такая, что

$$\kappa^{-1}|x| \leq \phi_l(x) \leq \kappa|x|, \tag{1.1}$$

$$|\phi_l(x) - \phi_l(y)| \leq \kappa|x - y| \tag{1.2}$$

при всех $x, y \in \mathbb{R}^{t_l}$, $l \in \{1, \ldots, r\}$. Из (1.2), в частности, следует, что

$$\phi_l(x - y) \leq \phi_l(x) + \kappa \cdot |y|. \tag{1.3}$$

Лемма 1.1. *Пусть выполняются следующие условия:*

а) $\phi = \phi_l$, $n = t_l$ *для некоторого* $l \in \{1, \ldots, r\}$*;*

б) α *и* ε *— такие постоянные, что*

$$0 < \varepsilon < \left(2\kappa^4\right)^{-1}, \quad 0 < \alpha < \sqrt{1 - 2\varepsilon + \kappa^{-4}} - 1; \tag{1.4}$$

в) K *— конус из* $\mathbb{R}^n$ *(т.е.* $\lambda x \in K$ *при* $\lambda \in \mathbb{R}_+, x \in K$*), причем*

$$(x, y) \geq (1 - \varepsilon) \cdot |x| \cdot |y| \quad \text{при всех } x, y \in K. \tag{1.5}$$

Тогда

i) если $x, y \in K \setminus \{0\}$, $|x| \leq |y|$, *то* $\phi(x - y) < \phi(y)$*;*

ii) если $x, y \in K \setminus \{0\}$, *причем* $(1+\alpha)^{-1} \cdot |x| \leq |y| \leq (1+\alpha) \cdot |x|$, *то* $\phi(x-y) < \min\{\phi(x), \phi(y)\}$*.*

Доказательство. Пусть $x', y' \in K$, $|x'| = |y'| = 1$. Тогда согласно (1.5)

$$|x' - y'| \leq \sqrt{2\varepsilon}. \tag{1.6}$$

Докажем утверждение i). Используя (1.3), получаем

$$\phi(x - y) = \phi\left(\left(x - y \cdot \frac{|x|}{|y|}\right) + y\left(\frac{|x|}{|y|} - 1\right)\right) \leq \left(1 - \frac{|x|}{|y|}\right) \cdot \phi(y) + \kappa \cdot \left|x - y \cdot \frac{|x|}{|y|}\right|. \tag{1.7}$$

Применяя (1.1), (1.6), приходим к оценке

$$\left| x - y \cdot \frac{|x|}{|y|} \right| = |x| \cdot \left| \frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|} \right| \le |x| \cdot \sqrt{2\varepsilon} \le \kappa \cdot \sqrt{2\varepsilon} \cdot \frac{|x|}{|y|} \cdot \phi(y),$$

подставляя которую в (1.7), заключаем

$$\phi(x-y) \le \phi(y) \cdot \left(1 - \frac{|x|}{|y|} \cdot \left(1 - \kappa^2 \cdot \sqrt{2\varepsilon} \right) \right) < \phi(y),$$

так как $1 > \kappa^2 \cdot \sqrt{2\varepsilon}$. Утверждение i) доказано.

Докажем ii). Пусть, например, $|x| \le |y|$. Тогда, принимая во внимание (1.1) и (1.5), получаем

$$\begin{aligned} \phi(x-y) &\le \kappa \cdot |x-y| \le \kappa \cdot \left(|x|^2 + |y|^2 - 2 \cdot (1-\varepsilon) \cdot |x| \cdot |y| \right)^{1/2} \le \\ &\le \kappa \cdot |x| \cdot \left(1 + (1+\alpha)^2 - 2(1-\varepsilon) \right)^{1/2} = \kappa \cdot |x| \cdot \left(\alpha^2 + 2\alpha + 2\varepsilon \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Так как

$$|x| \le \kappa \cdot \phi(x), \quad |x| \le |y| \le \kappa \cdot \phi(y), \quad \kappa^2 \cdot (\alpha^2 + 2\alpha + 2\varepsilon)^{1/2} < 1,$$

то $\phi(x-y) < \min\{\phi(x), \phi(y)\}$. Утверждение ii) доказано. Лемма доказана. □

Замечание 1.1. Условие (1.5) означает, что угол между векторами x и y не больше, чем $\arccos(1-\varepsilon)$. Поэтому, для любого $\varepsilon \in (0,1)$, пространство $\mathbb{R}^n$ можно разбить на фиксированное (зависящее только от n и ε) число частей K, каждая из которых удовлетворяет условиям в) леммы 1.1.

Пусть

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_l(x) &= \left(\sum_{i \in I_l} x_i^2 \right)^{1/2} \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^s, \ \ l \in \{1, \ldots, r\}; \\ \lceil x \rceil &= \min\{n \in \mathbb{Z} : n \ge x\} \quad \text{при } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Для любых векторов $\mathbf{P} = (P_1, \ldots, P_{r-1})$ и $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_{r-1}) \in \mathbb{R}_+^{r-1}$ с $P_i > p_i$ определим

$$\mathfrak{M}_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma; \mathbf{P}, \mathbf{p}) = \{\gamma \in \mathfrak{M}_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma) : \quad p_l \le \mathfrak{q}_l(\gamma) < P_l, \ l = \overline{1, r-1}\}.$$

Лемма 1.2. *Пусть выполняются следующие условия:*

а) $K = K_1 \times \ldots \times K_r$, *где* K_l — *конус из* $\mathbb{R}^{t_l}$ ($l = \overline{1, r}$), *и существует положительная постоянная* $\varepsilon < (2\kappa^4)^{-1}$ *такая, что*

$$(x, y) \ge (1-\varepsilon) \cdot |x| \cdot |y| \quad \textit{при } x, y \in K_l, \ \ l = \overline{1, r};$$

б) $\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{R})$, $\mathbf{P}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^{r-1}$ *и* $P_l > p_l > 0$, $l = \overline{1, r-1}$.

Тогда для любого вещественного α, *удовлетворяющего (1.4), справедлива оценка*

$$\#\left(K \cap \mathfrak{M}_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma; \mathbf{P}, \mathbf{p}) \right) \le \prod_{l=1}^{r-1} \left\lceil \log_{1+\alpha}(P_l / p_l) \right\rceil.$$

Доказательство. Возьмем любой минимум $\gamma \in K \cap \mathfrak{M}_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma; \mathbf{P}, \mathbf{p})$. Тогда существует набор $(k_1, \ldots, k_{r-1}) \in \mathbb{N}^{r-1}$ такой, что

$$p_l(1+\alpha)^{k_l-1} \le \mathfrak{q}_l(\gamma) < p_l \cdot (1+\alpha)^{k_l}, \quad l = \overline{1, r-1}, \qquad (1.8)$$
$$1 \le k_l \le \left\lceil \log_{1+\alpha}(P_l/p_l) \right\rceil.$$

Докажем, что еще одного локального минимума, удовлетворяющего (1.8) и принадлежащего K, не существует. Действительно, пусть найдется $\eta \in K \cap \mathfrak{M}_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma)$ такой, что

$$p_l(1+\alpha)^{k_l-1} \le \mathfrak{q}_l(\eta) < p_l \cdot (1+\alpha)^{k_l}, \quad l = \overline{1, r-1}.$$

Пусть, например, $\mathfrak{q}_r(\eta) \ge \mathfrak{q}_r(\gamma)$. Тогда, согласно лемме 1.1 i),

$$\phi_r(\eta - \gamma) < \phi_r(\eta).$$

Кроме того, $(1+\alpha)^{-1} \cdot \mathfrak{q}_l(\eta) \le \mathfrak{q}_l(\gamma) \le (1+\alpha) \cdot \mathfrak{q}_l(\eta)$, $l = \overline{1, r-1}$. Поэтому по лемме 1.1 ii)

$$\phi_l(\eta - \gamma) < \min\{\phi_l(\eta), \phi_l(\gamma)\}, \quad l = \overline{1, r-1}.$$

Значит, узел $(\eta - \gamma)$ противоречит условию $\eta \in \mathfrak{M}_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma)$.

Таким образом, существует не более одного локального минимума $\gamma \in K$, удовлетворяющего (1.8), при фиксированном наборе $(k_1, \ldots, k_{r-1})$. Осталось заметить, что количество всех возможных наборов k оценивается величиной $\prod_{l=1}^{r-1} \left\lceil \log_{1+\alpha}(P_l/p_l) \right\rceil$. Лемма доказана. $\square$

Теорема 1.1. *Пусть* $\mathbf{P}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^{r-1}$, *причем* $P_l > p_l > 0$, $l = \overline{1, r-1}$. *Тогда для любой решетки* $\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{R})$ *справедлива оценка*

$$\#\mathfrak{M}_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma; \mathbf{P}, \mathbf{p}) \underset{\mathbf{\Phi}}{\ll} \prod_{l=1}^{r-1} \lceil \log_2(P_l/p_l) \rceil.$$

Доказательство. В соответствии с замечанием 1.1 пространство $\mathbb{R}^s$ можно разбить на фиксированное (зависящее только от I и κ) число множеств K, каждое из которых удовлетворяет условию a) леммы 1.2. Применяя лемму 1.2 для оценки количества минимумов, попадающих в каждую часть, получаем требуемое неравенство. Теорема доказана. $\square$

Пусть $\gamma \in \mathfrak{M}_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma)$, причем $\mathfrak{q}_l(\gamma) \ne 0$, $l = \overline{1, r}$. Тогда, согласно (1.1) и определению локального минимума, множество

$$U(\gamma) = \left\{ x \in \mathbb{R}^s : \ \mathfrak{q}_l(x) < \kappa^{-2} \cdot \mathfrak{q}_l(\gamma), \ l = \overline{1, r} \right\}$$

не содержит ненулевых узлов решетки Γ. Поэтому, по теореме Минковского о выпуклом теле, $\operatorname{mes} U(\gamma) \le 2^s \cdot \det \Gamma$. Так как

$$\operatorname{mes} U(\gamma) = \prod_{l=1}^{r} \left(\kappa^{-2} \cdot \mathfrak{q}_l(\gamma) \right)^{t_l} \cdot \omega_l = \kappa^{-2s} \cdot \prod_{l=1}^{r} \omega_l \cdot (\mathfrak{q}_l(\gamma))^{t_l},$$

где ω_l — объем шара единичного радиуса в $\mathbb{R}^{t_l}$, то

$$\prod_{l=1}^{r} \omega_l \cdot (\mathfrak{q}_l(\gamma))^{t_l} \le 2^s \cdot \kappa^{2s} \cdot \det\Gamma. \tag{1.9}$$

Следствие 1.1. *Пусть* $\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; N)$. *Тогда* $\#\mathfrak{M}_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma) \underset{\mathbf{\Phi}}{\ll} \ln^{r-1} N + 1$.

Доказательство. Разобьем множество $\mathfrak{M}_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma)$ на две непересекающиеся части:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}'_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma) &= \{\gamma \in \mathfrak{M}_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma) : \quad \mathfrak{q}_l(\gamma) \ne 0, \;\; l = \overline{1, r}\}, \\ \mathfrak{M}''_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma) &= \mathfrak{M}_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma) \setminus \mathfrak{M}'_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma). \end{aligned}$$

Согласно (1.9) для всех $\gamma \in \mathfrak{M}'(\Gamma)$ выполняется оценка $\mathfrak{q}_l(\gamma) \underset{\mathbf{\Phi}}{\ll} N$, $l = \overline{1, r}$. Поэтому, используя теорему 1.1, в которой $P_l = O_{\mathbf{\Phi}}(N)$, $p_l = 1$, $l = \overline{1, r-1}$, получаем

$$\#\mathfrak{M}'_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma) \underset{\mathbf{\Phi}}{\ll} \ln^{r-1} N. \tag{1.10}$$

Осталось оценить $\#\mathfrak{M}''_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma)$. Не умаляя общности, рассматриваем минимумы γ, которые для некоторого $k < r$ удовлетворяют условиям:

$$\mathfrak{q}_l(\gamma) \ne 0, \;\; l = \overline{1, k}; \qquad \mathfrak{q}_i(\gamma) = 0, \;\; i = \overline{k+1, r} \tag{1.11}$$

Узел $\gamma' = (\gamma_1, \dots, \gamma_{s_k})$ является локальным $(\Phi_1, \dots, \Phi_k)$-минимумом решетки

$$\Gamma' = \{(x_1, \dots, x_{s_k}) : \;\; (x_1, \dots, x_{s_k}, 0, \dots, 0) \in \Gamma\}.$$

Поэтому, согласно (1.10), количество минимумов $\gamma \in \mathfrak{M}_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma)$, удовлетворяющих (1.11), не больше, чем $O_{\mathbf{\Phi}}(\ln^{k-1} N' + 1)$, где $N' = \det\Gamma'$. Число N' делит N. Это вытекает из классического результата о существовании у целочисленной решетки базиса треугольного вида (см., например, [13, глава I, следствие 2]). Значит, $N' \le N$,

$$\#\mathfrak{M}''_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma) \underset{\mathbf{\Phi}}{\ll} \ln^{r-2} N. \tag{1.12}$$

Следствие доказано. □

2. Количество целочисленных матриц в заданной области

Напомним, что $\mathcal{D}_I(\mathbb{R}_+)$ состоит из диагональных матриц $X \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$ с положительными элементами на главной диагонали, для которых выполняется условие: если i, j принадлежат одному и тому же набору I_l, то $x_{ii} = x_{jj}$.

Пусть Ω — связное множество из $\mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$, удовлетворяющее следующим условиям:

А) Ω инвариантно относительно левого действия группы $\mathcal{D}_I(\mathbb{R}_+)$;

Б) существует положительная постоянная $C = C(\Omega)$ такая, что

$$\prod_{i=1}^{s} T_i(X) \le C \cdot |\det X| \quad \text{для всех } X \in \Omega;$$

B) граница Ω является кусочно-дифференцируемой.

Целью настоящего раздела является получение асимптотической формулы для количества целочисленных матриц $M \in \Omega$ с $|\det M| \in [1, R])$.

Лемма 2.1. *Пусть* $P, C_1 \in [1; +\infty)$. *Определим множество* V_P, *состоящее из матриц* $X = (\!(x_{ij})\!) \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$ *таких, что*

$$\prod_{i=1}^{s} T_i(X) \le P; \tag{2.1}$$

$$1 \le T^{(l)}(X) = \max_{i \in I_l} T_i(X), \quad l = \overline{1, r}; \tag{2.2}$$

$$T_i(X) \le C_1 |x_{ii}|, \quad i = \overline{1, s}. \tag{2.3}$$

Тогда $\operatorname{mes} V_P = O_{I, C_1}(P^s \ln^{r-1} P)$.

Доказательство. Не умаляя общности считаем, что матрицы $X \in V_P$ удовлетворяют следующему дополнительному условию:

$$\max_{i \in I_l} |x_{ii}| = |x_{s_l s_l}|, \quad l = \overline{1, r}. \tag{2.4}$$

Возьмем любую $X \in V_P$. Тогда для всех $l \in \{1, \ldots, r\}$, $i \in I_l \setminus \{s_l\}$

$$\begin{aligned}
&|x_{ij}| \le C_1 \cdot y_i, \quad j \in \{1, \ldots, s\} \setminus \{i\};\\
&|x_{s_l i}| \le C_1 \cdot y_i;\\
&|x_{s_l j}| \le C_1 \cdot y_{s_l}, \quad j \in \{1, \ldots, s\} \setminus I_l,
\end{aligned}$$

где $y_i = |x_{ii}|$, $i = \overline{1, s}$. Интегрируя по x_{ij} с $i \ne j$, получаем

$$\begin{aligned}
&\operatorname{mes} V_P = \int_{V_P} dX \le (2C_1)^{s(s-1)} \int_Y f(y)\, dy,\\
&f(y) = \prod_{l=1}^{r} \left(y_{s_l}^{s - t_l} \cdot \prod_{i \in I_l \setminus \{s_l\}} y_i^s \right),\\
&Y = \left\{ y \in \mathbb{R}_+^s : \quad C_1^{-1} \le y_{s_l} = \max_{i \in I_l} y_i,\ l = \overline{1, r};\ \prod_{i=1}^{s} y_i \le P \right\}.
\end{aligned}$$

Напомним, что $t_l = s_l - s_{l-1}$. Сделаем замену:

$$y_i = z_i \cdot z_{s_l} \text{ при } i \in I_l \setminus \{s_l\}, \quad y_{s_l} = z_{s_l}, \quad l = \overline{1, r}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&dy = \left(\prod_{l=1}^{r} z_{s_l}^{t_l - 1} \right) dz, \quad f(y) = \prod_{l=1}^{r} \left(z_{s_l}^{s t_l - t_l} \cdot \prod_{i \in I_l \setminus \{s_l\}} z_i^s \right),\\
&f(y)\, dy = g(z)\, dz, \qquad g(z) = \prod_{l=1}^{r} \left(z_{s_l}^{s t_l - 1} \cdot \prod_{i \in I_l \setminus \{s_l\}} z_i^s \right),\\
&\int_Y f(y)\, dy = \int_Z g(z)\, dz,
\end{aligned}$$

где Z состоит из точек $z \in \mathbb{R}_+^s$ таких, что

$$\begin{aligned} & z_i \le 1 \text{ при } i \in \{1, \dots, s\} \setminus \{s_1, \dots, s_r\}, \\ & C_1^{-1} \le z_{s_l}, \quad l = \overline{1, r}, \\ & \left(\prod_{l=1}^{r} z_{s_l}^{t_l} \right) \cdot \prod_{\substack{1 \le i \le s, \\ i \notin \{s_1, \dots, s_r\}}} z_i \le P. \end{aligned}$$

Интегрируя по z_{s_r}, получаем

$$\int_Z g(z)\, dz \underset{I, C_1}{\ll} P^s \int_{Z'} \frac{dz_1 \dots dz_{s_l - 1}}{z_{s_1} \cdot \ldots \cdot z_{s_{r-1}}},$$

где Z' состоит из $z \in \mathbb{R}_+^{s-1}$ таких, что

$$\begin{aligned} & z_i \le 1 \text{ при } i \in \{1, \dots, s-1\} \setminus \{s_1, \dots, s_{r-1}\}, \\ & C_1^{-1} \le z_{s_l}, \quad l = \overline{1, r-1}, \\ & \prod_{i=1}^{s-1} z_i \le P. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что

$$\int_{Z'} \frac{dz_1 \dots dz_{s_l - 1}}{z_{s_1} \cdot \ldots \cdot z_{s_{l-1}}} \underset{s, r, C_1}{\ll} \prod_{l=1}^{r-1} \left(\ln P + \int_0^1 |\ln \tau|\, d\tau \right) \underset{r}{\ll} \ln^{r-1} P.$$

Лемма доказана. □

Следствие 2.1. *Пусть* $P, C_1 \in [1, +\infty)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. *Определим множество* $V_{P,\varepsilon}$, *состоящее из матриц* $X \in \mathrm{M}_s(\mathbb{R})$ *таких, что*

$$\prod_{i \in J} T_i(X) \le P \qquad \text{при всех } J \subset \{1, \dots, s\}, \tag{2.5}$$

$$T_i(X) \le C_1 |x_{ii}|, \quad i = \overline{1, s}, \tag{2.6}$$

$$\exists (i, j) : |x_{ij}| \le \varepsilon. \tag{2.7}$$

Тогда $\operatorname{mes} V_{P,\varepsilon} \underset{C_1, I}{\ll} \varepsilon \cdot P^s \cdot \ln^{r-2} P$.

Для доказательства достаточно повторить рассуждения, использованные при обосновании леммы 2.1.

Рассмотрим многообразие $\mathrm{PGL}_I(\mathbb{R}) = \mathcal{D}_I(\mathbb{R}_+) \backslash \mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$, которое является проективизацией $\mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$ относительно левого действия группы $\mathcal{D}_I(\mathbb{R}_+)$. Через $\mathcal{P}_I(\Omega)$ обозначаем образ $\Omega \subset \mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$ при проективизации $\mathrm{GL}_s(\mathbb{R}) \to \mathrm{PGL}_I(\mathbb{R})$.

Пусть $k = ((k_1', k_1''), \dots, (k_r', k_r''))$ — набор пар номеров таких, что

$$k_i' \in I_l \text{ при } i \in I_l; \quad k_i'' \in \{1, \dots, s\}, \quad k_i'' \ne k_j'' \quad \text{ при } i \ne j.$$

Пусть $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$, $\theta_i = \pm 1$. Определим множества

$$\mathrm{GL}_I(\mathbb{R}; k; \theta) = \{X \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{R}) : \ x_{k_i' k_i''} = \theta_i, \ i = \overline{1, r}\}, \quad \mathrm{PGL}_I(\mathbb{R}; k; \theta) = \mathcal{P}_I(\mathrm{GL}_I(\mathbb{R}; k; \theta)).$$

Множество $\mathrm{PGL}_I(\mathbb{R})$ содержится в объединении всех $\mathrm{PGL}_I(\mathbb{R},k,\theta)$. Кроме того, каждый элемент из $\mathrm{PGL}_s(\mathbb{R},k,\theta)$ имеет единственный прообраз при проектировании

$$\mathrm{GL}_I(\mathbb{R},k,\theta) \to \mathrm{PGL}_I(\mathbb{R},k,\theta). \tag{2.8}$$

Значит, множество всех $\mathrm{PGL}_I(\mathbb{R},k,\theta)$ образует атлас многообразия $\mathrm{PGL}_I(\mathbb{R})$, а матрицы из $\mathrm{GL}_I(\mathbb{R},k,\theta)$ являются координатами соответствующих элементов $\mathrm{PGL}_I(\mathbb{R},k,\theta)$.

Определим меру μ_I на (фиксированной) карте $\mathrm{PGL}_I(\mathbb{R};k;\theta)$ следующим образом:

$$\mu_I(w) = \int_W \frac{dL(X)}{|\det X|^s} \text{ при } w \subset \mathrm{PGL}_I(\mathbb{R};k;\theta),$$

где W — прообраз w при проектировании (2.8), $dL(X)$ — дифференциал (s^2-r)-мерной меры Лебега плоскости $L = \mathrm{GL}_I(\mathbb{R};k;\theta)$ в точке X. Мера μ_I не зависит от выбора карты и поэтому определена на всем многообразии $\mathrm{PGL}_I(\mathbb{R})$. Достаточное условие μ_I-измеримости множества вытекает из следующей леммы.

Лемма 2.2. *Пусть W — ограниченное, измеримое по Лебегу множество, лежащее на поверхности $L = \{X \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{R}): \quad x_{s_l s_l} = 1,\ \ l=\overline{1,r}\}$, причем*

$$T_i(X) \underset{W}{\ll} x_{ii}, \quad i=\overline{1,s}; \qquad \prod_{i=1}^{s} x_{ii} \underset{W}{\ll} |\det X|.$$

Тогда интеграл Лебега

$$\nu(W) = \int_W \frac{|\ln|\det X||}{|\det X|}\, dL(X)$$

существует и конечен.

Доказательство. Из условий леммы вытекает, что для любой $X \in W$

$$T_{s_l}(X) \asymp 1,\ \ l=\overline{1,r}; \quad |\det X| \asymp \prod_{i\in\Upsilon(I)} x_{ii},$$

где $\Upsilon(I) = \{1,\dots,s\}\backslash\{s_1,\dots,s_r\}$. Здесь и далее в этом доказательстве постоянные в оценках $O(\dots)$ и $\ll$ зависят только от W. Значит,

$$\nu(W) \ll \int_W \frac{\sum_{i\in\Upsilon(I)} \ln x_{ii}}{\prod_{i\in\Upsilon(I)} x_{ii}^s}\, dL(X).$$

Интегрируя по всем x_{ij} с $i\neq j$, учитывая, что при любом $l \in \{1,\dots,r\}$

$$\begin{aligned}
&\max\left\{|x_{s_l i}|, \max_{j\neq i}|x_{ij}|\right\} \ll x_{ii},\ \ i \in I_l \setminus \{s_l\};\\
&\max_{j\neq s_l}|x_{s_l j}| \ll 1,
\end{aligned}$$

получаем

$$\nu(W) \ll \int_0^1 |\ln t|\, dt = 1.$$

□

Пусть

$$\Omega_R=\left\{X\in\Omega:\quad |\det X|\in[1,R],\ \ T^{(l)}(X)=\max_{i\in I_l}T_i(X)\geq 1,\ \ l=\overline{1,r}\right\}. \tag{2.9}$$

Лемма 2.3. *Пусть множество $\Omega\subset\mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$ удовлетворяет условиям A), Б), В) и (2.3). Тогда множество $\mathcal{P}_I(\Omega)$ является μ_I-измеримым и для любого $R\geq 2$ справедлива асимптотическая формула*

$$\operatorname{mes}\Omega_R=\frac{1}{s\cdot t_1\cdot\ldots\cdot t_r}\cdot\frac{R^s}{(r-1)!}\cdot\ln^{r-1}R\cdot\Big(\mu_I(\mathcal{P}_I(\Omega))+O_{\Omega,I}\left(\ln^{-1}R\right).\Big). \tag{2.10}$$

Доказательство. Согласно лемме 2.2 множество $\mathcal{P}_I(\Omega)$ является μ_I-измеримым . Не умаляя общности считаем, что дополнительно выполняются следующие условия:

$$\max_{i\in I_l}|x_{ii}|=x_{s_ls_l},\quad l=\overline{1,r}. \tag{2.11}$$

Сделаем в интеграле $\operatorname{mes}\Omega_R=\int_{\Omega_R}dX$ замену

$$x_{s_ls_l}=y_l,\quad x_{ij}=y_{ij}\cdot y_l,\qquad j=\overline{1,s},\ \ j\neq s_l,\ \ i\in I_l,\ \ l=\overline{1,r}. \tag{2.12}$$

Преобразование переменных (2.12) можно записать также в виде

$$X=S\cdot Y,$$

где S — матрица из $\mathcal{D}_I(\mathbb{R})$ с $s_{ii}=y_l$ при $i\in I_l$, а Y — матрица из L, где L — поверхность из леммы 2.2. Тогда

$$dX=\left(y_1^{t_1s-1}\cdot\ldots\cdot y_r^{t_rr-1}\right)\,dy_1\cdot\ldots\cdot dy_r\prod_{\substack{1\leq i,j\leq s,\\(i,j)\neq(s_l,s_l)}}dy_{ij}, \tag{2.13}$$

причем

$$1\leq|\det X|\leq R\qquad\Longleftrightarrow\qquad\frac{1}{|\det Y|}\leq y_1^{t_1}\cdot\ldots\cdot y_r^{t_r}\leq\frac{R}{|\det Y|}. \tag{2.14}$$

Согласно (2.3), (2.11) существует ограниченное множество $W\subset L$ такое, что $\mathcal{P}_I(\Omega)=\mathcal{P}_I(W)$. Пусть

$$H(R,Y)=\left\{y\in\mathbb{R}^r:\quad\frac{1}{|\det Y|}\leq y_1^{t_1}\cdot\ldots\cdot y_r^{t_r}\leq\frac{R}{|\det Y|},\quad\frac{1}{C_1}\leq y_l,\ l=\overline{1,r}\right\}.$$

Используя (2.13), (2.14), получаем

$$\int_{\Omega_R}dX=\int_W\left(\int_{H(R,Y)}y_1^{t_1s-1}\cdot\ldots\cdot y_r^{t_rs-1}dy\right)dL(Y). \tag{2.15}$$

Сделаем еще одну замену: $z_l=y_l^{t_ls}$, $l=\overline{1,r}$. Тогда

$$\int_{H(R,Y)}y_1^{t_1s-1}\cdot\ldots\cdot y_r^{t_rs-1}dy=\left(s^r\cdot\prod_{l=1}^r t_l\right)^{-1}\int_{H'(R,Y)}dz, \tag{2.16}$$

$$H'(R,Y)=\left\{z\in\mathbb{R}^r:\quad\frac{1}{|\det Y|^s}\leq z_1\cdot\ldots\cdot z_r\leq\frac{R^s}{|\det Y|^s},\quad C_1^{-t_ls}\leq z_l,\ l=\overline{1,r}\right\}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\int_{H'(R,Y)} dz = \frac{R^s}{|\det Y|^s}\cdot\frac{\ln^{r-1}R^s}{(r-1)!} + O_{r,C,C_1}\left(\frac{R^s\ln^{r-2}R + |\ln|\det Y||}{|\det Y|^s}\right).$$

Из последней формулы, а также (2.15), (2.16) вытекает соотношение

$$\begin{aligned}\operatorname{mes}\Omega_R \quad = \quad & \frac{1}{s\cdot t_1\cdot\ldots\cdot t_r}\cdot\frac{R^s}{(r-1)!}\cdot\ln^{r-1}R\cdot\left(\int_W\frac{dL(Y)}{|\det Y|^s}+\right.\\ & \left.+O_{r,C,C_1}\left(\ln^{-1}R\cdot\int_W\frac{1+|\ln|\det Y||}{|\det Y|^s}dL(Y)\right)\right).\end{aligned}$$

Осталось заметить, что

$$\int_W\frac{dL(Y)}{|\det Y|^s} = \mu_I(\mathcal{P}_I(\Omega)),\quad \int_W\frac{1+|\ln|\det Y||}{|\det Y|^s}dL(Y)<\infty.$$

$\square$

Будем использовать следующие обозначения: если S — поверхность в $\mathbb{R}^n$, то

$$U_\varepsilon(S)=\{x\in\mathbb{R}^n:\quad \rho_\infty(S,x)<\varepsilon\},\quad \rho_\infty(S,x)=\inf_{y\in S}\max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|.$$

Для вычисления количества целочисленных точек из Ω_R применим следующий результат.

Лемма 2.4. *Пусть G — связное измеримое по Лебегу множество из $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\#(G\cap\mathbb{R}^n)=\operatorname{mes}G+O(\operatorname{mes}U_1(\partial G)).$$

Доказательство см., например, в [11, лемма 14].

Замечание 2.1. Пусть S — кусочно-гладкая гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$, $R\in\mathbb{R}^s_+$, $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$,

$$S_\varepsilon(R)=U_\varepsilon(S)\cap\left\{x\in\mathbb{R}^s:\quad |x_i|\le R_i,\ i=\overline{1,n}\right\}.$$

Тогда $\operatorname{mes}S_\varepsilon(R)\ll_S \varepsilon\cdot\sum\limits_{j=1}^n\prod\limits_{i\ne j}R_i$.

Замечание 2.2. Пусть $L\in\mathbb{N}$, $m_0\in\mathbb{Z}_+$. Пусть

$$S(L,m_0)=\sum\left(\frac{1}{2^{m_1}}\prod_{l=1}^r 2^{m_l t_l s}\right)$$

— сумма по всем $(m_1,\ldots,m_r)\in\mathbb{Z}^r_+$ таким, что $m_1t_1+\ldots+m_rt_r\le L,\quad m_1\ge m_0$. Тогда, суммируя сначала по t_r, а потом по оставшимся t_i, получаем

$$\operatorname{mes}S_\varepsilon(R)\ll_S 2^{Ls}\sum_{\substack{m_1\ge m_0\\ m_i\le L}}\frac{1}{2^{m_1}}\ll\frac{2^{Ls}}{2^{m_0}}\cdot L^{r-2}.$$

Пусть $P,p\in\mathbb{R}_+$, $P>p$. Определим множество $G(P,p)$, состоящее из матриц $X\in\mathrm{M}_s(\mathbb{R})$, для которых выполняются неравенства (2.1) и $p\le T_i(X)$, $i=\overline{1,s}$.

Лемма 2.5. *Пусть S — кусочно-дифференцируемая поверхность из $\mathrm{M}_s(\mathbb{R})$. Пусть $P, p \in \mathbb{R}_+$, $P > p^s$; $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Тогда*

$$\mathrm{mes}\ (U_\varepsilon(S) \cap G(P,p)) \underset{S,I}{\ll} \varepsilon \cdot \frac{P^s}{p} \cdot \ln^{r-2}(P/p^s).$$

Доказательство. Не умаляя общности считаем, что

$$T_{s_l}(X) = \max_{i \in I_l} T_i(X), \quad l = \overline{1,r}, \quad X \in G(P,p).$$

Определим множество K, состоящее из наборов $k = (k_1, \ldots, k_s) \in \mathbb{Z}_+^s$ таких, что

$$\begin{aligned} &\max_{i \in I_l} k_i = k_{s_l}, \quad l = \overline{1,r}; \\ &k_1 + \ldots + k_s \leq s + \log_2 (P/p^s). \end{aligned}$$

Для каждого $k \in K$ положим

$$G_k = \left\{ X \in \mathrm{M}_s(\mathbb{R}): \quad T_i(X) \leq p \cdot 2^{k_i},\ i = \overline{1,s} \right\}.$$

Тогда $G(P,p) \subset \bigcup_{k \in K} G_k$ и поэтому

$$\mathrm{mes}\ (U_\varepsilon(S) \cap G(P,p)) \leq \sum_{k \in K} \mathrm{mes}\ (U_\varepsilon(S) \cap G_k).$$

Каждое G_k содержится в параллелепипеде Π_k, состоящем из $X \in \mathrm{M}_s(\mathbb{R})$ таких, что

$$\begin{aligned} &\max \left\{ \max_{1 \leq j \leq s} |x_{ij}|,\ |x_{s_l i}| \right\} \leq p \cdot 2^{k_j} \quad \text{при } i \in I_l \setminus \{s_l\}, \\ &|x_{s_l j}| \leq p \cdot 2^{k_{s_l}} \quad \text{при } j \in \{1, \ldots, s\} \setminus (I_l \setminus \{s_l\}),\ \ l \in \{1, \ldots, r\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\mathrm{mes}\, \Pi_k \underset{I}{=} (2p)^{s^2} \cdot \prod_{l=1}^{r} \left(\left(2^{k_{s_l}}\right)^{s - t_l + 1} \cdot \prod_{i \in I_l \setminus \{s_l\}} \left(2^{k_i}\right)^{s+1} \right).$$

Используя замечание 2.1, получаем

$$\begin{aligned} &\mathrm{mes}\ (U_\varepsilon(S) \cap G_k) \underset{S}{\ll} \mathrm{mes}\ (U_\varepsilon(S) \cap \Pi_k) \leq \varepsilon \cdot \mathrm{mes}\, \Pi_k \cdot \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{p \cdot 2^{k_j}}. \\ &\mathrm{mes}\ (U_\varepsilon(S) \cap G(P,p)) \underset{S}{\ll} \varepsilon \cdot p^{s^2 - 1} \cdot \sum_{j=1}^{s} \theta_j, \\ &\theta_j = \sum_{k \in K} \frac{1}{2^{k_j}} \cdot \prod_{l=1}^{r} \left(\left(2^{k_{s_l}}\right)^{s - t_l + 1} \cdot \prod_{i \in I_l \setminus \{s_l\}} \left(2^{k_i}\right)^{s+1} \right). \end{aligned}$$

Осталось доказать, что

$$\theta_j \underset{I}{\ll} \frac{P^s}{p^{s^2}} \cdot \ln^{r-2}(P/p^s). \tag{2.17}$$

Достаточно рассмотреть случай $j=1$. Положим

$$\begin{aligned}&n_i = k_{s_l} - k_i, \quad i \in I_l \setminus \{s_l\},\\ &n_{s_l} = k_{s_l},\\ &\Upsilon(I) = \{1,\ldots,s\} \setminus \{s_1,\ldots,s_r\}.\end{aligned}$$

Тогда

$$\theta_1 = \sum_{n\in K'} \left(\frac{2^{n_1}}{2^{n_{s_1}}} \prod_{l=1}^{r} 2^{n_{s_l} t_l s} \cdot \prod_{i\in\Upsilon(I)} \frac{1}{2^{n_i(s+1)}} \right),$$

$$K' = \left\{ n \in \mathbb{Z}_+^s : \quad \begin{array}{c} n_{s_l} \ge n_i \text{ при } i \in I_l, \;\; l \in \{1,\ldots,r\}, \\ \displaystyle\sum_{l=1}^{r} t_{s_l} n_{s_l} \le \log_2(P/p^s) + s + \sum_{i\in\Upsilon(I)} n_i. \end{array} \right\}$$

Суммируя по $n_{s_1},\ldots,n_{s_r}$, используя замечание 2.2, в котором

$$m_i = n_{s_i}, \; i = \overline{1,s}; \quad m_0 = n_1; \quad L = \log_2(P/p^s) + s + \sum_{i\in\Upsilon(I)} n_i,$$

получаем

$$\theta_1 \ll_I \left(\frac{P}{p^s}\right)^s \cdot \sum_{\substack{n_i\in\mathbb{Z}_+,\\ i\in\Upsilon(I)}} \left(\log_2(P/p^s) + s + \sum_{i\in\Upsilon(I)} n_i \right)^{r-2} \cdot \prod_{i\in\Upsilon(I)} \frac{1}{2^{n_i}} \ll_I \frac{P^s}{p^{s^2}} \cdot \log_2^{r-2}(P/p^s).$$

Неравенство (2.17) доказано. Лемма доказана. □

Лемма 2.6. *Пусть множество $\Omega \subset \mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$ удовлетворяет условиям А), Б), В) и (2.3). Тогда для любого $R \ge 2$ количество целочисленных матриц $M \in \Omega$ с $|\det M| \in [1,R]$ равно*

$$\frac{1}{s \cdot t_1 \cdot \ldots \cdot t_r} \cdot \frac{R^s}{(r-1)!} \cdot \ln^{r-1} R \cdot \Big(\mu_I(\mathcal{P}_I(\Omega)) + O_\Omega(\ln^{-1} R) \Big).$$

Доказательство. Согласно леммам 2.3, 2.4 искомое число равно

$$\frac{1}{s \cdot t_1 \cdot \ldots \cdot t_r} \cdot \frac{R^s}{(r-1)!} \cdot \mu_I(\mathcal{P}_I(\Omega)) \cdot \ln^{r-1} R + O(R^s \cdot \ln^{r-2} R + \xi),$$

где $\xi = \operatorname{mes} U_1(\partial\Omega_R)$. Здесь и далее в этом доказательстве постоянные в оценках $\ll$ и $O(\ldots)$ зависят только от Ω и I. Осталось оценить ξ.

Любая матрица $X \in U_1(\partial\Omega_R)$ удовлетворяет условиям

$$\prod_{i\in J} T_i(X) \ll R \quad \text{при всех } J \subset \{1,\ldots,s\}. \tag{2.18}$$

Очевидно, что $U_1(\partial\Omega_R) \subset U^{(1)} \cup U^{(2)} \cup U^{(3)}$, где

$U^{(1)}$ состоит из матриц $X \in \mathrm{M}_s(\mathbb{R})$, для которых выполняются (2.3), (2.18) и существует номер $l \in \{1,\ldots,r\}$ такой, что $T^{(l)}(X) \le 1$;

$U^{(2)}$ состоит из матриц $X \in U_1(S)$, для которых выполняются (2.3), (2.18) и $T_i(X) \geq 1$, $i = \overline{1, s}$;

$U^{(3)}$ состоит из матриц $X \in U_1(S_R)$, для которых выполняются (2.3), (2.18) и $T_i(X) \geq 1$, $i = \overline{1, s}$.

Здесь $S_R = \{X \in \mathrm{M}_s(\mathbb{R}) : |\det X| = R\}$, а S — граница множества, состоящего из матриц $X \in \Omega$ таких, что $|\det X| \geq 1$, $T_i(X) \geq 1, i = \overline{1, s}\}$.

Согласно следствию 2.1

$$\operatorname{mes} U^{(1)} \ll R^s \cdot \ln^{r-2} R.$$

Для оценки $\operatorname{mes} U^{(2)}$ используем лемму 2.5, в которой $P = O(R)$, $p = 1$, $\varepsilon = 1$. Получаем

$$\operatorname{mes} U^{(2)} \ll R^s \cdot \ln^{r-2} R.$$

Оценим $\operatorname{mes} U^{(3)}$. Множество $U' = R^{-1/s} \cdot U^{(3)}$ состоит из матриц $X \in U_\varepsilon(S_1)$ $(\varepsilon = R^{-1/s})$ с

$$R^{-1/s} \leq T_i(X), \quad i = \overline{1, s}; \quad \prod_{i=1}^{s} T_i(X) \ll 1.$$

Применяя лемму 2.5, в которой $P = O(1)$, $p = \varepsilon = R^{-1/s}$, получаем

$$\operatorname{mes} U' \ll \ln^{r-2} R \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{mes} U^{(3)} = R^s \cdot \operatorname{mes} U' \ll R^s \cdot \ln^{r-2} R.$$

Таким образом, $\xi \ll R^s \cdot \ln^{r-2} R$. □

Лемма 2.7. *Пусть* $X \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$, *причем*

$$\prod_{i=1}^{s} T_i(X) \leq C \cdot |\det X|.$$

Тогда существует перестановка $(n_1, \ldots, n_s)$ *из* $\{1, \ldots, s\}$ *такая, что*

$$T_i(X) \leq (C \cdot s!) \cdot |x_{in_i}|, \quad i = \overline{1, s}.$$

Доказательство леммы вытекает, например, из [12, lemma 13].

Следствие 2.2. *Пусть* Ω *— множество из* $\mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$, *удовлетворяющее условиям А), Б), В) ((2.3) может не выполняться). Тогда для любого* $R \geq 2$ *количество целочисленных матриц* $M \in \Omega$ *с* $|\det M| \in [1, R]$ *равно*

$$\frac{1}{s \cdot t_1 \cdot \ldots \cdot t_r} \cdot \frac{R^s}{(r-1)!} \cdot \ln^{r-1} R \cdot \Big(\mu_I(\mathcal{P}_I(\Omega)) + O_{\Omega,I}(\ln^{-1} R)\Big).$$

Доказательство. Согласно лемме 2.7 множество Ω можно разбить на фиксированное число непересекающихся частей так, что каждая часть после действия некоторого преобразования, меняющего нумерацию столбцов, удовлетворяет условиям А), Б), В), (2.3) с $C_1 = C \cdot s!$. Применяя лемму 2.6 для подсчета количества целочисленных точек в каждой части, получаем требуемую формулу. □

3. Дополнение локального минимума до линейно независимой системы: частные случаи

Замечание 3.1. Пусть $\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{R})$ и $b^{(1)}, \ldots, b^{(s)}$ — линейно независимые узлы Γ. Тогда существует базис $a^{(1)}, \ldots, a^{(s)}$ решетки Γ такой, что [13, глава 1, следствие 2]

$$b^{(j)} = \sum_{i=1}^{j} v_{ji} a^{(i)}, \tag{3.1}$$

$$0 < v_{ji} \le v_{jj}, \quad i = \overline{1, j-1}, \quad j = \overline{1, s}. \tag{3.2}$$

Пусть дополнительно $b^{(1)}$ является примитивным узлом Γ. Тогда $v_{11} = 1$, $a^{(1)} = b^{(1)}$. Из (3.1), (3.2) вытекает, что для любых $k \in \{2, \ldots, s\}$, $i \in \{1, \ldots, s\}$

$$\left|a_i^{(k)}\right| \le \left|b_i^{(k)}\right| + \sum_{j=1}^{k-1} \left|a_i^{(j)}\right|.$$

Поэтому

$$\left|a_i^{(k)}\right| \le \left|b_i^{(k)}\right| + 2^{k-2} \cdot \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{2^j} \cdot \left|b_i^{(j)}\right|. \tag{3.3}$$

Конец замечания.

В следующем разделе мы построим процедуру «почти всегда» единственного дополнения локального минимума до некоторого базиса, удовлетворяющего некоторому аналогу неравенства (1.9). Она состоит из двух частей:

1) дополняем локальный минимум a «почти всегда» единственным образом до линейно независимой системы узлов $b^{(1)} = a, b^{(2)}, \ldots, b^{(s)}$, удовлетворяющей некоторому аналогу неравенства (1.9);

2) используя замечание 3.1, получаем базис $a^{(1)} = a, a^{(2)}, \ldots, a^{(s)}$; выполнение соответствующего неравенства вытекает из (3.3).

Основная сложность состоит в построении подходящей линейно независимой системы. В общем случае используемая процедура является громоздкой. Поэтому, для наглядности изложения, в этом разделе мы кратко рассмотрим три частных случая:

$$\begin{aligned}
r = s, &\qquad \Phi_i(x) = x_i, \ \ i = \overline{1, s}; \\
r = 1, &\qquad \Phi_1(x) = |x|_\infty = \max_{1 \le i \le s} |x_i|; \\
r = 2, &\qquad \Phi_1(x) = \max_{i \in I_1} |x_i|, \quad \Phi_2(x) = \max_{i \in I_2} |x_i|.
\end{aligned}$$

Отметим, что второй случай является «вырожденным» (локальный минимум является первым последовательным минимумом решетки Γ относительно нормы $|\cdot|_\infty$).

Далее всюду в этом разделе считаем, что

$$\varepsilon \in (0, 1/s!); \quad \Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{R}); \quad a \in \mathfrak{M}_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma); \quad \Phi_l(a) \ne 0, \ \ l = \overline{1, r}.$$

Замечание 3.2. Пусть $\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{R})$, $k \in \{1, \ldots, s\}$. Согласно теореме Минковского о линейных формах, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \gamma \in \Gamma \setminus \{0\} : \ |\gamma_i| \le \varepsilon$, $i \ne k$.

Пример 1: $r = s$**,** $\Phi_i(x) = |x_i|$

В этом случае условие $a \in \mathfrak{M}_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma)$ означает, что не существует ненулевого узла $a' \in \Gamma$ такого, что

$$|a_i'| \leq |a_i|, \quad i = \overline{1,s}, \quad \sum_{i=1}^{s} |a_i'| < \sum_{i=1}^{s} |a_i|.$$

Положим $b^{(1)} = a$. Определим множество

$$H_2 = \Big\{ \gamma \in \Gamma \setminus \{0\} : \quad |\gamma_1| \leq \varepsilon |a_1|, \quad |\gamma_i| \leq |a_i| \text{ при } i \geq 3 \Big\}.$$

Оно непусто согласно замечанию 3.2. Выберем узел $b^{(2)} \in H_2$ из условий

$$0 \leq b_2^{(2)} = \min_{\gamma \in H_2} |\gamma_2|.$$

Тогда $b_2^{(2)} > |a_2|$, так как в противном случае $b^{(2)}$ нарушает минимальность a.

Определим

$$H_3 = \left\{ \gamma \in \Gamma \setminus \{0\} : \quad \begin{array}{l} |\gamma_1| \leq \varepsilon |a_1|, \\ |\gamma_2| \leq \varepsilon |b_2^{(2)}|, \\ |\gamma_i| \leq |a_i|, i \geq 4. \end{array} \right\}$$

и возьмем в качестве $b^{(3)}$ такой узел из H_3, что

$$0 \leq b_3^{(3)} = \min_{\gamma \in H_3} |\gamma_3|.$$

Тогда $b_3^{(2)} > |b_3^{(2)}|$, т.к. в противном случае $b^{(3)} \in H_2$, что противоречит выбору $b^{(2)}$.

Продолжая процесс, получаем систему $b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(s)}$ такую, что

$$b^{(k)} \in H_k = \left\{ \gamma \in \Gamma \setminus \{0\} : \quad \begin{array}{ll} |\gamma_i| \leq \varepsilon |b_i^{(i)}| & \text{при } i < k, \\ |\gamma_i| \leq |a_i| & \text{при } i > k \end{array} \right\},$$
$$0 \leq b_k^{(k)} = \min_{\gamma \in H_k} |\gamma_k|, \qquad k = \overline{2,s}.$$

Рассмотрим матрицу $B = (\!(b_i^{(j)})\!)$. Максимальный по абсолютной величине элемент каждой строки матрицы находится на главной диагонали, то есть

$$\max_{1 \leq j \leq s} |b_i^{(j)}| = b_i^{(i)}, \quad i = \overline{1,s}. \tag{3.4}$$

Кроме того, элементы, лежащие выше главной диагонали, малы, а именно

$$|b_i^{(j)}| \leq \varepsilon \cdot b_i^{(i)} \text{ при } j > i. \tag{3.5}$$

Поэтому $\det B \neq 0$, система $\left\{ b^{(j)} \right\}_{j=1}^{s}$ является линейно независимой. Более того,

$$\prod_{i=1}^{s} b_i^{(i)} < \frac{1}{\varepsilon^{s-1}} \cdot \det \Gamma. \tag{3.6}$$

Если (3.6) не выполняется, то по теореме Минковского о линейных формах найдется узел $\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}$ с $|\gamma_i| \leq \varepsilon |b_i^{(i)}|$ $(i = \overline{1, s-1})$, $|\gamma_s| < b_s^{(s)}$. Это противоречит выбору $b^{(s)}$.

Из (3.6) вытекает, что

$$\prod_{i=1}^{s} \max_{1\le j\le s} |b_i^{(j)}| \ll_s \det\Gamma.$$

Эту оценку мы и называем аналогом (1.9). Базис $\{a^{(j)}\}_{j=1}^s$ из замечания 3.1 также удовлетворяет такой оценке в силу (3.3).

Пример 2: $r = 1$, $\Phi_1(x) = |x|_\infty$

В этом случае условие $a \in \mathfrak{M}_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma)$ означает, что не существует ненулевого узла $a' \in \Gamma$ такого, что $|a'|_\infty < |a|_\infty$, то есть a является первым последовательным минимумом Γ. Не умаляя общности, считаем, что $|a_1| = |a|_\infty$.

Положим $b^{(1)} = a$.

Определим множество $H_2 = \{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\} : \quad |\gamma_1| \le \varepsilon |a_1|\}$ и выберем $b^{(2)} \in H_2$ так, что

$$|b^{(2)}|_\infty = \min_{\gamma\in H_2} |\gamma|_\infty.$$

Таких узлов как минимум два (с противоположными знаками). Поэтому наложим дополнительное условие

$$\exists q \in \{1,\ldots,s\} : \quad b_q^{(2)} = |b^{(2)}|_\infty.$$

Отметим, что $|b^{(2)}|_\infty \ge |a|_\infty$, поэтому $q \ne 1$. Пусть, например, $q = 2$.

Определим множество

$$H_3 = \left\{\gamma \in \Gamma\setminus\{0\} : \quad \begin{array}{l} |\gamma_1| \le \varepsilon|a_1|, \\ |\gamma_2| \le \varepsilon\cdot|b_2^{(2)}| \end{array} \right\} = \{\gamma \in H_2 : |\gamma_2| \le \varepsilon\cdot|b_2^{(2)}|\}$$

и возьмем в качестве $b^{(3)}$ такой узел из H_3, что

$$|b^{(3)}|_\infty = \min_{\gamma\in H_3} |\gamma|_\infty; \quad \exists q \in \{1,\ldots,s\} : \ b_q^{(3)} = |b^{(3)}|_\infty.$$

Так как $H_3 \subset H_2$, то $|b^{(3)}|_\infty \ge |b^{(2)}|$, и значит, $q \ne 1, 2$. Пусть, например, $q = 3$.

Продолжая процесс, получаем систему $b^{(1)} = a, b^{(2)}, \ldots, b^{(s)}$, которая (возможно, после изменения нумерации координат) удовлетворяет для любого $k \in \{2,\ldots,s\}$ условиям

$$\begin{aligned} &b^{(k)} \in H_k = \left\{\gamma \in \Gamma\setminus\{0\} : \quad |\gamma_i| \le \varepsilon|b_i^{(i)}| \text{ при } i < k\right\}, \\ &b_k^{(k)} = |b^{(k)}|_\infty = \min_{\gamma\in H_k} |\gamma|_\infty. \end{aligned}$$

Кроме того, выполняются неравенства (3.4), (3.5). Так же как и в предыдущем примере доказывается, что полученная система является линейно независимой и выполняется оценка (3.6). Из (3.6) и соотношений $b_k^{(k)} = |b^{(k)}|_\infty$ вытекает неравенство

$$\prod_{i=1}^{s} T_i(B) \ll_s \det\Gamma, \quad T_i(B) = \max\left\{\max_{1\le j\le i} |b_i^{(j)}|, \max_{1\le j\le s} |b_j^{(i)}|\right\},$$

которое мы и рассматриваем, как аналог (1.9). Такая же оценка будет выполняться и для базиса $\{a^{(j)}\}_{j=1}^s$ из замечания 3.1.

Отметим, что для произвольной лучевой непрерывной функции $\Phi_1 : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ соответствующую линейно независимую систему, обладающую подобными свойствами, можно построить точно таким же образом, если взять $\varepsilon < 1/(c \cdot s!)$, где

$$c = \frac{c^*}{c_*}, \quad c_* = \min_{|x|_\infty = 1} \Phi_1(x), \quad c^* = \max_{|x|_\infty = 1} \Phi_1(x).$$

Пример 3: $r = 2$**,** $\Phi_1(x) = \max_{i \in I_1} |x_i|$**,** $\Phi_2(x) = \max_{i \in I_2} |x_i|$

Пусть $I_1 = (1, \ldots, s_1)$, $I_2 = (s_1 + 1, \ldots, s)$. Чтобы обозначения следующего раздела были более понятными, определим

$$\mathfrak{p}_l(x) = \max_{i \in I_l} |x_i|, \quad l = 1, 2$$

(в рассматриваемом сейчас случае $\Phi_l(x) = \mathfrak{p}_l(x)$).

Положим $b^{(1)} = a$. Пусть, например, $\mathfrak{p}_1(a) = |a_1|$

Определим множество

$$H_2 = \{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\} : \quad |\gamma_1| \leq \varepsilon |a_1|, \ \ \mathfrak{p}_2(\gamma) \leq \mathfrak{p}_2(a)\}$$

и выберем к качестве $b^{(2)}$ такой узел из H_2, что

$$\mathfrak{p}_1(b^{(2)}) = \min_{\gamma \in H_2} \mathfrak{p}_1(\gamma),$$

причем для некоторого номера $q \in I_1$ $b_q^{(2)} = \mathfrak{p}_1(b^{(2)})$. Тогда $\mathfrak{p}_1(b^{(2)}) \geq \mathfrak{p}_1(a)$ и поэтому $q \neq 1$. Пусть $q = 2$.

Определим $H_3 = \left\{\gamma \in H_2 : \quad |\gamma_2| \leq \varepsilon |b_2^{(2)}|\right\}$ и выберем такой $b^{(3)} \in H_3$, что

$$\mathfrak{p}_1(b^{(3)}) = \min_{\gamma \in H_3} \mathfrak{p}_1(\gamma); \qquad \exists q \in I_1 : \ \ b_q^{(3)} = \mathfrak{p}_1(b^{(3)}).$$

Так как $H_3 \subset H_2$, то $\mathfrak{p}_1(b^{(3)}) \geq \mathfrak{p}_1(b^{(2)})$, и значит, $q \neq 1$, $q \neq 2$.

Продолжая процесс, получаем систему $b^{(1)} = a, b^{(2)}, \ldots, b^{(s_1)}$, которая (возможно, после изменения нумерации координат) удовлетворяет для любого $k \in \{2, \ldots, s_1\}$ условиям

$$b^{(k)} \in H_k = \left\{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\} : \quad \begin{array}{ll} |\gamma_i| \leq \varepsilon |b_i^{(i)}| & \text{при } i < k, \\ \mathfrak{p}_2(\gamma) \leq \mathfrak{p}_2(a) & \end{array} \right\},$$
$$b_k^{(k)} = \mathfrak{p}_1(b_k^{(k)}) = \min_{\gamma \in H_k} \mathfrak{p}_1(\gamma_k).$$

Так как $H_k \subset H_{k-1}$, то

$$b_k^{(k)} \geq b_k^{(i)} \text{ при } i < k.$$

Узлы $b^{(s_1+1)}, \ldots, b^{(s)}$ выберем следующим образом. Определим

$$H_{s_1+1} = \left\{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\} : \quad |\gamma_i| \leq \varepsilon |b_i^{(i)}| \text{ при } i \leq s_1\right\}$$

и возьмем в качестве $b^{(s_1+1)}$ такой узел из H_{s_1+1}, что

$$\mathfrak{p}_2(b^{(s_1+1)}) = \min_{\gamma \in H_{s_1+1}} \mathfrak{p}_2(\gamma),$$

причем существует номер $q \in I_2$ для которого $b_q^{(s_1+1)} = \mathfrak{p}_2(b^{(s_1+1)})$. Так же, как и ранее, получаем, что $\mathfrak{p}_2(b^{(s_1+1)}) \geq \mathfrak{p}_2(b^{(s_1)})$. Пусть $q = s_1 + 1$.

Определим

$$H_{s_1+2} = \left\{ \gamma \in \Gamma \setminus \{0\} : \quad |\gamma_i| \leq \varepsilon |b_i^{(i)}| \text{ при } i \leq s_1 + 1 \right\}$$

и выберем $b^{(s_1+2)} \in H_{s_1+2}$ так, что

$$\mathfrak{p}_2(b^{(s_1+2)}) = \min_{\gamma \in H_{s_1+2}} \mathfrak{p}_2(\gamma),$$
$$\exists q \in I_2 : \quad b_q^{(s_1+2)} = \mathfrak{p}_2(b^{(s_1+2)}).$$

Так как $H_{s_1+2} \subset H_{s_1+1}$, то $\mathfrak{p}_2(b^{(s_1+2)}) \geq \mathfrak{p}_2(b^{(s_1+1)})$, поэтому $q \neq s_1 + 1$. Пусть $q = s_1 + 2$.

Продолжая процесс, получаем узлы $b^{(s_1+1)}, \ldots, b^{(s)}$, которые (возможно, после изменения нумерации координат) удовлетворяют следующим условиям:

$$b^{(k)} \in H_k = \left\{ \gamma \in \Gamma \setminus \{0\} : \quad |\gamma_i| \leq \varepsilon |b_i^{(i)}| \text{ при } i < k \right\},$$
$$b_k^{(k)} = \mathfrak{p}_2(b^{(k)}) = \min_{\gamma \in H_k} \mathfrak{p}_2(\gamma), \quad k = \overline{s_1 + 1, s}.$$

Полученная система $b^{(1)}, \ldots, b^{(s)}$ удовлетворяет неравенствам (3.4), (3.5). Так же, как и в примере 1, доказывается, что $\{b^{(j)}\}_{j=1}^s$ является линейно независимой и выполняется оценка (3.6). Из (3.6) вытекает неравенство

$$\prod_{i=1}^{s} T_i(B) \ll_s \det \Gamma, \;\; T_i(B) = \max \left\{ \max_{1 \leq j \leq s} |b_i^{(j)}|, \max_{j \in I_l} |b_j^{(i)}| \right\} \text{ при } i \in I_l, \;\; l = 1, 2,$$

которое мы и рассматриваем как аналог (1.9). Соответствующая оценка будет выполняться и для базиса $\{a^{(j)}\}_{j=1}^s$ из замечания 3.1.

Для произвольных функций Φ_1, Φ_2 (удовлетворяющих условиям введения) соответствующую линейно независимую систему, обладающую подобными свойствами, можно построить таким же образом, если взять $\varepsilon < 1/(c \cdot s!)$, где

$$c = \frac{c^*}{c_*}, \quad c_* = \min_{|x|_\infty = 1} \min_{l=1,2} \Phi_l(x), \quad c^* = \max_{|x|_\infty = 1} \max_{l=1,2} \Phi_l(x),$$

и множества H_k при $k = 2, \ldots, s_1$ определить следующим образом:

$$H_k = \left\{ \gamma \in \Gamma \setminus \{0\} : \quad \begin{array}{ll} |\gamma_i| \leq \varepsilon |b_i^{(i)}| & \text{при } i < k, \\ \mathfrak{p}_2(\gamma) \leq c \cdot \mathfrak{p}_2(a) & \end{array} \right\}.$$

4. Дополнение локального минимума до базиса

Будем использовать следующие обозначения:

$$\mathfrak{p}_l(x) = \max_{i \in I_l} |x_i| \quad \text{ при } x \in \mathbb{R}^s, \;\; l \in \{1, \ldots, r\},$$

Также, как и в разделе 1, получаем, что существует постоянная $c_{\mathbf{\Phi}} \geq 1$ такая, что

$$c_{\mathbf{\Phi}}^{-1/2} \cdot \mathfrak{p}_l(x) \leq \Phi_l(x) \leq c_{\mathbf{\Phi}}^{1/2} \cdot \mathfrak{p}_l(x) \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^s, \;\; l \in \{1, \ldots, r\}.$$

Замечание 4.1. Если $\mathfrak{p}_l(x) \le c_{\mathbf{\Phi}}^{-1} \cdot \mathfrak{p}_l(y)$, то $\Phi_l(x) \le \Phi_l(y)$. Если $\Phi_l(x) \le c_{\mathbf{\Phi}}^{-1} \cdot \Phi_l(y)$, то $\mathfrak{p}_l(x) \le \mathfrak{p}_l(y)$. Поэтому, если $a \in \mathfrak{M}_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma)$, то не существует ненулевого узла $\gamma \in \Gamma$, удовлетворяющего неравенствам

$$\mathfrak{p}_l(\gamma) \le c_{\mathbf{\Phi}}^{-1} \cdot \mathfrak{p}_l(a), \;\; l \in J; \quad \Phi_l(\gamma) \le \Phi_l(a), \;\; l \notin J; \quad J \subset \{1, \ldots, r\},$$

хотя бы одно из которых является строгим.

Возьмем любую постоянную ε такую, что

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{s! \cdot c_{\mathbf{\Phi}}}.$$

Пусть $\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{R})$ и a — минимум из $\mathfrak{M}'_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma)$. Напомним, что $\mathfrak{M}'_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma)$ состоит из $a \in \mathfrak{M}_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma)$ с $\mathfrak{p}_l(a) \ne 0$, $l = \overline{1, r}$.

Построим набор номеров $n = (n_1, \ldots, n_s) \in \mathbb{N}^s \cap [1, s]^s$ и узлов $b^{(1)}, \ldots, b^{(s)} \in \Gamma \setminus \{0\}$ следующим образом.

1. Полагаем $b^{(1)} = a$; n_1 — любой номер из I_1 для которого $|a_{n_1}| = \mathfrak{p}_1(a)$.

2. Пусть $(b_1^{(1)}, \ldots, b^{(k-1)})$ и $(n_1, \ldots, n_{k-1})$ выбраны. Пусть $l \in \{1, \ldots, r\}$ — такой номер, что $k \in I_l$. Определим множество $H_k = H_k(\Gamma; b^{(1)}, \ldots, b^{(k-1)}; n_1, \ldots, n_{k-1})$ по формуле

$$H_k = \left\{ \gamma \in \Gamma \setminus \{0\} : \quad \begin{array}{ll} |\gamma_{n_i}| \le \varepsilon \cdot |b_{n_i}^{(i)}|, & i = \overline{1, k-1}; \\ \mathfrak{p}_j(\gamma) \le c_{\mathbf{\Phi}}^{-1} \cdot \mathfrak{p}_j(a), & j = \overline{l+1, r}. \end{array} \right\}$$

   Множество H_k не пусто (см. замечание 3.2). Узел $b^{(k)}$ выберем из следующих условий:

$$\begin{gathered} b^{(k)} \in H_k, \quad \mathfrak{p}_l\left(b^{(k)}\right) = \min_{\gamma \in H_k} \mathfrak{p}_l(\gamma), \\ \exists q \in I_l : \quad \mathfrak{p}_l(b^{(k)}) = b_q^{(k)}. \end{gathered} \tag{4.1}$$

   Положим $n_k = q$.

Таким образом построенную систему $b^{(1)}, \ldots, b^{(s)}$ будем называть $(\mathbf{\Phi}; n)$-*подходящей* (для пары (Γ, a)). Отметим, что подходящих систем может быть несколько.

Пусть $k-1$ и k принадлежат одному и тому же набору I_l, причем $k > 2$. Тогда $H_k \subset H_{k-1}$, и поэтому

$$\mathfrak{p}_l\left(b^{(k-1)}\right) \le \mathfrak{p}_l\left(b^{(k)}\right) \text{ при } (k-1), k \in I_l; \;\; k > 2. \tag{4.2}$$

Лемма 4.1. *Пусть $b^{(1)}, \ldots, b^{(s)}$ — $(\mathbf{\Phi}; n)$-подходящая система для минимума a. Тогда для любых $l \in \{1, \ldots, r\}$, $k \in I_l$*

$$\mathfrak{p}_l(a) < c_{\mathbf{\Phi}} \cdot \mathfrak{p}_l(b^{(k)}), \tag{4.3}$$

$$\mathfrak{p}_l(b^{(i)}) \le \mathfrak{p}_l(b^{(k)}), \quad i = \overline{2, k-1}, \tag{4.4}$$

$$\left(n_{s_{l-1}+1}, \ldots, n_{s_l}\right) \text{ — \textit{перестановка из} } I_l. \tag{4.5}$$

Доказательство. Докажем (4.3), используя индукцию по $k = 2, 3, \ldots$.

База индукции. Пусть $k = 2$. Рассмотрим отдельно два случая.

1. Пусть I_1 состоит более чем из одного номера, то есть $2 \in I_1$, $l = 1$. Тогда $\mathfrak{p}_j\left(b^{(2)}\right) \leq c_{\mathbf{\Phi}}^{-1} \cdot \mathfrak{p}_j(a)$ при $j \geq 2$ и, согласно замечанию 4.1, $\mathfrak{p}_1\left(b^{(2)}\right) > c_{\mathbf{\Phi}}^{-1} \cdot \mathfrak{p}_1(a)$.

2. Пусть $I_1 = \{1\}$. Тогда $l = 2$, $\Phi_1(b^{(2)}) < \Phi_1(a)$. Кроме того, $\mathfrak{p}_j\left(b^{(2)}\right) \leq c_{\mathbf{\Phi}}^{-1} \cdot \mathfrak{p}_j(a)$ ($j = \overline{3, r}$), и, используя замечание 4.1, получаем $\mathfrak{p}_2(a) < c_{\mathbf{\Phi}} \cdot \mathfrak{p}_2\left(b^{(2)}\right)$.

Индукционный переход от $(k-1)$ к k. Отдельно рассмотрим два случая.

1. Пусть $k = s_{l-1} + 1$ (т.е. набор I_l начинается с номера k). Так как $b^{(k)} \in H_k$, то $\mathfrak{p}_{l-1}\left(b^{(k)}\right) < \mathfrak{p}_{l-1}\left(b^{(k-1)}\right)$. Значит, $b^{(k)} \notin H_{k-1}$ (иначе возникает противоречие с выбором $b^{(k-1)}$), и поэтому $\mathfrak{p}_l\left(b^{(k)}\right) > c_{\mathbf{\Phi}}^{-1} \cdot \mathfrak{p}_l\left(a\right)$.

2. Пусть $k > s_{l-1} + 1$. Тогда нужное неравенство вытекает из (4.2) и предположения индукции. Неравенства (4.3) доказаны.

Оценки(4.4) вытекают из (4.2) при $i \in I_l$; и из (4.3), а также из условия $\mathfrak{p}_l(b^{(i)}) \leq c_{\mathbf{\Phi}}^{-1} \cdot \mathfrak{p}_l(a)$ при $i \notin I_l$.

Докажем (4.5). Достаточно показать, что

$$n_i \neq n_k \text{ при } i < k, \ \ i, k \in I_l. \tag{4.6}$$

Для этого заметим следующее

если $i = 1$, то, используя (4.3) и условие $b^{(k)} \in H_k$, получаем

$$\left|b_{n_1}^{(k)}\right| \leq \varepsilon \cdot |a_{n_1}| < c_{\mathbf{\Phi}}^{-1} \cdot |a_{n_1}| = c_{\mathbf{\Phi}}^{-1} \cdot \mathfrak{p}_1(a) < \mathfrak{p}_1\left(b^{(k)}\right) = b_{n_k}^{(k)};$$

если $i > 1$, то, учитывая (4.2) и условие $b^{(k)} \in H_k$, имеем

$$\left|b_{n_i}^{(k)}\right| \leq \varepsilon \cdot \left|b_{n_i}^{(i)}\right| < \mathfrak{p}_l\left(b^{(i)}\right) \leq \mathfrak{p}_l\left(b^{(k)}\right) = b_{n_k}^{(k)}.$$

Неравенства (4.6) доказаны. Лемма доказана. □

Если $k = (1, 2, \ldots, s)$, то $(\mathbf{\Phi}, k)$-подходящие системы называем $\mathbf{\Phi}$-*подходящими.*

Далее считаем, что минимум a можно дополнить до $\mathbf{\Phi}$-подходящей системы.

Пусть $b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(s)}$ — $\mathbf{\Phi}$-подходящая система для минимума a. Тогда для любых $k \in I_l$, $l \in \{1, \ldots, r\}$ справедливы неравенства

$$\left|b_i^{(k)}\right| \leq \varepsilon \cdot \left|b_i^{(i)}\right|, \quad i = \overline{1, k-1}, \tag{4.7}$$

$$\mathfrak{p}_j\left(b^{(k)}\right) \leq c_{\mathbf{\Phi}}^{-1} \cdot \mathfrak{p}_j\left(a\right), \quad j = \overline{l+1, r}, \tag{4.8}$$

$$b_k^{(k)} = \mathfrak{p}_l\left(b^{(k)}\right) = \min_{\gamma \in H_k} \mathfrak{p}_l(\gamma), \tag{4.9}$$

$$H_k = \left\{ \gamma \in \Gamma \setminus \{0\} : \quad \begin{array}{ll} |\gamma_i| \leq \varepsilon \cdot |b_i^{(i)}|, & i = \overline{1, k-1}, \\ \mathfrak{p}_j(\gamma) \leq c_{\mathbf{\Phi}} \cdot \mathfrak{p}_j(a), & j = \overline{l+1, r} \end{array} \right\}.$$

Лемма 4.2. *Пусть* $\left(b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(s)}\right)$ — $\mathbf{\Phi}$-*подходящая система для пары* (Γ, a). *Тогда* *а) система $b^{(1)},\dots,b^{(s)}$ линейно независимая;*

б) справедлива оценка

$$\left|\prod_{k=1}^{s} b_k^{(k)}\right| \le \frac{1}{\varepsilon^{s-1}}\cdot\det\Gamma. \tag{4.10}$$

Доказательство. Докажем утверждение а). Согласно (4.3), (4.4), (4.7)

$$\begin{aligned} &|b_i^{(1)}| \le c_{\mathbf{\Phi}}|b_i^{(i)}|, && i=\overline{1,s};\\ &\max_{2\le j<i}\left|b_i^{(j)}\right| \le \left|b_i^{(i)}\right|, && i=\overline{3,s};\\ &\max_{i<j\le s}\left|b_i^{(j)}\right| \le \varepsilon\left|b_i^{(i)}\right|, && i=\overline{1,s-1}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Поэтому

$$\left|\prod_{i=1}^{s} b_i^{(m_i)}\right| \le \varepsilon\cdot c_{\mathbf{\Phi}}\cdot\left|\prod_{i=1}^{s} b_i^{(i)}\right|$$

для любой нетождественной перестановки $(m_1,\dots,m_s)$ из $\{1,\dots,s\}$. Значит,

$$\left|\det(\!(b_i^{(j)})\!)\right| \ge \left|\prod_{i=1}^{s} b_i^{(i)}\right|\cdot\Big(1-(s!-1)\cdot\varepsilon\cdot c_{\mathbf{\Phi}}\Big) > \left|\prod_{i=1}^{s} b_i^{(i)}\right|\cdot\frac{1}{s!}. \tag{4.12}$$

Утверждение а) доказано.

Докажем (б). Если (4.10) не выполняется, то по теореме Минковского о линейных формах найдется ненулевой узел $\gamma\in\Gamma$ такой, что

$$|\gamma_i| \le \varepsilon\left|b_i^{(i)}\right|,\quad i=\overline{1,s-1};\quad |\gamma_s| < b_s^{(s)},$$

то есть $\gamma\in H_s$ и $|\gamma_s|<b_s^{(s)}$. Это противоречит выбору $b^{(s)}$. Утверждение б) доказано. □

Согласно замечанию 3.1 существует единственный базис $a^{(1)},\dots,a^{(s)}$ решетки Γ, удовлетворяющий (3.1), (3.2). Этот базис будем называть $\mathbf{\Phi}$-*подходящим* (для пары (Γ,a)). Определим матрицы $B=(\!(b_i^{(j)})\!)$, $A=(\!(a_i^{(j)})\!)$, $V=(\!(v_{ij})\!)$ (элементы V, лежащие ниже главной диагонали, считаем равными нулю). Тогда

$$B = A\cdot V. \tag{4.13}$$

Напомним, что

$$T_k(A)=\max\left\{\max_{1\le j\le s}\left|a_k^{(j)}\right|,\ \mathfrak{p}_l\left(a^{(k)}\right)\right\}\quad \text{при } k\in I_l,\ \ l\in\{1,\dots,r\}.$$

Следствие 4.1. *Пусть $(b^{(1)},\dots,b^{(s)})$ — $\mathbf{\Phi}$-подходящая система для пары (Γ,a); $(a^{(1)},\dots,a^{(s)})$ — $\mathbf{\Phi}$-подходящий базис, удовлетворяющий (3.1), (3.2). Тогда*

$$\prod_{i=1}^{s} v_{ii} \le C_1 = \frac{s!\cdot c_{\mathbf{\Phi}}}{\varepsilon^{s-1}}, \tag{4.14}$$

$$T_k(A) \le (2^{s-1}c_{\mathbf{\Phi}})\cdot|b_k^{(k)}|,\quad k=\overline{1,s}, \tag{4.15}$$

$$\prod_{k=1}^{s} T_k(A) \le C_2\cdot\det\Gamma,\quad C_2=\frac{2^{s(s-1)}\cdot c_{\mathbf{\Phi}}^{s}}{\varepsilon^{s-1}}. \tag{4.16}$$

Доказательство. Из (4.13), (4.10), (4.11) и из равенства $|\det A| = \det \Gamma$ вытекает

$$\prod_{i=1}^{s} v_{ii} = \det V = \frac{\det B}{\det A} \leq \frac{s! \cdot c_{\mathbf{\Phi}}}{\det \Gamma} \cdot \left| \prod_{i=1}^{s} b_i^{(i)} \right| \leq \frac{s! \cdot c_{\mathbf{\Phi}}}{\varepsilon^{s-1}} = C_1.$$

Используя (3.3), (4.11) и (4.9), получаем для любого $k \in \{1, \dots, s\}$

$$\max_{1 \leq j \leq s} \left| a_k^{(j)} \right| \leq \left| b_k^{(s)} \right| + 2^{s-2} \cdot \sum_{j=1}^{s-1} \frac{1}{2^j} \cdot \left| b_k^{(j)} \right| \leq c_{\mathbf{\Phi}} \cdot \left| b_k^{(k)} \right| \cdot \left(1 + 2^{s-2} \cdot \sum_{j=1}^{s-1} \frac{1}{2^j} \right).$$

$$\mathfrak{p}_l \left(a^{(k)} \right) \leq \mathfrak{p}_l \left(b^{(s)} \right) + 2^{s-2} \cdot \sum_{j=1}^{s-1} \frac{1}{2^j} \cdot \mathfrak{p}_l \left(b^{(j)} \right) \leq c_{\mathbf{\Phi}} \cdot \mathfrak{p}_l \left(b^{(k)} \right) \cdot \left(1 + 2^{s-2} \cdot \sum_{j=1}^{s-1} \frac{1}{2^j} \right).$$

Учитывая, что

$$1 + 2^{s-2} \cdot \sum_{j=1}^{s-1} \frac{1}{2^j} = 1 + (1 + 2 + \ldots + 2^{s-2}) = 2^{s-1},$$

получаем (4.15). Из (4.15) и (4.10) вытекает (4.16). □

Пусть $\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{R})$, $a \in \mathfrak{M}'_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma)$, причем существует $\mathbf{\Phi}$-подходящий базис $a^{(1)}, \dots, a^{(s)}$ для пары (Γ, a). Тогда матрицу $A = (\!(a_i^{(j)})\!)$ будем называть ***Φ**-подходящей матрицей* (для пары (Γ, a)).

Пусть множество $\Omega_{\mathbf{\Phi}}$ состоит из всех $\mathbf{\Phi}$-подходящих матриц для пар (Γ, a), где $a \in \mathcal{L}_s(\mathbb{R})$, $a \in \mathfrak{M}'_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma)$.

Справедливы следующие *свойства множества* $\Omega_{\mathbf{\Phi}}$.

1) Для всех $X \in \Omega_{\mathbf{\Phi}}$ справедлива оценка

$$\prod_{i=1}^{s} T_i(X) \underset{\mathbf{\Phi}}{\ll} |\det X|.$$

2) Множество $\Omega_{\mathbf{\Phi}}$ инвариантно относительного левого действия группы $\mathcal{D}_I(\mathbb{R}_+)$.

Первое свойство вытекает из (4.16), а второе — из определений множества $\Omega_{\mathbf{\Phi}}$, $\mathbf{\Phi}$-подходящей системы и локального $\mathbf{\Phi}$-минимума.

Свойство 2 можно усилить. Для этого нам потребуется следующий вспомогательный результат.

Лемма 4.3. *Пусть базис $\{a^{(j)}\}_{j=1}^{s}$ решетки Γ удовлетворяет неравенству (4.16). Пусть $C \in \mathbb{R}_+$, $A = (\!(a_i^{(j)})\!)$. Тогда, если $\gamma = k_1 a^{(1)} + \ldots + k_s a^{(s)}$ такой узел Γ, что*

$$|\gamma_i| \leq C \cdot T_i(A), \quad i = \overline{1, s}, \tag{4.17}$$

то $|k_j| \leq s! \cdot C \cdot C_3$, $j = \overline{1, s}$.

Доказательство. Согласно формулам Крамера $k_j = D_j / \det A$, где D_j — определитель матрицы, полученной из A заменой j-го столбца на γ. Используя (4.16), (4.17), получаем

$$|D_j| \leq s! \cdot C \cdot \prod_{i=1}^{s} T_i(A) \leq s! \cdot C \cdot C_3 \cdot \det \Gamma.$$

Значит, $|k_j| = |D_j| / |\det A| \leq s! \cdot C \cdot C_3 \cdot \det \Gamma / |\det A| = s! \cdot C \cdot C_3$. □

Если $X \in \mathrm{M}_s(\mathbb{R})$, $l \in \{1, \ldots, r\}$ то через $X(I_l)$ обозначаем матрицу составленную из строк X с номерами из I_l; Пусть $\mathrm{M}_{t,s}(\mathbb{R})$ — множество матриц размера $t \times s$ с вещественными элементами.

Лемма 4.4. *Множество $\Omega_{\mathbf{\Phi}}$ можно представить в виде*

$$\Omega_{\mathbf{\Phi}} = \{X \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{R}) : \quad X(I_l) \in V_{\mathbf{\Phi},l}, \;\; l = \overline{1,r}\}, \tag{4.18}$$

где каждое $V_{\mathbf{\Phi},l}$ является конусом в $\mathrm{M}_{t_l,s}(\mathbb{R})$ с кусочно-дифференцируемой границей.

Доказательство. Будем говорить, что множество $\Omega \subset \mathrm{M}_s(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию (*), если его можно представить в виде

$$\Omega = \{X \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{R}) : \quad X(I_l) \in V_l, \;\; l = \overline{1,r}\},$$

где каждое V_l является множеством (не обязательно конусом) в $\mathrm{M}_{t_l,s}(\mathbb{R})$ с кусочно-дифференцируемой границей.

Так как $\Omega_{\mathbf{\Phi}}$ инвариантно относительно левого действия группы $\mathcal{D}_I(\mathbb{R}_+)$, то нам достаточно доказать, что $\Omega_{\mathbf{\Phi}}$ удовлетворяет (*).

Возьмем любую $A = (\!(a_i^{(j)})\!) \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$ и определим решетку $\Gamma = \Gamma(A)$ с базисом $\{a^{(j)}\}_{j=1}^s$. Матрица A принадлежит $\Omega_{\mathbf{\Phi}}$, если и только, если выполняются следующие условия:

а) существует верхнетреугольная целочисленная матрица $V = (\!(v_{ij})\!)$, удовлетворяющая оценкам (3.2), (4.14) такая, что для системы векторов $\{b^{(j)}\}_{j=1}^s$, определенной формулами (3.1), в которых $v_{11} = 1$, выполняются оценки (4.7), (4.8), (4.11) и $b_k^{(k)} = \mathfrak{p}_l(b^{(k)})$ при $k \in I_l$, $l \in \{1, \ldots, r\}$;

б) среди систем $\{b^{(j)}\}_{j=1}^s$ из условия а) найдется хотя бы одна, удовлетворяющая (4.9);

в) вектор $a^{(1)}$ принадлежит $\mathfrak{M}'_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma)$.

Пусть Ω_1 состоит из матриц $A \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию а). Очевидно, что для Ω_1 выполняется условие (*), так как множество верхнетреугольных целочисленных матриц V, удовлетворяющих оценкам (3.2), (4.14), конечное. Кроме того, для любой $A \in \Omega_1$ выполняется оценка

$$\prod_{k=1}^{s} T_k(A) \underset{\mathbf{\Phi}}{\ll} |\det A|. \tag{4.19}$$

Для этого достаточно заметить следующее:

$$T_k(A) \le 2^{s-1} \cdot c_{\mathbf{\Phi}} \cdot |b_k^{(k)}| \quad \text{(доказывается так же, как и (4.15))};$$
$$|\det B| \ge \frac{1}{s!} \prod_{k=1}^{s} |b_k^{(k)}| \quad \text{(доказывается так же, как и (4.12))};$$
$$|\det B| = |\det A| \cdot \det V = |\det A| \cdot \prod_{i=1}^{s} v_{ii} \le C_1 \cdot |\det A|.$$

Возьмем любую матрицу $A = ((a_i^{(j)})) \in \Omega_1$. Пусть $\{b^{(j)}\}_{j=1}^s$ — любая система векторов из условия а). Используя лемму 4.3, мы видим, что любой узел $\gamma = n_1 a^{(1)} + \ldots + n_s a^{(s)}$, который может нарушать условие (4.9), удовлетворяет оценке: $|n_j| \underset{s,c_{\mathbf{\Phi}}}{\ll} 1$. Поэтому множество

$$\Omega_2 = \{A \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{R}) : \text{ выполняются а), б)}\}$$

удовлетворяет условию (*). Аналогичным образом доказывается, что множество

$$\Omega_{\mathbf{\Phi}} = \{A \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{R}) : \text{ выполняются а), б), в)}\}$$

также удовлетворяет (*). □

Замечание 4.2. Гладкость границы $\partial\Omega_{\mathbf{\Phi}}$ определяется функцией $\mathbf{\Phi}$. Если, например, $\mathbf{\Phi} \in C^n(\mathbb{R}^s)$, то $\partial\Omega_{\mathbf{\Phi}}$ состоит из фиксированного числа поверхностей класса C^n.

5. Среднее количество локальных минимумов

Рассмотрим отображение $\Psi : \mathrm{GL}_s(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}_s(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^s$, действующее по правилу: $\Psi(X) = (\Gamma(X), a(X))$, где

$\Gamma(X)$ — решетка с базисной матрицей X (столбцы X образуют базис $\Gamma(X)$);

$a(X) = (x_{11}, \ldots, x_{s1})$ — узел $\Gamma(X)$ (первый столбец X).

Определим множество пар «решетка-минимум» $U_{\mathbf{\Phi}}$, состоящее из (Γ, a), где $\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{R})$, $a \in \mathfrak{M}'_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma)$ и его подмножество $\mathcal{U}_{\mathbf{\Phi}}$, состоящее из $(\Gamma, a) \in U_{\mathbf{\Phi}}$ таких, что минимум a можно дополнить до $\mathbf{\Phi}$-подходящего базиса.

Справедливы следующие свойства.

1^0. *Оператор* Ψ *отображает* $\Omega_{\mathbf{\Phi}}$ *на все* $\mathcal{U}_{\mathbf{\Phi}}$ (вытекает из определения $\Omega_{\mathbf{\Phi}}$).

2^0. *Пусть* $X \in \Omega'_{\mathbf{\Phi}}$, *где* $\Omega'_{\mathbf{\Phi}}$ — *внутренность* $\Omega_{\mathbf{\Phi}}$. *Тогда узел* $a(X)$ *решетки* $\Gamma(X)$ *можно единственным образом дополнить до* $\mathbf{\Phi}$*-подходящей системы и нельзя дополнить до какой-то другой* $(\mathbf{\Phi}, n)$*-подходящей системы* (так как все неравенства для X, входящие в определение $\Omega_{\mathbf{\Phi}}$, будут строгими).

Рассмотрим теперь пары (Γ, a), принадлежащие $U_{\mathbf{\Phi}} \setminus \mathcal{U}_{\mathbf{\Phi}}$. Пусть $J(I)$ — множество наборов $n = (n_1, \ldots, n_s)$, удовлетворяющих (4.5). Для любого $n \in J(I)$ определим оператор ${}^{(n)}\cdot$, меняющий нумерацию координат у векторов и строк у матриц по правилу $(1, 2, \ldots, s) \to (n_1, n_2, \ldots, n_s)$. То есть

если $x = (x_1, \ldots, x_s) \in \mathbb{R}^s$, то ${}^{(n)}x = (x_{n_1}, \ldots, x_{n_s})$;

если $\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{R})$, то ${}^{(n)}\Gamma = \{{}^{(n)}\gamma : \gamma \in \Gamma\}$;

если $X \in \mathrm{M}_s(\mathbb{R})$, то ${}^{(n)}X$ — матрица, i-я строка которой совпадает с n_i-й строкой X, $i = \overline{1, s}$.

Из определений и утверждений 1^0, 2^0 вытекают следующие свойства.

3^0. *Пусть* ${}^{(n)}\mathcal{U}_{\mathbf{\Phi}} = \left\{\left({}^{(n)}\Gamma, {}^{(n)}a\right) : (\Gamma, a) \in \mathcal{U}_{\mathbf{\Phi}}\right\}$. *Тогда* $U_{\mathbf{\Phi}} = \bigcup\limits_{n\in J(I)} {}^{(n)}\mathcal{U}_{\mathbf{\Phi}}$.

Отметим, что множества ${}^{(n)}\mathcal{U}_{\mathbf{\Phi}}$ могут попарно пересекаться.

4^0. *Оператор* Ψ *отображает* ${}^{(n)}\Omega_{\mathbf{\Phi}}$ *на все* ${}^{(n)}\mathcal{U}_{\mathbf{\Phi}}$. *Если* $X \in {}^{(n)}\Omega'_{\mathbf{\Phi}}$, *то узел* $a(X)$ *решетки* $\Gamma(X)$ *можно единственным образом дополнить до* $(n, \mathbf{\Phi})$*-подходящей системы и нельзя дополнить до какой-то другой* $(\mathbf{\Phi}, k)$*-подходящей системы.*

Определим

$$\tilde{\Omega}_{\mathbf{\Phi}} = \bigcup_{n\in J(I)} {}^{(n)}\Omega'_{\mathbf{\Phi}} \text{ — объединение внутренностей всех } {}^{(n)}\Omega_{\mathbf{\Phi}},$$

$$\partial\tilde{\Omega}_{\mathbf{\Phi}} = \bigcup_{n\in J(I)} {}^{(n)}\partial\Omega_{\mathbf{\Phi}} \text{ — граница } \tilde{\Omega}_{\mathbf{\Phi}} \text{ (объединение границ всех } {}^{(n)}\Omega_{\mathbf{\Phi}}).$$

Тогда из утверждений 3^0, 4^0 вытекает следующее свойство.

5^0. *Оператор* Ψ *отображает замыкание* $\tilde{\Omega}_{\mathbf{\Phi}}$ *на все* $U_{\mathbf{\Phi}}$ *и взаимно однозначно отображает* $\tilde{\Omega}_{\mathbf{\Phi}}$ *на некоторую часть* $U_{\mathbf{\Phi}}$.

Применим последнее свойство к вычислению среднего количества локальных минимумов.

Пусть $\mathcal{L}^*$ — некоторое подмножество $\mathcal{L}_s(\mathbb{R})$. Определим

$\mathrm{M}^* = \{X \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{R}) : \Gamma(X) \in \mathcal{L}^*\}$ — множество всех возможных базисных матриц решеток из $\mathcal{L}^*$;

$\tilde{\Omega}^*_{\mathbf{\Phi}} = \mathrm{M}^* \cap \tilde{\Omega}_{\mathbf{\Phi}}$ — множество всех матриц из $\tilde{\Omega}_{\mathbf{\Phi}}$, которые порождают решетки из $\mathcal{L}^*$;

$\partial\tilde{\Omega}^*_{\mathbf{\Phi}} = \mathrm{M}^* \cap \partial\tilde{\Omega}_{\mathbf{\Phi}}$.

Теорема 5.1. *Пусть* $\mathcal{L}^*$ *— конечное подмножество* $\mathcal{L}_s(\mathbb{R})$, *причем любая решетка из* $\mathcal{L}^*$ *имеет фиксированное число локальных* $\mathbf{\Phi}$*-минимумов. Тогда справедливы оценки*

$$0 \le \sum_{\Gamma\in\mathcal{L}^*} \#\mathfrak{M}'_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma) - \#\tilde{\Omega}^*_{\mathbf{\Phi}} \le \#\partial\tilde{\Omega}^*_{\mathbf{\Phi}}.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\sum_{\Gamma\in\mathcal{L}^*} \#\mathfrak{M}'_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma) = \#U^*_{\mathbf{\Phi}},$$

где $U^*_{\mathbf{\Phi}} = \{(\Gamma, a) : \ \Gamma \in \mathcal{L}^*, \ a \in \mathfrak{M}'_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma)\}$.

Согласно свойству 5^0 оператор Ψ отображаем $\tilde{\Omega}^*_{\mathbf{\Phi}} \cup \partial\tilde{\Omega}^*_{\mathbf{\Phi}}$ на все $U^*_{\mathbf{\Phi}}$. Значит,

$$\#U^*_{\mathbf{\Phi}} \le \#\tilde{\Omega}^*_{\mathbf{\Phi}} + \#\partial\tilde{\Omega}^*_{\mathbf{\Phi}}.$$

Согласно этому же свойству оператор Ψ взаимно однозначно отображает $\tilde{\Omega}^*_{\mathbf{\Phi}}$ на некоторую часть $U^*_{\mathbf{\Phi}}$. Поэтому

$$\#\tilde{\Omega}^*_{\mathbf{\Phi}} \leq \#U^*_{\mathbf{\Phi}}.$$

Из трех последних соотношений вытекает утверждение теоремы. □

Пусть множество $\mathcal{L}^*$ инвариантно относительно любого изменения нумерации координат вида: $(1, 2, \ldots, s) \to n$, где $n \in J(I)$, то есть

$$\text{если } \Gamma \in \mathcal{L}^*,\ n \in J(I), \ \text{ то } {}^{(n)}\Gamma \in \mathcal{L}^*. \tag{5.1}$$

Следствие 5.1. *Пусть выполняются условия теоремы 5.1 и (5.1). Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{\Gamma \in \mathcal{L}^*} \#\mathfrak{M}'_{\mathbf{\Phi}}(\Gamma) = \left(\prod_{l=1}^{r} t_l!\right) \cdot \#\Omega^*_{\mathbf{\Phi}} + O_I(\#\partial\Omega^*_{\mathbf{\Phi}}),$$

где $\Omega^*_{\mathbf{\Phi}} = \mathrm{M}^* \cap \Omega_{\mathbf{\Phi}}$, $\partial\Omega^*_{\mathbf{\Phi}} = \mathrm{M}^* \cap \partial\Omega_{\mathbf{\Phi}}$.

Доказательство. Возьмем любое $n \in J(I)$. Из определения ${}^{(n)}\Omega_{\mathbf{\Phi}}$ и условия (5.1) следует, что отображение ${}^{(n)}\cdot$ осуществляет биекцию $\Omega^*_{\mathbf{\Phi}}$ на ${}^{(n)}\Omega^*_{\mathbf{\Phi}} = \mathrm{M}^* \cap {}^{(n)}\Omega_{\mathbf{\Phi}}$ и $\partial\Omega^*_{\mathbf{\Phi}}$ на ${}^{(n)}\partial\Omega^*_{\mathbf{\Phi}} = \mathrm{M}^* \cap {}^{(n)}\partial\Omega_{\mathbf{\Phi}}$. Значит,

$$\begin{aligned}
\#\tilde{\Omega}^*_{\mathbf{\Phi}} &= \sum_{n \in J(I)} \#\left({}^{(n)}\Omega^*_{\mathbf{\Phi}} \setminus {}^{(n)}\partial\Omega^*_{\mathbf{\Phi}}\right) = \#J(I) \cdot \#\Omega^*_{\mathbf{\Phi}} + O_I(\#\partial\Omega^*_{\mathbf{\Phi}}),\\
\#\partial\tilde{\Omega}^*_{\mathbf{\Phi}} &= \#J(I) \cdot \#\partial\Omega^*_{\mathbf{\Phi}} = O_I(\#\partial\Omega^*_{\mathbf{\Phi}}).
\end{aligned}$$

Осталось учесть, что $\#J(I) = t_1! \cdot \ldots \cdot t_r!$ и воспользоваться теоремой 5.1. □

Следствие 5.2. *Для любого $R \geq 2$ имеет место асимптотическая формула (0.1), в которой*

$$\mathcal{C}_{\mathbf{\Phi}} = \frac{\mu_I(\mathcal{P}_I(\Omega_{\mathbf{\Phi}}))}{\zeta(2) \cdot \ldots \cdot \zeta(s)} \cdot \frac{1}{(r-1)!} \cdot \prod_{l=1}^{r} (t_l - 1)!.$$

Доказательство. Применим следствие 5.1, в котором полагаем $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; [1, R])$. Нетрудно проверить (см, например, [11]), что

$$\mathcal{R}_s[1, R] = R^s \cdot \frac{\zeta(2) \cdot \ldots \cdot \zeta(s)}{s} + O_s(R^{s-1} \cdot \ln R).$$

Поэтому, учитывая оценку (1.12), получаем

$$\begin{aligned}
E_{\mathbf{\Phi}}[1, R] &= \frac{1}{\mathcal{R}_s[1, R]} \cdot \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_s(\mathbb{Z}; [1, R])} \#\mathfrak{M}'(\Gamma) + O_{\mathbf{\Phi}}(\ln^{r-2} R) = \\
&= \frac{t_1! \cdot \ldots \cdot t_r!}{\mathcal{R}_s[1, R]} \cdot \#\Omega_{\mathbf{\Phi}}(\mathbb{Z}; [1, R]) + O_{\mathbf{\Phi}}\left(\frac{\#\partial\Omega_{\mathbf{\Phi}}(\mathbb{Z}; [1, R])}{R^s} + \ln^{r-2} R\right),
\end{aligned}$$

где $\Omega_{\mathbf{\Phi}}(\mathbb{Z}; [1, R])$ $(\partial\Omega_{\mathbf{\Phi}}(\mathbb{Z}; [1, R]))$ — множество целочисленных матриц $M \in \Omega_{\mathbf{\Phi}}$ $(M \in \partial\Omega_{\mathbf{\Phi}})$ с $|\det M| \in [1, R]$.

Множество $\Omega_{\mathbf{\Phi}}$ удовлетворяет условиям А), Б), В). Поэтому согласно следствию 2.2

$$\#\Omega_{\mathbf{\Phi}}(\mathbb{Z};[1,R]) = \frac{1}{s\cdot t_1\cdot\ldots\cdot t_r}\cdot\frac{R^s}{(r-1)!}\cdot\Big(\mu_I(\mathcal{P}_I(\Omega_{\mathbf{\Phi}}))\cdot\ln^{r-1}R + O_{\Phi}(\ln^{r-2}R)\Big)$$
$$\#\partial\Omega_{\mathbf{\Phi}}(\mathbb{Z};[1,R]) = O_{\mathbf{\Phi}}\left(R^s\cdot\ln^{r-2}R\right).$$

Из приведенных соотношений вытекает требуемая формула. □

Список литературы

[1] П. М. Грубер, К. Г. Леккеркеркер, *Геометрия чисел*, Наука, М., 2008, 727 с.

[2] Г. Ф. Вороной, *Собрание сочинений в 3-х томах.* Т. 1, Изд-во АН УССР, Киев, 1952

[3] H. Minkowski, “Generalisation de la theorie des fraction continues”, *Ann. Sci. Ècole Norm. Sup.*, **13**:2 (1896), 41–60.

[4] A. J. Brentjes, *Multidimensional continued fraction algorithms*, Mathematical Centre Tracts, 145, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1981, 183 pp.

[5] J. Buchmann, M. Pohst, J. v. Schmettow, “On the computation of unit group and class groups of totally real quartic fields”, *Math. Comp.*, **53**:187 (1989), 387–397.

[6] В. А. Быковский, “О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул”, *Чебышевский сб.*, **3**:2 (2002), 27–33.

[7] В. А. Быковский, “О погрешности теоретико-числовых квадратурных формул”, *ДАН*, **382**:2 (2003), 154–155.

[8] В. А. Быковский, “Отклонения сеток Коробова”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76**:3 (2012), 19–38.

[9] А. А. Илларионов, “О цилиндрических минимумах трехмерных решеток”, *Дальневост. матем. журн.*, **11**:1 (2011), 37–47.

[10] А. А. Илларионов, “О цилиндрических минимумах целочисленных решеток”, *Алгебра и анализ*, **24**:2 (2012), 154–170.

[11] А. А. Илларионов, “Среднее количество относительных минимумов трехмерных целочисленных решеток”, *Алгебра и анализ*, **23**:3 (2011), 189–215.

[12] A. A. Illarionov, “On the Asymptotic Distribution of Integer Matrices”, *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory*, **1**:4 (2011), 301–345.

[13] Дж. В. Касселс, *Введение в геометрию чисел*, Мир, М., 1995

Представлено в Дальневосточный математический журнал 12 марта 2012 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-12004-офи-м-2011) и Президиума ДВО РАН (проект 12-III-B-01M-004)

Illarionov A. A. On Statistical Properties of Local Minima of Integer Lattices. Far Eastern Mathematical Journal. 2012. V. 12. № 2. P. 201–230.

ABSTRACT

The asymptotical formula for average number of local minima of integer multidimensional lattices is proved.

Key words: *lattice, local minimum, many-dimensional continued fraction.*