

© С. Ф. Пятаев<sup>1</sup>

## Структурное моделирование критерия прочности периодических композитов при сложном температурно-силовом нагружении

В работе на основе структурного подхода разработана модель построения критерия прочности двоякопериодического однонаправленного композиционного материала (КМ) при сложном температурно-силовом нагружении. С использованием предложенной модели проведено исследование влияния температуры на прочностные свойства КМ. Выполнены условия осреднения микронапряжений по объему периодических элементов и условия непрерывности перемещений на границах раздела между ними.

Ключевые слова: *критерий прочности, температура, композиционный материал.*

### 1. Введение

Одним из наиболее распространенных классов композиционных материалов являются однонаправленные волокнистые КМ, обладающие высокой жесткостью и прочностью в направлении волокон и низкой в поперечном направлении. Для повышения характеристик материала в направлениях силового нагружения, не совпадающих с направлением волокон, линейно-армированные слои склеиваются под определенными углами, что приводит к слоистым КМ, свойства которых уже достаточно высоки в направлениях приложенных нагрузок.

Поскольку КМ являются гетерогенными структурами, то их механические характеристики можно изучать на основе моделей механики сплошных сред в случае, если градиент прилагаемых внешних нагрузок на расстояниях порядка масштаба неоднородности  $\delta$  столь незначителен, что им можно пренебречь. В волокнистых КМ под  $\delta$  подразумевается диаметр волокон или расстояние между ними, в дисперсноупрочненных – средний размер зерен. В этих условиях объем  $V$ , характерный размер которого сравним с  $\delta$ , содержащий одно или несколько включений, можно рассматривать как сплошное однородное тело  $V_o$ . Такие объемы называют представительными элементами. Внешние нагрузки на гетерогенную среду вызывают в ней микронапряжения  $\sigma_{ij}$ . В случае малости градиента внешних воздействий можно ввести понятие макронапряжений (средних напряжений)  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  [1, 2]

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV. \quad (1)$$

В ряде случаев КМ подвергается температурному воздействию  $\Delta T = T - T_0$ . Тепловое расширение фаз КМ является дополнительным источником внутренних напряжений, так как коэффициенты линейного расширения у волокна и матрицы различны.

<sup>1</sup>Институт вычислительного моделирования СО РАН, 660036, г. Красноярск, Академгородок, 50/44. Электронная почта: psf@icm.krasn.ru

Без ограничения общности упругой симметрии составляющих композиционный материал фаз можно полагать, что для каждой фазы КМ справедливо квадратичное условие прочности

$$p_{ijkl}^{(n)} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + f_{ij}^{(n)} \sigma_{ij} + q^{(n)} \leq 0, \quad n = 1, 2; \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad (2)$$

где  $p_{ijkl}^{(n)}$ ,  $f_{ij}^{(n)}$  – компоненты симметричных тензоров 4-го и 2-го рангов при квадратичной и линейной частях ( $p_{ijkl}^{(n)} = p_{jikl}^{(n)} = p_{ijlk}^{(n)} = p_{klij}^{(n)}$ ,  $f_{ij}^{(n)} = f_{ji}^{(n)}$ ), константы  $q^{(n)}$  зависят от прочностных характеристик на растяжение и сжатие;  $n = 1$  соответствует материалу матрицы (связующего),  $n = 2$  – волокна (наполнителя). Детализация компонент тензоров и констант зависит от конкретного условия прочности. По достижении равенства полагается, что напряжения  $\sigma_{ij}$  вышли на поверхность прочности и начинается процесс разрушения.

Таким образом, под критическими микронапряжениями, порождающими начало разрушения, подразумеваются такие  $\sigma_{ij}$ , при которых хотя бы одно из соотношений (2) обращается в равенство. Зная эти напряжения, с помощью (1) можно вычислить критические макронапряжения  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  и тем самым построить в пространстве макронапряжений поверхность прочности.

Другой, противоположный, подход к построению поверхности прочности КМ состоит в определении каким-либо образом через (1) микронапряжений  $\sigma_{ij}$  по известным макронапряжениям  $\langle \sigma_{ij} \rangle$ . Задавая определенный закон изменения  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  (например, однопараметрический), можно определить критические микронапряжения. Тогда макронапряжения, инициирующие эти критические микронапряжения, будут являться критическими в пространстве макронапряжений.

Целями данной работы являются: 1) построение критерия прочности при сложном температурно-силовом нагружении однонаправленного КМ на основе анализа критических микронапряжений с выполнением условий осреднения; 2) численное исследование влияния температуры на прочностные свойства КМ. Предполагается, что составляющие фазы однородны и изотропны, адгезия между ними идеальна.

## 2. Постановка задачи

В качестве представительного элемента КМ выбирается произвольный неоднородный параллелепипед  $V$  длины  $2l$ , основанием которого является параллелограмм (рис. 1). Внутри по центру расположен круговой цилиндр  $V_p$ , моделирующий волокно; область  $V_m = V \setminus V_p$  заполнена матрицей. Такой элемент обеспечивает периодичность структуры КМ по двум направлениям в трансверсальной плоскости.

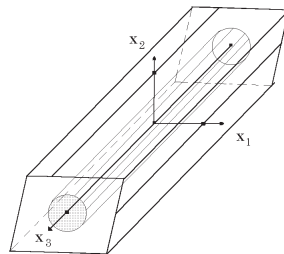


Рис. 1. Представительный элемент  $V$  однонаправленного КМ.

Пусть в однородном теле  $V_0$ , соответствующем  $V$ , реализуется плоское однородное макронапряженное состояние  $\langle \sigma_{ij} \rangle \neq 0$ ,  $i, j = 1, 2$ . Случай, когда действует только напряжение  $\langle \sigma_{33} \rangle$ , ниже рассматривается отдельно. Зададим на границах  $V$  следующий вид краевых

условий:

$$\begin{aligned} u_i \Big|_{\Gamma} &= u_i^{\Gamma}(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3; \\ \vec{p}_i &= \vec{p} \Big|_{S_i} = (0, 0, (-1)^i \sigma_{33}^S(x_1, x_2)), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\Gamma$  – боковая поверхность элемента  $V$ ;  $S_1, S_2$  – торцы при  $x_3 = -l$  и  $x_3 = l$  соответственно; векторы  $p_1, p_2$  противоположны по знаку, так как  $\sigma_{33}^S$  – функция, одна и та же для  $S_1$  и  $S_2$ .

Осуществляется предварительный (до начала деформирования внешними усилиями) нагрев или охлаждение тела разностью температур  $\Delta T = T - T_0$ , зависящей в общем случае от координат  $x_1$  и  $x_2$ , при этом при температуре  $T_0$  в теле отсутствуют напряжения и деформации.

Функции, входящие в краевые условия (3), неизвестны, и их нужно подобрать так, чтобы микронапряжения  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), порождаемые этими краевыми условиями и температурой  $\Delta T$ , не зависели от  $x_3$  и удовлетворяли условиям (1), которые можно свести к плоским интегралам

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{S} \int_S \sigma_{ij} dS \neq 0, \quad i, j = 1, 2; \quad \int_S \sigma_{i3} dS = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4)$$

где  $S$  – произвольное торцевое сечение представительного элемента  $V$ .

Покажем, что при определенном подборе краевых условий и требовании независимости микронапряженно-деформированного состояния (МНДС) от  $x_3$  смещение  $u_3$  не зависит от  $x_1, x_2$  и линейно относительно  $x_3$ , деформация  $\varepsilon_{33}$  постоянна, микронапряжения  $\sigma_{13}, \sigma_{23}$  равны нулю.

Перемещения  $u_1, u_2$  должны иметь вид  $u_1 = u_1(x_1, x_2)$ ,  $u_2 = u_2(x_1, x_2)$ , иначе  $\varepsilon_{11}$  и  $\varepsilon_{22}$  будут являться функциями  $x_3$ . Из независимости МНДС от  $x_3$  следует

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{33,3} = 0 &\Rightarrow u''_{3,33} = 0 \Rightarrow u_3 = v_3(x_1, x_2)x_3; \\ (i = 1, 2): \quad \varepsilon'_{i3,3} = 0 &\Rightarrow u''_{i,33} + u''_{3,i3} = 0 \Rightarrow u''_{3,i3} = 0 \Rightarrow v'_{3,i} = 0 \Rightarrow v_3 = \text{const}, \end{aligned}$$

где символ  $'$  обозначает производную по соответствующей переменной; тогда  $\varepsilon_{33} = v_3$ , то есть  $u_3 = \varepsilon_{33}x_3$ . Учитывая вид зависимости перемещений от координат, получаем

$$(i = 1, 2): \quad 2\varepsilon_{i3} = u'_{i,3} + u'_{3,i} = u'_{3,i} = 0 \Rightarrow \sigma_{i3} = 0.$$

Тогда для реализации введенных требований  $u_i^{\Gamma}$  и  $\sigma_{33}^S$  в (3) должны удовлетворять соотношениям

$$u_i^{\Gamma} = u_i^{\Gamma}(x_1, x_2), \quad i = 1, 2; \quad u_3^{\Gamma} = \varepsilon_{33}x_3; \quad \int_S \sigma_{33}^S dS = 0,$$

при этом очевидно, что  $\sigma_{33} = \sigma_{33}^S$ .

При изменении температуры и действии механических нагрузок связь между напряжениями и деформациями для изотропного упругого тела описывается законом Дюамеля – Неймана

$$\vec{\sigma} = \vec{\varepsilon}D - K\alpha\Delta T\vec{e}.$$

Здесь  $\vec{\sigma} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{33})$  – вектор микронапряжений;  $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12}, \varepsilon_{33})$  – вектор деформаций;  $\alpha$  – коэффициент линейного расширения;  $\vec{e} = (1, 1, 0, 1)$  – вектор, отвечающий за изменение микронапряжений  $\vec{\sigma}$  от действия разности температур  $\Delta T$ ;  $D$  – тензор жесткости, записанный в соответствии с порядком следования компонент векторов  $\vec{\varepsilon}$  и  $\vec{\sigma}$ . Компоненты тензора  $D$  и коэффициент  $\alpha$  являются кусочно-постоянными функциями координат  $x_1$  и  $x_2$ , при этом упругие характеристики фаз дополнительно зависят и от температуры, то есть модуль Юнга  $E = E(T, x_1, x_2)$ , коэффициент Пуассона  $\nu = \nu(T, x_1, x_2)$ , объемный модуль упругости  $K = E/(1 - 2\nu)$ .

### 3. Решение задачи

При введенных краевых условиях функционал Лагранжа для элемента  $V$  в общем виде можно записать так

$$L = \frac{1}{2} \int_V (\vec{\varepsilon} D - K \alpha \Delta T \vec{e}) \vec{\varepsilon}^* dV - \int_{S_1} \vec{u} \vec{p}_1^* dS - \int_{S_2} \vec{u} \vec{p}_2^* dS. \quad (5)$$

Здесь  $\vec{u} = (u_1, u_2, \varepsilon_{33} x_3)$  – вектор перемещений; символ  $*$  обозначает транспонирование вектор-строки. В функционале (5) интегралы по торцам  $S_1$  и  $S_2$  можно переписать в виде

$$\int_S \varepsilon_{33} l \sigma_{33}^S dS.$$

С учетом соотношений  $\varepsilon_{33} = \text{const}$  и  $\langle \sigma_{33}^S \rangle = 0$  этот интеграл равен нулю; таким образом, в  $L$  остается только объемный интеграл, который сводится с точностью до положительного множителя к

$$L = \int_S (\vec{\varepsilon} D - K \alpha \Delta T \vec{e}) \vec{\varepsilon}^* dS.$$

Перепишем  $L$  в виде

$$\begin{aligned} L = \int_S & \left[ (\lambda + 2G)(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2) + 2\lambda\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + 4G\varepsilon_{12}^2 + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\varepsilon_{33} + \right. \\ & \left. + (\lambda + 2G)\varepsilon_{33}^2 + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\varepsilon_{33} \right] dS - \int_S K\alpha(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\Delta T dS, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\lambda, G$  – постоянные Ламе. Полученный функционал можно упростить, избавившись от квадрата деформации  $\varepsilon_{33}$ . Из закона Дюамеля – Неймана для  $\sigma_{33}$

$$\sigma_{33} = \lambda\varepsilon + 2G\varepsilon_{33} - K\alpha\Delta T = (\lambda + 2G)\varepsilon_{33} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) - K\alpha\Delta T, \quad (7)$$

после умножения этого соотношения на  $\varepsilon_{33}$  с последующим интегрированием по  $S$  следует

$$\int_S \left[ (\lambda + 2G)\varepsilon_{33}^2 + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})\varepsilon_{33} \right] dS = \varepsilon_{33} \int_S K\alpha\Delta T dS.$$

Тогда  $L$  преобразуется к виду

$$\begin{aligned} L = \int_S & \left[ (\lambda + 2G)(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2) + 2\lambda\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + 4G\varepsilon_{12}^2 \right] dS + \\ & + \varepsilon_{33} \int_S \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) dS - \int_S K\alpha\Delta T(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) dS. \end{aligned} \quad (8)$$

Для исключения из функционала (8) деформации  $\varepsilon_{33}$  выразим ее через  $\varepsilon_{11}$  и  $\varepsilon_{22}$ . Интегрируя закон (7), получим

$$\varepsilon_{33} \int_S (\lambda + 2G) dS + \int_S \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) dS - \int_S K\alpha\Delta T dS = 0. \quad (9)$$

Так как жесткостные характеристики являются кусочно-постоянными функциями на  $S$ , то

$$\langle \lambda + 2G \rangle = \frac{1}{S} \int_S (\lambda + 2G) dS = (\lambda_m + 2G_m)c_m + (\lambda_p + 2G_p)c_p,$$

где  $c_m, \lambda_m, G_m, c_p, \lambda_p, G_p$  – объемные концентрации и постоянные Ламе матрицы и волокна соответственно. Тогда из (9) определяется  $\varepsilon_{33}$ :

$$\varepsilon_{33} = -\frac{1}{S \langle \lambda + 2G \rangle} \left[ \int_S \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) dS - \int_S K\alpha\Delta T dS \right]. \quad (10)$$

Подстановка (10) в (8) приводит функционал  $L$  к виду, в котором присутствуют только  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$  и  $\varepsilon_{12}$ :

$$L = L_q + L_l, \quad (11)$$

где  $L_q = L_{q1} - L_{q2}$  – квадратичная часть функционала  $L$ ,  $L_l$  – линейная:

$$\begin{aligned} L_{q1} &= \int_S \left[ (\lambda + 2G)(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2) + 2\lambda\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + 4G\varepsilon_{12}^2 \right] dS, \\ L_{q2} &= \frac{1}{S \langle \lambda + 2G \rangle} \left[ \int_S \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) dS \right]^2, \\ L_l &= \frac{1}{S \langle \lambda + 2G \rangle} \int_S K\alpha\Delta T dS \int_S \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) dS - \int_S K\alpha\Delta T(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) dS. \end{aligned}$$

В работе [4] доказано, что квадратичная часть  $L_q$  функционала  $L$  в пространстве обобщенных функций  $\overset{\circ}{W}_2^{(1)}$  является положительно определенной, следовательно, существует единственный элемент  $\vec{u}_0 \in \overset{\circ}{W}_2^{(1)}$ , доставляющий минимум функционалу  $L_q$ .

При решении задачи минимизации функционала (11) методом конечных элементов (МКЭ) функционал  $L_{q2}$  порождает полностью заполненную глобальную матрицу жесткости. Во избежание этого преобразуем  $L_{q2}$ . Поскольку

$$\int_S \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) dS = \lambda_m \int_{S_m} \operatorname{div} \vec{u} dS + \lambda_p \int_{S_p} \operatorname{div} \vec{u} dS,$$

где  $S_m, S_p$  – области, занимаемые материалами матрицы и волокна соответственно,  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  – вектор перемещений, то по формуле Гаусса – Остроградского эти два интеграла переписываются в виде

$$\int_{S_p} \operatorname{div} \vec{u} dS = \int_{\partial S_p} \vec{u} \vec{n}_p^* d\gamma, \quad \int_{S_m} \operatorname{div} \vec{u} dS = \int_{\partial S_m} \vec{u} \vec{n}_m^* d\gamma - \int_{\partial S_p} \vec{u} \vec{n}_p^* d\gamma.$$

Здесь  $\vec{n}_m$  – внешняя нормаль к внешней границе  $\partial S_m$  области  $S_m$ ;  $\vec{n}_p$  – внешняя нормаль к границе  $\partial S_p$  области  $S_p$ . Обозначим

$$J_m = \int_{\partial S_m} \vec{u} \vec{n}_m^* d\gamma, \quad J_p = \int_{\partial S_p} \vec{u} \vec{n}_p^* d\gamma.$$

Тогда функционалы  $L_{q2}$  и  $L_l$  принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} L_{q2} &= \frac{1}{S \langle \lambda + 2G \rangle} \left[ (\lambda_p - \lambda_m)J_p + \lambda_m J_m \right]^2, \\ L_l &= \frac{1}{S \langle \lambda + 2G \rangle} \left[ (\lambda_p - \lambda_m)J_p + \lambda_m J_m \right] \int_S K\alpha\Delta T dS - \int_S K\alpha\Delta T(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) dS. \end{aligned} \quad (12)$$

В случае постоянства температуры в пределах каждой фазы одного представительного элемента  $V$  линейный функционал  $L_l$  можно упростить

$$L_l = q_p J_p + q_m J_m , \quad (13)$$

где

$$q_p = q(\lambda_p - \lambda_m) + K_m \alpha_m \Delta T_m - K_p \alpha_p \Delta T_p , \quad q_m = q \lambda_m - K_m \alpha_m \Delta T_m ,$$

$$q = \frac{K_m \alpha_m \Delta T_m c_m + K_p \alpha_p \Delta T_p c_p}{\langle \lambda + 2G \rangle} ,$$

величины  $\alpha_m, \alpha_p, \Delta T_m, \Delta T_p$  – коэффициенты линейного расширения и приращение температуры для матрицы и волокна соответственно, при этом можно принять во внимание предложенное в [3] условие постоянства  $\Delta T$  на всем представительном элементе  $V$ .

Таким образом, для поиска микронапряжений в области  $S$  будем использовать функционал  $L$  с представлением  $L_{q2}$  в виде (12) и  $L_l$  в виде (12) или (13), а так же условия осреднения микронапряжений (4).

При использовании МКЭ вариация функционала  $L_{q2}$  приводит к глобальной матрице жесткости, которая уже не является полностью заполненной. Каждый узел  $\vec{x} \in \partial S_p$  порождает 2 уравнения с  $2(n_p + n_m)$  ненулевыми коэффициентами, где  $n_p$  и  $n_m$  – количество узлов на  $\partial S_p$  и  $\partial S_m$  соответственно. Однако часть слагаемых этих уравнений содержит известные узловые перемещения, поскольку в узлах, расположенных на  $\partial S_m$ , они заданы. Тогда при переносе известных величин в правую часть количество ненулевых коэффициентов каждого уравнения уменьшается до  $2n_p$ . Таким образом, только блок глобальной матрицы жесткости, соответствующий  $L_{q2}$ , оказывается полностью заполненным и имеет размеры  $2n_p \times 2n_p$ .

Для получения алгебраической системы уравнений по определению неизвестных узловых перемещений осуществим вариацию функционала  $L$

$$\delta L = \delta \vec{U} A \vec{U}^* - \delta \vec{U}_p \beta_p \vec{a}_p \otimes \vec{a}_p \vec{U}_p^* + \delta \vec{U}_m [0.5 q_p \vec{a}_p^* - \beta_m \vec{a}_p \otimes \vec{a}_m \vec{U}_m^*] = 0 , \quad (14)$$

где

$$\beta_p = \frac{(\lambda_p - \lambda_m)^2}{2S \langle \lambda + 2G \rangle} , \quad \beta_m = \frac{\lambda_m (\lambda_p - \lambda_m)}{2S \langle \lambda + 2G \rangle} ;$$

$A$  – глобальная матрица жесткости, следующая из вариации функционала  $L_{q1}$ ;  $\vec{U}$  – глобальный вектор узловых перемещений; символ  $\otimes$  обозначает диадное произведение векторов;  $\vec{U}_p, \vec{U}_m$  – векторы узловых перемещений соответственно на  $\partial S_p$  и  $\partial S_m$  с компонентами

$$(\vec{U}_p)_{2i-1} = u_1(\vec{x}_{k_i}) , \quad (\vec{U}_p)_{2i} = u_2(\vec{x}_{k_i}) , \quad k_i - \text{номера узлов на } \partial S_p , \quad i = 1, \dots, n_p ,$$

$$(\vec{U}_m)_{2j-1} = u_1(\vec{x}_{l_j}) , \quad (\vec{U}_m)_{2j} = u_2(\vec{x}_{l_j}) , \quad l_j - \text{номера узлов на } \partial S_m , \quad j = 1, \dots, n_m ;$$

координаты векторов  $\vec{a}_p, \vec{a}_m$  вычисляются через координаты узлов на  $\partial S_p$  и  $\partial S_m$  по однотипным формулам (пусть  $n$  – число узлов на соответствующей границе  $\gamma$ ;  $k_i$  – номера узлов на  $\gamma$ ;  $(x_{k_i}, y_{k_i})$  – координаты этих узлов,  $i = 1, \dots, n$ )

$$(\vec{a}_\gamma)_1 = y_{k_2} - y_{k_n} , \quad (\vec{a}_\gamma)_2 = x_{k_n} - x_{k_2} , \quad (\vec{a}_\gamma)_{2n-1} = y_{k_1} - y_{k_{n-1}} , \quad (\vec{a}_\gamma)_{2n} = x_{k_{n-1}} - x_{k_1} ;$$

$$(\vec{a}_\gamma)_{2i-1} = y_{k_{i+1}} - y_{k_{i-1}} , \quad (\vec{a}_\gamma)_{2i} = x_{k_{i-1}} - x_{k_{i+1}} , \quad i = 2, \dots, n-1 .$$

Если принять во внимание различную размерность матриц  $A$  и  $\vec{a}_p \otimes \vec{a}_p$  и векторов  $\vec{U}, \vec{U}_p, \vec{U}_m$ , из вариационного уравнения (14) следует алгебраическая система, которую можно записать в виде

$$G \vec{U}^* = \vec{F}^* .$$

Для вычисления компонент глобальной матрицы жесткости  $G = (g_{ij})$  и глобального вектора правой части  $\vec{F} = (F_i)$  введем следующие обозначения:

- $\vec{x}_{k_n} \in \partial S_p$  – узлы, лежащие на границе волокна, ( $k_n$  – номера узлов,  $n = 1, 2, \dots, n_p$ );
- $\vec{x}_{k_l}, \vec{x}_{k_m} \in \partial S_p$  – узлы, инцидентные фиксированному узлу  $\vec{x}_{k_n}$ , ( $l, m \in \{1, 2, \dots, n_p\}$ );
- $(\vec{a}_p)_i = a_i$  – компоненты вектора  $\vec{a}_p$ , ( $i = 1, 2, \dots, 2n_p$ );
- $(A)_{ij} = a_{ij}$  – компоненты матрицы  $A$ , ( $i, j = 1, 2, \dots, 2N_S$ ,  $N_S$  – общее количество узлов в области  $S$ ).

Тогда компоненты матрицы  $G$  и вектора  $F$ , порожденные вариацией узловых перемещений на  $\partial S_p$ , вычисляются по формулам:

для  $i = n, l, m$

$$g_{2k_n-1, 2k_l-1} = a_{2k_n-1, 2k_l-1} - \beta_p a_{2n-1} a_{2i-1}, \quad g_{2k_n-1, 2k_m} = a_{2k_n-1, 2k_m} - \beta_p a_{2n-1} a_{2i},$$

$$g_{2k_n, 2k_l-1} = a_{2k_n, 2k_l-1} - \beta_p a_{2n} a_{2i-1}, \quad g_{2k_n, 2k_m} = a_{2k_n, 2k_m} - \beta_p a_{2n} a_{2i},$$

для  $i = 1, 2, \dots, n_p$ ,  $i \neq n, l, m$

$$g_{2k_n-1, 2k_l-1} = -\beta_p a_{2n-1} a_{2i-1}, \quad g_{2k_n-1, 2k_m} = -\beta_p a_{2n-1} a_{2i},$$

$$g_{2k_n, 2k_l-1} = -\beta_p a_{2n} a_{2i-1}, \quad g_{2k_n, 2k_m} = -\beta_p a_{2n} a_{2i},$$

для  $i = 1, 2, \dots, n_p$

$$F_{2k_l-1} = f_p a_{2i-1}, \quad F_{2k_m} = f_p a_{2i}, \quad f_p = -0.5 q_p + \beta_m \vec{a}_m \vec{U}_m^* .$$

Остальные компоненты матрицы  $G$  совпадают с компонентами матрицы  $A$ . Учет известных узловых перемещений на  $\partial S_m$  осуществляется стандартными способами.

Зададим на границе  $\partial S_m$  краевые, а в теле  $V$  температурные условия в виде

$$u_1 \Big|_{\partial S_m} = c_1 x_1 + c_3 x_2, \quad u_2 \Big|_{\partial S_m} = c_2 x_2, \quad \Delta T \neq 0, \quad (15)$$

где  $c_1, c_2, c_3$  – пока произвольные постоянные. Линейность перемещений на  $\partial S_m$  обосновывается тем, что в достаточно широком классе симметрий КМ (орторомбическая, тетрагональная, гексагональная и изотропная системы) [2, 3] при действии однородных макронапряжений  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  ( $i, j = 1, 2$ ) перемещения в трансверсальной плоскости с точностью до трансляции и вращения тела как жесткого целого будут  $u_1 = \langle \varepsilon_{11} \rangle x_1 + 2 \langle \varepsilon_{12} \rangle x_2$ ,  $u_2 = \langle \varepsilon_{22} \rangle x_2$ .

Для подбора констант  $c_i$  в (15) так, чтобы решение упругой задачи удовлетворяло условиям осреднения (4), разобьем эту задачу на 4 задачи со следующими краевыми и температурными условиями:

$$\begin{aligned} \text{задача 1:} \quad & u_1 \Big|_{\partial S_m} = x_1, \quad u_2 \Big|_{\partial S_m} = 0, \quad \Delta T = 0, \\ \text{задача 2:} \quad & u_1 \Big|_{\partial S_m} = 0, \quad u_2 \Big|_{\partial S_m} = x_2, \quad \Delta T = 0, \\ \text{задача 3:} \quad & u_1 \Big|_{\partial S_m} = x_2, \quad u_2 \Big|_{\partial S_m} = 0, \quad \Delta T = 0, \\ \text{задача 4:} \quad & u_1 \Big|_{\partial S_m} = 0, \quad u_2 \Big|_{\partial S_m} = 0, \quad \Delta T \neq 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Обозначим через  $\sigma_{ij}^{(k)}$  микронапряжения  $k$ -той упругой задачи ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) и воспользуемся тем, что линейная комбинация решений

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 c_k \sigma_{ij}^{(k)} + \sigma_{ij}^{(4)}, \quad i, j = 1, 2; \quad \sigma_{33} = \sum_{k=1}^3 c_k \sigma_{33}^{(k)} + \sigma_{33}^{(4)} \quad (17)$$

будет решением задачи (15). Интегрируя эти соотношения по области  $S$  и используя условия (4), получим систему трех алгебраических уравнений для определения констант  $c_k$

$$\sum_{k=1}^3 c_k \langle \sigma_{ij}^{(k)} \rangle = \langle \sigma_{ij} \rangle - \langle \sigma_{ij}^{(4)} \rangle, \quad i, j = 1, 2. \quad (18)$$

Отметим, что условие осреднения для  $\sigma_{33}$  выполнено, так как функционал  $L$  был построен так, что  $\langle \sigma_{33}^{(k)} \rangle = 0$ , ( $k = 1, \dots, 4$ ). После решения этой системы линейная комбинация (17) может быть представлена в виде

$$\vec{\sigma} = \left( \langle \vec{\sigma} \rangle - \langle \vec{\sigma}^{(4)} \rangle \right) \Sigma_1^{-1} \Sigma_2 + \vec{\sigma}^{(4)}, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{33}), & \langle \vec{\sigma} \rangle &= (\langle \sigma_{11} \rangle, \langle \sigma_{22} \rangle, \langle \sigma_{12} \rangle), \\ \vec{\sigma}^{(4)} &= (\sigma_{11}^{(4)}, \sigma_{22}^{(4)}, 0, \sigma_{33}^{(4)}), & \langle \vec{\sigma}^{(4)} \rangle &= \left( \langle \sigma_{11}^{(4)} \rangle, \langle \sigma_{22}^{(4)} \rangle, 0 \right), \\ \Sigma_1 &= \begin{bmatrix} \langle \sigma_{11}^{(1)} \rangle & \langle \sigma_{22}^{(1)} \rangle & \langle \sigma_{12}^{(1)} \rangle \\ \langle \sigma_{11}^{(2)} \rangle & \langle \sigma_{22}^{(2)} \rangle & \langle \sigma_{12}^{(2)} \rangle \\ \langle \sigma_{11}^{(3)} \rangle & \langle \sigma_{22}^{(3)} \rangle & \langle \sigma_{12}^{(3)} \rangle \end{bmatrix}, & \Sigma_2 &= \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{(1)} & \sigma_{22}^{(1)} & \sigma_{12}^{(1)} & \sigma_{33}^{(1)} \\ \sigma_{11}^{(2)} & \sigma_{22}^{(2)} & \sigma_{12}^{(2)} & \sigma_{33}^{(2)} \\ \sigma_{11}^{(3)} & \sigma_{22}^{(3)} & \sigma_{12}^{(3)} & \sigma_{33}^{(3)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Полученная зависимость (19) выражает вектор микронапряжений  $\vec{\sigma}$  через макронапряжения  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  и вычисленные из 4-х упругих задач микронапряжения  $\langle \sigma_{ij}^{(k)} \rangle$ .

Для введения в соотношение (19) осевого макронапряжения необходимо решить упругую задачу, в которой рассматривается только  $\langle \sigma_{33} \rangle$  при  $\Delta T = 0$ . В работе [5] показано, что при этих условиях все микронапряжения и деформации много меньше постоянного в пределах каждой фазы напряжения  $\sigma_{33}$  и постоянной деформации  $\varepsilon_{33}$ . Кроме того,  $\sigma_{33}$  связано с  $\langle \sigma_{33} \rangle$  правилом смеси, и с большой степенью точности выполняется соотношение  $\sigma_{33}(\vec{x}) = E(\vec{x})\varepsilon_{33}$ , после интегрирования которого по области  $S$  и применения правила смеси получим

$$\sigma_{33}(\vec{x}) = \frac{E(\vec{x})}{\langle E \rangle} \langle \sigma_{33} \rangle, \quad \text{где} \quad \langle E \rangle = c_m E_m + c_p E_p. \quad (20)$$

После сложения решения (20) с решением (19) определяется связь микронапряжений  $\vec{\sigma}$  с макронапряжениями  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  ( $i, j = 1, 2$ ),  $\langle \sigma_{33} \rangle$ , которую можно записать в матричном виде

$$\vec{\sigma} = \left( \langle \vec{\sigma} \rangle - \langle \vec{\sigma}^{(4)} \rangle \right) M + \vec{\sigma}^{(4)}, \quad (21)$$

если к векторам  $\langle \vec{\sigma} \rangle$  и  $\langle \vec{\sigma}^{(4)} \rangle$  добавить четвертую компоненту, а к матрице  $\Sigma_1^{-1} \Sigma_2$ , имеющей размеры  $3 \times 4$ , – четвертую строку

$$\begin{aligned} \langle \vec{\sigma} \rangle &= (\langle \sigma_{11} \rangle, \langle \sigma_{22} \rangle, \langle \sigma_{12} \rangle, \langle \sigma_{33} \rangle), & \langle \vec{\sigma}^{(4)} \rangle &= \left( \langle \sigma_{11}^{(4)} \rangle, \langle \sigma_{22}^{(4)} \rangle, 0, 0 \right), \\ M &= \begin{bmatrix} \Sigma_1^{-1} \Sigma_2 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{E(\vec{x})}{\langle E \rangle} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Для построения в пространстве напряжений  $\langle \sigma_{ii} \rangle$  ( $i = 1, 2, 3$ ) поверхности прочности зададим однопараметрический закон нагружения  $\langle \vec{\sigma} \rangle = t \vec{k}$ , где  $t$  – параметр нагружения,  $\vec{k}$  – направление нагружения, например, в сферической системе координат, связанной с исходной (исключая сдвиговое напряжение  $\langle \sigma_{12} \rangle$ ),

$$\vec{k} = (\cos \varphi \cos \psi, \sin \varphi \cos \psi, 0, \sin \psi), \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad \psi \in [-\pi/2, \pi/2].$$



Тогда соотношение (21) переписывается через параметр нагружения  $t$

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_1 t + \vec{\sigma}_0, \quad \text{где } \vec{\sigma}_1 = \vec{k}M, \quad \vec{\sigma}_0 = -\langle \vec{\sigma}^{(4)} \rangle M + \vec{\sigma}^{(4)}. \quad (22)$$

Преобразуем условия прочности (2), записывая тензоры  $p_{ijkl}^{(n)}$  в виде матрицы  $P$ , а  $f_{ij}^{(n)}$  – в виде вектора  $\vec{f}$ , полагая при этом, что  $P$  и  $\vec{f}$  зависят от  $\vec{x} \in S$ . Аналогичным образом константы  $q^{(n)}$  можно записать как кусочно-постоянную функцию  $q$ . Тогда условия (2) приводятся к виду

$$(\vec{\sigma}P, \vec{\sigma}) + (\vec{\sigma}, \vec{f}) + q \leq 0, \quad P \geq 0, \quad q < 0, \quad (23)$$

где  $(*, *)$  обозначает скалярное произведение.

Обозначим через  $\mathfrak{D}$  дискретное покрытие области  $S$ , через  $\epsilon$  – конечные элементы. Дискретизация должна удовлетворять условию: каждый конечный элемент расположен или в  $S_p$ , или в  $S_m$ , и микронапряжения на нем постоянны. В этом случае  $P$  и  $\vec{f}$  можно рассматривать как функции от конечных элементов, то есть областью определения этих функций становится  $\mathfrak{D}$ . Если подставить в условие (23) закон нагружения (22), то разрушение конечного элемента  $\epsilon$  из  $\mathfrak{D}$  определяем корнями  $t_1, t_2$ ,  $t_1 \leq t_2$  (если они существуют) квадратного уравнения

$$(\vec{\sigma}_1 P, \vec{\sigma}_1) t^2 + (2\vec{\sigma}_0 P + \vec{f}, \vec{\sigma}_1) t + (\vec{\sigma}_0 P + \vec{f}, \vec{\sigma}_0) + q = 0. \quad (24)$$

После вычисления для каждого конечного элемента  $\epsilon$  значений  $t_1, t_2$ , при которых  $\epsilon$  выходит на стадию разрушения, из этих значений выбирается максимальное  $t_1^*$  и минимальное  $t_2^*$

$$t_1^* = \max_{\epsilon \in \mathfrak{D}} t_1, \quad t_2^* = \min_{\epsilon \in \mathfrak{D}} t_2,$$

которые и будут являться критическими для всего композиционного материала в направлении  $\vec{k}$ , при этом критические макронапряжения определяются как  $\langle \vec{\sigma} \rangle_i = t_i^* \vec{k}$ ,  $i = 1, 2$ . Нагружение в направлении  $-\vec{k}$  рассматривать не нужно, так как в этом случае получим противоположные по знаку критические значения параметра нагружения и, естественно, те же самые критические значения макронапряжений  $\langle \vec{\sigma} \rangle_i = -t_i^* (-\vec{k})$ . Изменяя вектор  $\vec{k}$  в полупространстве макронапряжений, можно установить критерий прочности КМ.

В случае отсутствия корней, что равносильно выполнению условия  $(\vec{\sigma}_0 P + \vec{f}, \vec{\sigma}_0) + q > 0$  хотя бы на одном конечном элементе, необходимо осуществить сдвиг напряжений в точку  $\langle \vec{\sigma}_c \rangle$ , для которой это условие нарушено на всех конечных элементах. Для композитов, относящихся к классам симметрии, в которых коэффициенты  $C_{ijkl}$  эффективных тензоров жесткости удовлетворяют соотношению  $C_{11ij} = C_{22ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), эту точку можно определить через вектор нагружения  $\vec{k}_* = (1, 1, 0, k_4)$  заданием значения  $k_4$  так, что корни  $t_1^*$  и  $t_2^*$  существуют. Тогда  $\langle \vec{\sigma}_c \rangle = 0.5(t_1^* + t_2^*)\vec{k}_*$  и закон нагружения принимает вид  $\langle \vec{\sigma} \rangle = t\vec{k} + \langle \vec{\sigma}_c \rangle$ .

При численных расчетах трансверсальная плоскость рассматривалась как изотропная, поэтому в качестве области  $S$  был выбран ромб с углом в  $60^\circ$ . Рассматривался композиционный материал Al6061 - В при объемной концентрации волокон  $c_p = 0.3$ . Составляющие фазы имели следующие характеристики:  $E_m = 72$  ГПа,  $E_p = 422$  ГПа;  $\nu_m = 0.3$ ,  $\nu_p = 0.2$ ;  $\sigma_m = 70$  МПа,  $\sigma_p = 3.5$  ГПа – пределы прочности алюминия и бора соответственно. Коэффициенты линейного расширения матрицы и волокна  $\alpha_m^0, \alpha_m^1, \alpha_p^0, \alpha_p^1$  при температурах  $T_0$  и  $T_1$  имеют значения:

$$\begin{aligned} T_0 = 20^\circ \text{C} : \quad & \alpha_m^0 = 23.2 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}, \quad \alpha_p^0 = 0.414 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}, \\ T_1 = 200^\circ \text{C} : \quad & \alpha_m^1 = 25 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}, \quad \alpha_p^1 = 0.538 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}, \end{aligned}$$

их зависимость от температуры предполагалась линейной. Из-за отсутствия дополнительных данных в качестве условия прочности для каждой фазы выбиралось условие Мизеса.

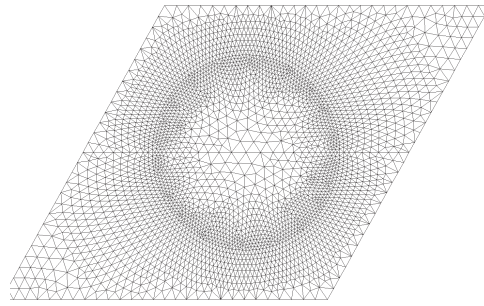


Рис. 2. Результат дискретизации области  $S$ .

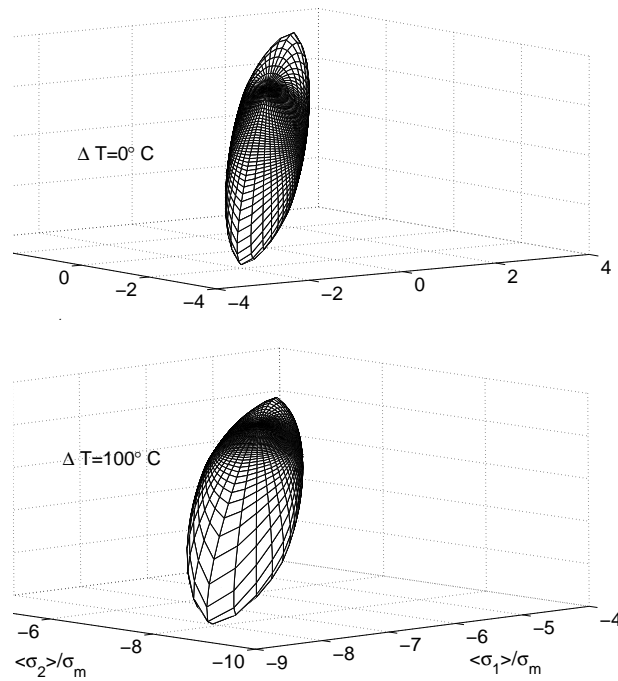


Рис. 3. Поверхности прочности  $P_0$ ,  $P_{100}$ .

Область  $S$  была разбита на 6504 треугольных элемента и 3313 узлов с помощью алгоритма, разработанного в [6]. Результаты дискретизации представлены на рис. 2.

Расчеты при различных значениях температуры  $T = T_0 + \Delta T$  показали, что поверхности прочности  $P_{\Delta T}$  почти не изменяются по форме и близки к эллипсоидам, симметричным относительно плоскости  $\langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle$ . При изменении  $\Delta T$  поверхности  $P_{\Delta T}$  возникают как результат трансляции вдоль плоскости  $\langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle$  поверхности  $P_0$  с незначительными деформациями. На рис. 3 приведены поверхности  $P_0$  и  $P_{100}$  при  $\Delta T = 0^\circ \text{C}$  и  $\Delta T = 100^\circ \text{C}$  соответственно (здесь и далее на рисунках второй индекс у  $\langle \sigma_{ii} \rangle$  не приводится).

На рис. 4(a) изображены сечения поверхности  $P_0$  плоскостями  $\langle \sigma_{33} \rangle / \sigma_m = 0, 1, 2, 3, 3.5, 3.9$ , показывающие их близость к эллипсам. Сечения поверхностей  $P_0, P_{50}, P_{100}, P_{180}$  плоскостью  $\langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle$  представлены на рис. 4(b), который наглядно демонстрирует перенос поверхности  $P_0$ .

При  $\Delta T = 0^\circ \text{C}$  проведено сравнение полученных расчетных значений прочности  $\sigma_{com(i)}^{num}$  ( $i = 1, 3$  – нагружение композита осуществляется поперек и вдоль волокон) с экспериментальными и теоретическими данными при одноосных нагружениях. При нагружении вдоль

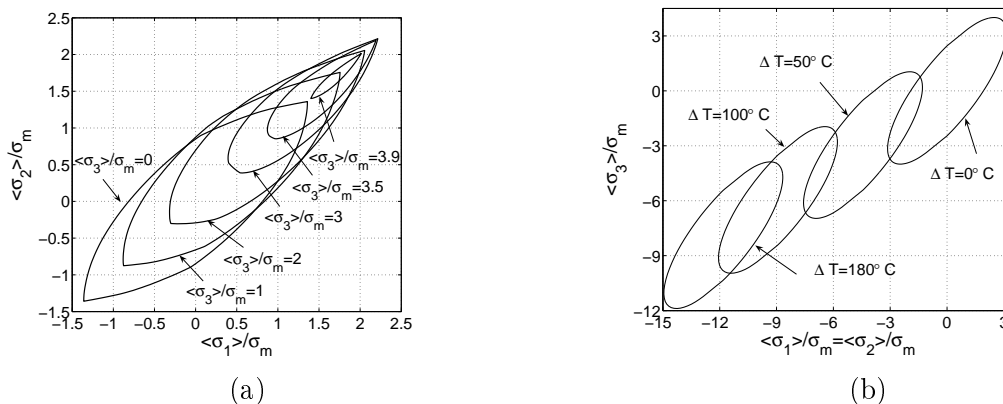


Рис. 4. а) Сечения поверхности прочности  $P_0$  плоскостями  $\langle \sigma_{33} \rangle = \text{const}$ .  
 б) Сечения поверхностей прочности  $P_0, P_{50}, P_{100}, P_{180}$  плоскостью  $\langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle$ .

волокон расчетный предел прочности  $\sigma_{com(3)}^{num}$  близок к значению, вычисленному по известной формуле [7]

$$\frac{\sigma_{com(3)}}{\sigma_m} = 1 - c_p + c_p \frac{E_p}{E_m}. \quad (25)$$

В расчетах  $\sigma_{com(3)}^{num} / \sigma_m = 2.41$ , вычисленная по формуле (25) величина  $\sigma_{com(3)} / \sigma_m = 2.46$ . При нагружении поперек волокон экспериментальное значение  $\sigma_{com(1)} / \sigma_m \approx 0.85$  [8], расчетное значение  $\sigma_{com(1)}^{num} / \sigma_m = 0.813$ . Отклонение расчетных данных от экспериментальных в сторону уменьшения объясняется тем, что построенная модель описывает зарождение разрушения, а экспериментальные данные отражают полное разрушение композитной системы.

## 4. Заключение

Предложенная модель построения критерия прочности, основанная на определении критических микро- и макронапряжений, позволяет избежать неоднозначности, присущей феноменологическому подходу, при котором осуществляется аналитическая аппроксимация экспериментальных данных при одноосных растяжениях и сдвиге. Кроме того, структурный подход определяет область зарождения процесса разрушения и предоставляет возможность отслеживания дальнейшего развития этого процесса. При одноосных нагружениях установлено приемлемое совпадение полученных расчетных данных с экспериментальными и известными теоретическими.

Проведенные численные расчеты показали, что влияние температуры на формоизменение поверхности прочности незначительно, по крайней мере при заданных расчетных значениях параметров, следовательно, формоизменением поверхности можно пренебречь и учитывать только трансляцию поверхности вдоль плоскости  $\langle \sigma_{11} \rangle = \langle \sigma_{22} \rangle$ .

## Список литературы

- [1] Р. Кристенсен, *Введение в механику композитов*, Мир, М., 1982, 334 с.
- [2] Т. Д. Шермергор, *Теория упругости микронеоднородных сред*, Наука, М., 1977, 400 с.
- [3] Г. А. Ванин, *Микромеханика композиционных материалов*, Наукова думка, Киев, 1985, 304 с.
- [4] Ю. В. Немировский, С. Ф. Пятаев, "Поверхность текучести двоякопериодического волокнистого композиционного материала", *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, **2:4** (2009), 470–483.

- [5] Ю. В. Немировский, С. Ф. Пятаев, “Определение предельного упругого сопротивления композитов при сложном напряженном состоянии”, *Проблемы прочности и пластичности*, Межвуз. сб., Н.-НГУ, Нижний Новгород, 2000, 5–18.
- [6] Ю. В. Немировский, С. Ф. Пятаев, “Автоматизированная триангуляция многосвязных областей со сгущением и разрежением узлов”, *Вычислительные технологии*, 5:2 (2000), 82–91.
- [7] Т. Фудзии, М. Дзако, *Механика разрушения композиционных материалов*, Мир, М., 1982, 232 с.
- [8] Л. Дж. Эберт, П. Л. Райт, “Механические аспекты поверхности раздела”, *Поверхности раздела в металлических композитах*. Т. 1, ред. А. Меткалф, Мир, М., 1978, 42–76.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 17 октября 2011 г.

---

*Pyataev S. F.* Structure Modeling of the Strength Criterion of Periodic Composites Under the Complex Temperature-Force Loading. Far Eastern Mathematical Journal. 2012. V. 12. № 2. P. 262–273.

#### ABSTRACT

The model of the strength criterion of doubly periodic unidirectional composites (CM) under the complex temperature-force loading is worked out on the base of structural approach. The investigation of the effect of temperature on the strength properties of CM is analyzed using the suggested model. The condition of averaging of microstresses on the volume of representative elements and the condition of continuity of displacements at the interfaces between them are fulfilled.

Key words: *strength criterion, temperature, composite material.*