УДК 517.5
MSC2010 30A10, 30C10, 30C15

© С. И. Калмыков[1]

# Неравенства для модулей рациональных функций

В работе получены неравенства для модулей рациональных функций с предписанными полюсами, лежащими во внешности единичного круга. Рассмотрен также случай, когда рациональная функция не имеет нулей в единичном круге.

Ключевые слова: *неравенства для рациональных функций, произведение Бляшке, лемма Шварца.*

## Введение

Введем обозначения

$$\mathcal{P}_n^c := \left\{ p(z) : p(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k,\ c_k \in \mathbb{C},\, c_n \neq 0 \right\},$$

$$\mathcal{R}_{n,m}^c := \left\{ r(z) : r(z) = \frac{p(z)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(z-a_k)},\, p(z) \in \mathcal{P}_m^c, a_k \in \mathbb{C},\ |a_k| > 1, k = \overline{1,n} \right\}.$$

Для функции $r(z) \in \mathcal{R}_{n,m}^c$ определим функцию

$$B(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1-\overline{a}_k z}{z-a_k}$$

и положим

$$||f|| := \max_{|z|=1} |f(z)|,$$

$$r^*(z) = B(z)\overline{r\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)},$$

а для полинома $p(z) \in \mathcal{P}_n^c$ рассмотрим “взаимный” полином [3, с. 256]

$$p^*(z) = z^n \overline{p\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}.$$

Оценкам роста полиномов и рациональных функций посвящено большое количество работ (см., например, статьи [1]–[5], а также монографию [6, глава 12] и библиографию в них). Классическим является неравенство

[1]Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8; Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: sergeykalmykov@inbox.ru

$$\max_{|z|=\rho\geq 1}|p(z)|\leq \rho^n||p||,$$

справедливое для всех полиномов класса $\mathcal{P}_n^c$. Если также известно, что у полинома указанного класса нет нулей в единичном круге, то справедливо неравенство Анкени — Ривлина (см. [1])

$$\max_{|z|=\rho\geq 1}|p(z)|\leq \frac{\rho^n+1}{2}||p||.$$

Усиление этого неравенства было получено в работе [7].

Для функций $r(z)\in\mathcal{R}_{n,m}^c$ справедливо неравенство (см. [3], [8])

$$|r(z)|\leq |z|^{(m-n)_+}|B(z)|\,||r||,\ \ |z|>1, \tag{1}$$

где $x_+=\max(x,0)$. Равенство в (1) достигается при $r(z)=z^kB(z)$, $k\in\mathbb{N}_0$. Если у рациональной функции класса $\mathcal{R}_{n,m}^c$, $m\leq n$, нет нулей в единичном круге, то верно неравенство

$$|r(z)|\leq \frac{|B(z)|+1}{2}||r||,\ \ |z|>1, \tag{2}$$

с равенством для функции $r(z)=\alpha B(z)+\beta$, где $|\alpha|=|\beta|$ (см. [3]).

В недавней работе автора [9] были получены точные двусторонние неравенства при дополнительном ограничении на $|z|$, дополняющие и уточняющие неравенство (1). Цель настоящей заметки – усиление и дополнение результатов работ [3] и [9] без дополнительных ограничений на $|z|$. Нам понадобится следующая лемма 1, вытекающая из леммы Шварца (см. [10, стр. 320]). Другие приложения этого результата можно найти, например, в работах [7], [11].

**Лемма 1.** *Пусть $f(z)$ — аналитическая в единичном круге $|z|<1$ функция такая, что $|f(z)|<1$ при $|z|<1$. Тогда при $|z|<1$*

$$|f(z)|\leq \frac{|z|+|f(0)|}{1+|f(0)||z|}, \tag{3}$$

*причем при $z\neq 0$ равенство в (3) будет достигаться только в том случае, когда $f(z)=\varepsilon\dfrac{z+a}{1+\overline{a}z}$, $|\varepsilon|=1$, $|a|<1$, и $\arg z=\arg a$, если $a\neq 0$.*

## Основные результаты

**Теорема 1.** *Пусть рациональная функция $r(z)$ принадлежит классу $\mathcal{R}_{n,m}^c$ и $||r||=1$. Тогда справедливо неравенство*

$$|r(z)|\leq \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}|a_k|+|c_m z|}{|c_m|+|z|\prod\limits_{k=1}^{n}|a_k|}|B(z)||z|^{m-n},\ \ |z|>1. \tag{4}$$

*Если $r(z)=z^kB(z)$, $k\in\mathbb{N}_0$, то неравенство (4) становится равенством для любого $z$, $|z|>1$.*

*Доказательство.* Рассмотрим функцию

$$f(\zeta)=\zeta^{m-n}\overline{r\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right)}B(\zeta)=\frac{\overline{c_m}}{(-1)^n\prod\limits_{k=1}^{n}a_k}+\ldots.$$

Она аналитическая в единичном круге, так как полюса функции $\overline{r(1/\overline{\zeta})}$ являются нулями функции $\zeta^{m-n}B(\zeta)$ с учетом кратности. Тогда из того, что

$$|f(\zeta)|=|\zeta^{m-n}|\left|\overline{r\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right)}\right||B(\zeta)|=\left|\overline{r\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right)}\right|\le 1,\ \ |z|=1,$$

следует, что $f(z)$ ограничена по модулю единицей в единичном круге и, таким образом, удовлетворяет условиям леммы 1, при этом $f(0)=(-1)^n\overline{c_m}/\left(\prod\limits_{k=1}^{n}a_k\right)$.

Выпишем неравенство (3) для функции $f(\zeta)$

$$|\zeta^{m-n}\overline{r\left(\frac{1}{\overline{\zeta}}\right)}B(\zeta)|\le\frac{|\zeta|+|c_m|/\left(\prod\limits_{k=1}^{n}|a_k|\right)}{1+|\zeta||c_m|/\left(\prod\limits_{k=1}^{n}|a_k|\right)},\ \ |\zeta|<1.$$

Делая замену переменной $z=1/\overline{\zeta}$, приходим к неравенству

$$|\overline{r(z)}B(1/\overline{z})|\le|z^{m-n}|\frac{1+|z||c_m|/\left(\prod\limits_{k=1}^{n}|a_k|\right)}{|z|+|c_m|/\left(\prod\limits_{k=1}^{n}|a_k|\right)},\ \ |z|>1,$$

а замечая, что $\overline{B(1/\overline{z})}=1/B(z)$, получаем неравенство (4).

Пусть теперь $r(z)=z^kB(z)$, $k\in\mathbb{N}_0$, тогда ясно, что $m-n=k$, а $|c_m|=\prod\limits_{k=1}^{n}|a_k|$, и равенство в (4) очевидно. Теорема доказана. □

Из принципа максимума модуля и убывания при $x\ge 1$ функции $h(x)=\dfrac{1+ax}{a+x}$, $0<a<1$, получаем, что

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}|a_k|+|c_mz|}{|c_m|+|z|\prod\limits_{k=1}^{n}|a_k|}\le 1,\ \ \text{для всех } z \text{ таких, что } |z|>1.$$

Таким образом, неравенство (4) улучшает неравенство (1).

**Следствие 1.** *Пусть полином $p(z)$ принадлежит классу $\mathcal{P}_n^c$ и $||p||=1$, тогда выполняется неравенство*

$$|p(z)|\le\frac{1+|c_nz|}{|c_n|+|z|}|z|^n,\ \ |z|>1.$$

*Равенство для любой точки $z:|z|>1$ достигается в случае полинома $P(z)=c_nz^n$, $|c_n|=1$.*

**Следствие 2.** *Пусть рациональная функция $r(z)$ принадлежит классу $\mathcal{R}_{n,m}^c$ и $||r|| = 1$. Тогда для $|z| > 1$ справедливо неравенство*

$$|r^*(z)| \leq \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} |a_k| + |c_0 z|}{|c_0| + |z| \prod\limits_{k=1}^{n} |a_k|} |B(z)|.$$

*Доказательство.* Из того, что $r(z) \in \mathcal{R}_{n,m}^c$, следует

$$r(z) = \frac{p(z)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (z - a_k)}.$$

Тогда

$$\frac{r^*(z)}{z^{n-m}} = z^{m-n} B(z) \overline{r\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \frac{p^*(z)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (z - a_k)},$$

то есть функция $r^*(z)/z^{n-m}$ принадлежит классу $\mathcal{R}_{n,m}^c$. Так как $||r^*|| = ||r|| = 1$, то к $r^*(z)/z^{n-m}$ применима теорема 1. Следствие доказано. □

**Лемма 2.** *Пусть $r(z) \in \mathcal{R}_{n,m}^c$. Если функция $r(z)$ не имеет нулей в единичном круге $|z| < 1$, то*

$$|z^{n-m} r(z)| \leq |r^*(z)|, \ \ |z| > 1. \tag{5}$$

*Для функции $r(z) = \alpha B(z) + \beta$, где $|\alpha| = |\beta|$, справедливо равенство в (5).*

*Доказательство.* Так как функция $r$ не имеет нулей в единичном круге, то рациональная функция

$$\frac{r^*(z)}{z^{n-m}} = z^{m-n} B(z) \overline{r\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \frac{p^*(z)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (z - a_k)}$$

имеет конечные нули только в замкнутом единичном круге. Следовательно, функция $z^{n-m} r(z)/r^*(z)$ аналитическая в $|z| \geq 1$. На единичной окружности $|z| = 1$

$$\left| \frac{z^{n-m} r(z)}{r^*(z)} \right| = \left| \frac{p(z)}{p^*(z)} \right| = 1.$$

Из принципа максимума модуля следует

$$\frac{|z^{n-m} r(z)|}{|r^*(z)|} \leq 1, \ \ |z| \geq 1,$$

что эквивалентно неравенству (5). Случай равенства проверяется непосредственно. Лемма доказана. □

Из следствия 2 и леммы 2 вытекает теорема.

**Теорема 2.** *Пусть рациональная функция $r(z)$ принадлежит классу $\mathcal{R}_{n,m}^c$, не имеет нулей в отрытом единичном круге, и $||r|| = 1$. Тогда справедливо неравенство*

$$|r(z)| \leq \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} |a_k| + |c_0 z|}{|c_0| + |z| \prod\limits_{k=1}^{n} |a_k|} |B(z)| |z|^{m-n}, \ \ |z| > 1. \tag{6}$$

Неравенство (6) в условиях предыдущего следствия, как и неравенство (4), улучшает неравенство (1). Следующая теорема уточняет неравенство (2).

**Теорема 3.** *Пусть рациональная функция $r(z)$, не имеющая нулей в отрытом единичном круге, принадлежит классу $\mathcal{R}^c_{n,m}$, $m \le n$. Тогда для $z : |z| > 1$ справедливо неравенство*

$$|r(z)| \le \frac{|B(z)|+1}{|z|^{n-m}+1}||r||.$$

*Равенство достигается для функции $r(z) = \alpha B(z) + \beta$, где $|\alpha| = |\beta|$.*

*Доказательство* немедленно следует из леммы 2 и следующего утверждения.

**Лемма 3.** [3] *Пусть рациональная функция $r(z)$ принадлежит классу $\mathcal{R}^c_{n,m}$, $m \le n$ и $||r|| = 1$. Тогда для $z : |z| > 1$ справедливо неравенство*

$$|r(z)| + |r^*(z)| \le (|B(z)| + 1)\,.$$

## Список литературы


[1] N. C. Ankeny, T. J. Rivlin, "On a theorem of S. Bernstein", *Pacific J. Math.*, **5**:suppl. 2 (1955), 849–852.

[2] А. А. Гончар, "Оценки роста рациональных функций и некоторые их приложения", *Матем. сб.*, **72(114)**:3 (1967), 489–503.

[3] N. K. Govil, R. N. Mohapatra, "Inequalities for Maximum Modulus of Ratioanl Functions with Prescribed Poles", *Approximation Theory: In Memory of A. K. Varma*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1998, 255–263.

[4] M. A. Qazi, "On the maximum modulus of polynomials", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **115**:2 (1992), 337–349.

[5] W. M. Shah, A. Liman, "Integral estimates for the family of B-operators", *Operators and matrices*, **5**:1 (2011), 79–87.

[6] Q. I. Rahman, G. Schmeisser, *Analytic theory of polynomials*, Oxford University Press, Oxford, 2002.

[7] В. Н. Дубинин, "О применении леммы Шварца к неравенствам для целых функций с ограничениями на нули", *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **337** (2006), 101–112.

[8] А. А. Гончар, "О задачах Е. И. Золотарева, связанных с рациональными функциями", *Матем. сб.*, **78(120)**:4 (1969), 640–654.

[9] С. И. Калмыков, "Об оценке модуля рациональной функции", *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **371** (2009), 109–116.

[10] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М, 1966.

[11] N. K. Govil, Q. I. Rahman, G. Schmeisser, "On the derivative of a polynomial", *Illinois Journal of Mathematics*, **23** (1979), 319–329.



Представлено в Дальневосточный математический журнал 12 марта 2012 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 11-01-00038)

*Kalmykov S. I.* Inequalities for Modulus of Rational Functions. Far Eastern Mathematical Journal. 2012. V. 12. № 2. P. 231–236.

ABSTRACT

Inequalities for modulus of rational functions with prescribed poles lying in the exterior of the unit disk were obtained in this research. The case when the rational function has no zeros in the unit disk has also been considered.
Key words: *inequalities for rational functions, Blaschke product, Schwarz lemma.*