Дальневосточный математический журнал. 2013. Том 13. № 1. С. 03–14

УДК 517.97, 539.376
MSC2010 74C20

© К. С. Бормотин[1]

Единственность квазистатических задач формообразования в ползучести

В данной работе дается общая постановка прямых и обратных задач формообразования в виде квазистатического деформирования с учетом как бесконечно малых деформаций, так и геометрической нелинейности. Используя такие постановки, автор доказывает единственность задач формообразования при достаточных условиях единственности краевых задач.

Ключевые слова: *задачи формообразования в ползучести, вариационные принципы, квазистатическое деформирование, единственность.*

Введение

В промышленности при изготовлении деталей преимущественно используется обработка материалов давлением в режиме пластического деформирования и в медленных высокотемпературных режимах. При моделировании таких процессов изготовления деталей можно определить две основные задачи:

— задачу формообразования (прямую) – задачу определения остаточного деформированного состояния после неупругого деформирования в течение заданного времени под действием заданных внешних силовых и кинематических воздействий и последующей упругой разгрузки;

— обратную задачу формообразования: она определяет внешние силовые и кинематические воздействия, под действием которых в течение заданного времени должно происходить неупругое деформирование, обеспечивающее заданную остаточную конфигурацию после упругой разгрузки.

В данной работе в качестве неупругого деформирования рассматривается деформирование в условиях ползучести, при котором напряжения не превышают предела текучести. Такие задачи формообразования сформулированы в [1, 2].

Решение обратных задач, как известно, в общем случае не единственно. Единственность частных задач формообразования в ползучести для бесконечно малых

[1]Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, 681013, Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27. Электронная почта: cvmi@knastu.ru

деформаций была рассмотрена в форме уравнения виртуальных работ [2], в котором одна из входящих величин была скоростью. Основой в доказательстве был учет постулата устойчивости в теории ползучести. При некоторых ограничениях доказана и единственность при больших перемещениях задачи изгиба пластин [3]. Но в более общей формулировке для геометрически нелинейных задач единственность не доказана.

Вариационные принципы квазистатического деформирования позволяют строить уравнения относительно скоростей перемещений [4]. Выраженные через приращения перемещений эти уравнения удобно использовать при решении общего класса геометрически и физически нелинейных задач МДТТ [5]. Кроме того, такие постановки позволяют доказать единственность решения задач формообразования при достаточных условиях единственности краевых задач, указанных в [4, 5].

1. Геометрически линейная постановка

Рассмотрим квазистатическую задачу формообразования с учетом бесконечно малых деформаций, включающую деформирование в ползучести и упругую разгрузку. Задачи деформирования в ползучести и упругой разгрузки могут быть представлены отдельными квазистатическими вариационными принципами. Используя теорию многокритериальной оптимизации, обратную задачу теории ползучести можно сформулировать в виде квазистатического вариационного принципа с функционалом [6]

$$J(\dot{u}_i, \dot{\tilde{u}}_i) = w_1\Big[\int_V W(\dot{\varepsilon}_{ij})dV - \int_S \dot{p}_i \dot{u}_i dS\Big] + w_2 \int_V W(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij})dV, \tag{1}$$

где $w_1 > 0$, $w_2 > 0$ – весовые коэффициенты, $W(\dot{\varepsilon}_{ij}) = \frac{1}{2}c_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{kl} - c_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{ij}\eta_{kl}$, $W(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}) = \frac{1}{2}c_{ijkl}\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}\dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl} - c_{ijkl}\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}\eta_{kl}$ – потенциалы для деформирования в ползучести [5], c_{ijkl} – компоненты тензора упругих констант, $\dot{\varepsilon}_{ij}$, $\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}$ – скорости текущих и остаточных деформаций, $\eta_{ij} = \eta_{ij}(\sigma_{ij}, q_n)$ – скорости деформаций ползучести, q_n – набор структурных параметров, $i, j, k, l = 1, 2, 3$, $n = 1, 2, ..., p$,

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}), \quad \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{\tilde{u}}_{i,j} + \dot{\tilde{u}}_{j,i}), \tag{2}$$

$\dot{u}_i$, $\dot{\tilde{u}}_i$ – скорости текущих и остаточных перемещений; по повторяющимся индексами производится суммирование от 1 до 3, а через запятую обозначено дифференцирование: $u_{i,j} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

Потенциальная форма определяющих соотношений имеет вид [6]

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial W(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}} = c_{ijkl}(\dot{\varepsilon}_{kl} - \eta_{kl}), \quad \dot{\rho}_{ij} = \frac{\partial W(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij})}{\partial \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}} = c_{ijkl}(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl} - \eta_{kl}). \tag{3}$$

Обозначим разность соотношений (3) через функции $\dot{\sigma}^e_{ij}$, которые представляют собой компоненты напряжений упругого деформирования:

$$\dot{\rho}_{ij} - \dot{\sigma}_{ij} = c_{ijkl}(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}) = \dot{\sigma}^e_{ij}.$$

Таким образом, можно определить следующие формулы:

$$\dot{\rho}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} + \dot{\sigma}^e_{ij}, \quad \dot{\sigma}^e_{ij} = \frac{\partial W^e(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij})}{\partial \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}} = c_{ijkl}(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}), \tag{4}$$

где $W^e(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}) = \frac{1}{2}c_{ijkl}\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}\dot{\tilde{\varepsilon}}_{kl} - c_{ijkl}\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}\dot{\varepsilon}_{kl}$.

Достаточными условиями единственности [4, 5] решения задач деформирования с введенными потенциалами будут

$$\int_V \triangle\dot{\sigma}_{ij}\triangle\dot{\varepsilon}_{ij}dV > 0, \quad \int_V \triangle\dot{\rho}_{ij}\triangle\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}dV > 0, \quad \int_V \triangle\dot{\sigma}^e_{ij}\triangle\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}dV > 0,$$

или

$$\int_V \triangle(\frac{\partial W(\dot{\varepsilon}_{ij})}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}})\triangle\dot{\varepsilon}_{ij}dV > 0, \quad \int_V \triangle(\frac{\partial W(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij})}{\partial \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}})\triangle\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}dV > 0, \quad \int_V \triangle(\frac{\partial W^e(\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij})}{\partial \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}})\triangle\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}dV > 0$$

для всех пар непрерывно дифференцируемых полей скоростей перемещений (учитываются соотношения (2)), принимающих заданные значения на границе. Здесь $\triangle$ означает разность соответствующих решениям величин в любых двух различных формах деформации.

Можно обнаружить, что данные достаточные условия при бесконечно малых деформациях совпадают с постулатом устойчивости в ползучести [2, 7].

Скорости деформаций ползучести в (3) и скорости текущих деформации в (4) считаются начальными добавочными скоростями деформаций, тогда задача с данными определяющими соотношениями сводится к краевой задаче теории упругости с начальными приращениями деформаций [8].

Стационарное значение функционала (1) при учете независимости $\dot{u}_i$, $\dot{\tilde{u}}_i$ приводит к двум вариационным принципам

$$\delta J_1(\dot{u}_i) \equiv \int_V \dot{\sigma}_{ij}\delta\dot{\varepsilon}_{ij}dV - \int_S \dot{p}_i\delta\dot{u}_i dS = 0, \tag{5}$$

$$\delta J_2(\dot{\tilde{u}}_i) \equiv \int_V \dot{\rho}_{ij}\delta\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}dV = 0. \tag{6}$$

Как видно, для данных задач значения весовых коэффициентов не оказывают влияния на вариационные принципы (5), (6), поэтому их можно принять, например, $w_1 = w_2 = 1$.

Условие стационарности функционала (5) приводит к уравнениям равновесия для скоростей напряжений в объеме V и граничным условиям на поверхности S соответственно:

$$\dot{\sigma}_{ij,j} = 0, \quad \dot{\sigma}_{ij}n_j = \dot{p}_i, \tag{7}$$

где n_i – компоненты нормали к поверхности S.

Вариационный принцип (6) с учетом (4) представляет собой задачу разгрузки с начальными скоростями напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ в объеме V [8]:

$$\int_V (\dot{\sigma}_{ij} + \dot{\sigma}^e_{ij})\delta\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}dV = 0. \tag{8}$$

Проведем преобразования:

$$\int_V \dot{\rho}_{ij}\delta\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}dV = \int_V \dot{\sigma}_{ij}\delta\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}dV + \int_V \dot{\sigma}^e_{ij}\delta\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}dV = \int_S \dot{\sigma}_{ij}n_j\delta\dot{\tilde{u}}_i dS - \int_V \dot{\sigma}_{ij,j}\delta\dot{\tilde{u}}_i dV + \int_V \dot{\sigma}^e_{ij}\delta\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}dV.$$

Учитывая (7), можно записать

$$\int_V \dot{\rho}_{ij}\delta\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}dV = \int_S \dot{p}_i\delta\dot{\tilde{u}}_i dS + \int_V \dot{\sigma}^e_{ij}\delta\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}dV,$$

тогда (6) примет вид

$$\int_V \dot{\sigma}^e_{ij}\delta\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij}dV + \int_S \dot{p}_i\delta\dot{\tilde{u}}_i dS = 0. \tag{9}$$

Условие стационарности функционала (9) приводит к уравнениям равновесия для скоростей напряжений в объеме V и граничным условиям на поверхности S соответственно:

$$\dot{\sigma}^e_{ij,j} = 0, \quad \dot{\sigma}^e_{ij}n_j = -\dot{p}_i. \tag{10}$$

Таким образом, задача разгрузки с начальными скоростями напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ в объеме V эквивалентна задаче с усилиями $-\dot{p}_i = -\dot{\sigma}_{ij}n_j$ на поверхности S.

Замечая в (4), что скорости текущих деформаций в (8) остаются постоянными, можно сделать вывод: вариационный принцип (6) эквивалентен задаче разгрузки тела с образованными в процессе деформирования в ползучести скоростями полных деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ и напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$, а также задаче деформирования в упругости с начальными скоростями деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ и приложенными на поверхности S усилиями $-\dot{\sigma}_{ij}n_j$.

Данные выводы совпадают с теоремой о разгрузке [9]: разность перемещений точки тела в некоторый момент стадии разгрузки и в момент начала разгрузки равна величине упругих перемещений, которые возникали бы в теле, если бы в естественном (ненапряжённом и недеформированном) состоянии к нему были приложены внешние силы, равные разностям внешних сил, действующих на тело в указанные моменты. То же относится к деформациям и напряжениям.

Теорема 1. *Пусть выполнены достаточные условия единственности решения задач деформирования (5) и разгрузки (6). Тогда решение задачи формообразования единственно.*

Доказательство. Пусть имеется два решения задачи формообразования с полями $\dot{u}^1_i$, $\dot{\tilde{u}}^1_i$ и $\dot{u}^2_i$, $\dot{\tilde{u}}^2_i$ в объеме V, соответствующих нагрузкам на поверхности S $\dot{p}^1_i$ и $\dot{p}^2_i$, причем $\dot{p}^2_i - \dot{p}^1_i = \triangle\dot{p}_i = 0$. Используя (2), (3) при $\eta_{ij} = \eta_{ij}(\sigma_{ij}, q_n)$ определяем $\dot{\sigma}^1_{ij}$, $\dot{\rho}^1_{ij}$ и $\dot{\sigma}^2_{ij}$, $\dot{\rho}^2_{ij}$ соответственно. На допустимых скоростях перемещений $\triangle\dot{u}_i = \dot{u}^2_i - \dot{u}^1_i$, $\triangle\dot{\tilde{u}}_i = \dot{\tilde{u}}^2_i - \dot{\tilde{u}}^1_i$ выполняется вариационный принцип для функционала (1)

$$w_1[\int_V \dot{\sigma}^1_{ij}\triangle\dot{u}_{j,i}dV - \int_S \dot{p}^1_j\triangle\dot{u}_j dS] + w_2\int_V \dot{\rho}^1_{ij}\triangle\dot{\tilde{u}}_{j,i}dV = 0.$$

Аналогично предыдущему уравнению получим для второго решения вариационный принцип. Разность этих вариационных принципов можно записать

$$w_1[\int_V \triangle\dot{\sigma}_{ij}\triangle\dot{u}_{j,i}dV - \int_S \triangle\dot{p}_j\triangle\dot{u}_j dS] + w_2\int_V \triangle\dot{\rho}_{ij}\triangle\dot{\tilde{u}}_{j,i}dV = 0. \tag{11}$$

Из равенства нулю в (11) следует выполнение уравнений:

$$\int_V \triangle\dot{\sigma}_{ij}\triangle\dot{u}_{j,i}dV - \int_S \triangle\dot{p}_j\triangle\dot{u}_j dS = 0, \qquad (12)$$

$$\int_V \triangle\dot{\rho}_{ij}\triangle\dot{\tilde{u}}_{j,i}dV = 0. \qquad (13)$$

Т.к. $\triangle\dot{p}_i = 0$ на поверхности S, то (12) примет вид $\int_V \triangle\dot{\sigma}_{ij}\triangle\dot{u}_{j,i}dV = 0$. Учитывая достаточное условие единственности, перемещения $\dot{u}_i$ определяются с точностью до смещения всего тела как жесткого целого (если имеется жесткое закрепление, то $\triangle\dot{u}_i = 0$). Из (3) следует, что $\triangle\dot{\sigma}_{ij} = 0$.

Выражение (13) является разностью вариационных принципов задач об упругой разгрузке (6). Из достаточного условия единственности следует, что перемещения $\dot{\tilde{u}}_i$ определяются с точностью до смещения всего тела как жесткого целого (если имеется жесткое закрепление, то $\triangle\dot{\tilde{u}}_i = 0$ в объеме V). По определяющим соотношениям (3) находим $\triangle\dot{\rho}_{ij} = 0$. □

Теорема 2. *Пусть выполнены достаточные условия единственности решения задач деформирования (5) и разгрузки (6). Тогда решение обратной задачи формообразования единственно.*

Доказательство. Пусть имеется два решения с полями $\dot{u}_i^1$, $\dot{\tilde{u}}_i^1$ и $\dot{u}_i^2$, $\dot{\tilde{u}}_i^2$ в объеме V, соответствующих нагрузкам на поверхности S $\dot{p}_i^1$ и $\dot{p}_i^2$, причем $\dot{\tilde{u}}_i^2 - \dot{\tilde{u}}_i^1 = \triangle\dot{\tilde{u}}_i = 0$ на S. Используя (2), (3) при $\eta_{ij} = \eta_{ij}(\sigma_{ij}, q_n)$ определяем $\dot{\sigma}_{ij}^1$, $\dot{\rho}_{ij}^1$ и $\dot{\sigma}_{ij}^2$, $\dot{\rho}_{ij}^2$, соответственно. На основе функционала (1) строим так же, как в доказательстве теоремы 1, выражение (11), откуда следуют (12), (13). Из (13) и достаточного условия единственности, находим $\triangle\dot{\rho}_{ij} = 0$.

Согласно (4), (8), (9) вариационный принцип (13), в силу выполнения условий равновесия для двух решений $\triangle\dot{\sigma}_{ij,j} = 0$, может быть представлен как

$$\int_V \triangle\dot{\sigma}^e_{ij}\triangle\dot{\tilde{u}}_{j,i}dV + \int_S \triangle\dot{\sigma}_{ij}n_i\triangle\dot{\tilde{u}}_j dS = 0,$$

т.к. $\triangle\dot{\tilde{u}}_i = 0$ на S, то

$$\int_V \triangle\dot{\sigma}^e_{ij}\triangle\dot{\tilde{u}}_{j,i}dV = 0.$$

Но в силу существования достаточного признака единственности, последнее интегральное выражение положительно для любых полей скоростей напряжений и перемещений, а следовательно, единственное решение $\triangle\dot{\sigma}^e_{ij} = 0$.

Учитывая (4), находим $\triangle\dot{\rho}_{ij} - \triangle\dot{\sigma}^e_{ij} = \triangle\dot{\sigma}_{ij} = 0$. Тогда из (12) следует, что $\triangle\dot{p}_j = 0$ на поверхности S. Из (3) определяются скорости деформаций и затем перемещений. □

Можно заметить, что вариационный принцип $\int_V \dot{\sigma}^e_{ij}\triangle\dot{\tilde{u}}_{j,i}dV = 0$ представляет собой задачу кинематического деформирования упругого тела.

2. Геометрически нелинейная постановка

Геометрически нелинейные задачи будем рассматривать в общей лагранжевой формулировке (TL) [5, 8] (в качестве отсчетной конфигурации выбирается начальная конфигурация тела). В этом случае деформирование происходит в условиях малых деформации, но больших перемещений и поворотов. В TL – формулировке в качестве тензоров деформаций и напряжений используются тензор деформаций Грина – Лагранжа и второй тензор напряжений Пиола – Кирхгофа.

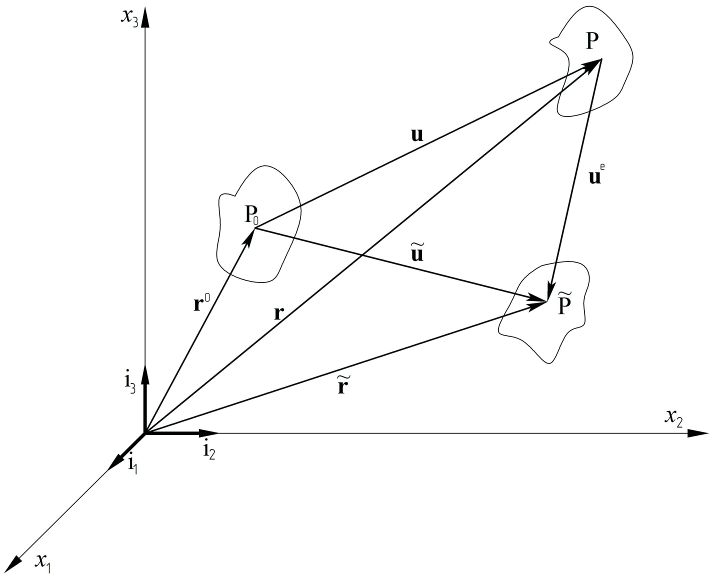

Рис. 1.

Пусть в фиксированной в пространстве прямоугольной декартовой координатной системе (x_1, x_2, x_3) даны радиус-векторы произвольной точки P до деформации $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)}(x_1, x_2, x_3)$, после деформирования в ползучести $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$ и упругой разгрузки $\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{r}}(x_1, x_2, x_3)$ (рис.1). Базисные векторы трех координатных систем находятся по формулам

$$\mathbf{i}_k = \frac{\partial \mathbf{r}^{(0)}}{\partial x_k} = \mathbf{r}^{(0)}_{,k}, \quad \mathbf{E}_k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} = \mathbf{r}_{,k}, \quad \tilde{\mathbf{E}}_k = \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial x_k} = \tilde{\mathbf{r}}_{,k}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Т.к. $\mathbf{r} = \mathbf{r}^{(0)} + \mathbf{u}$, $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}^{(0)} + \tilde{\mathbf{u}}$, то в системе базисных векторов до деформирования

$$\mathbf{E}_k = (\delta_{pk} + u_{p,k})\mathbf{i}_p, \quad \tilde{\mathbf{E}}_k = (\delta_{pk} + \tilde{u}_{p,k})\mathbf{i}_p.$$

Как уже отмечалось, выражения с повторяющимися индексами означают суммирование, т.е., например, $\mathbf{E}_k = (\delta_{1k} + u_{1,k})\mathbf{i}_1 + (\delta_{2k} + u_{2,k})\mathbf{i}_2 + (\delta_{3k} + u_{3,k})\mathbf{i}_3$.

Вектор напряжений при деформировании тела в базисе $\mathbf{E}_k$

$$\mathbf{t}_k = \sigma_{kp}\mathbf{E}_p,$$

где величины σ_{kp} образуют симметричный тензор, называемый вторым тензором Пиола – Кирхгофа [8]. Уравнения равновесия, спроектированные на направления векторов $\mathbf{i}_k$, имеют вид

$$[(\delta_{ik} + u_{i,k})\sigma_{qk}]_{,q} + F_i = 0, \quad i = 1,2,3,$$

где F_i – компоненты массовых сил $\mathbf{F} = F_k\mathbf{i}_k$. Аналогично получаются граничные условия

$$p_i = \sigma_{qk}n_q(\delta_{ik} + u_{i,k}),$$

где p_i – компоненты поверхностных сил $\mathbf{p} = p_k\mathbf{i}_k$, n_k – компоненты нормали к недеформированной поверхности.

Формулы связи компонент первого и второго тензоров напряжений Пиола–Кирхгофа, а также их скоростей имеют вид

$$\Sigma_{ij} = (\delta_{ik} + u_{i,k})\sigma_{kj}, \quad \dot\Sigma_{ij} = (\delta_{ik} + u_{i,k})\dot\sigma_{kj} + \dot u_{i,k}\sigma_{kj}, \tag{14}$$

где Σ_{ij} – первый тензор напряжений Пиола–Кирхгофа, характеризующий силу, действующую на элементарной площадке в текущей конфигурации и отнесенную к площадке в отсчетной конфигурации; $\dot\Sigma_{ij}$ – скорость первого тензора напряжений Пиола–Кирхгофа; точкой сверху обозначается здесь материальная производная.

В геометрически нелинейном случае соотношения (3) будут также выполняться, если принять за скорости напряжений скорости второго тензора напряжений Пиола–Кирхгофа $\dot\sigma_{ij}$, $\dot\rho_{ij}$ и за скорости деформаций – скорости тензора деформаций Грина–Лагранжа:

$$\dot\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\dot u_{i,j} + \dot u_{j,i} + \dot u_{k,i}u_{k,j} + u_{k,i}\dot u_{k,j}), \quad \dot{\tilde\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{\tilde u}_{i,j} + \dot{\tilde u}_{j,i} + \dot{\tilde u}_{k,i}\tilde u_{k,j} + \tilde u_{k,i}\dot{\tilde u}_{k,j}), \tag{15}$$

соответственно. Функционал (1) для геометрически нелинейных задач имеет вид [6]

$$J(\dot u_i, \dot{\tilde u}_i) = w_1[\int_V (W(\dot\varepsilon_{ij}) + \frac{1}{2}\sigma_{ij}\dot u_{k,i}\dot u_{k,j})dV - \int_S \dot p_i\dot u_i dS] +$$
$$+ w_2\int_V (W(\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}) + \frac{1}{2}\rho_{ij}\dot{\tilde u}_{k,i}\dot{\tilde u}_{k,j})dV. \tag{16}$$

Для дальнейшего анализа удобнее использовать сопряженную пару тензоров по мощности: первый тензор напряжений Пиола–Кирхгофа, градиент перемещений. В этом случае потенциальные функции примут вид

$$E(\dot u_{i,j}) = \frac{1}{2}c_{ijkl}\dot\varepsilon_{ij}\dot\varepsilon_{kl} - c_{ijkl}\dot\varepsilon_{ij}\eta_{kl} + \frac{1}{2}\sigma_{ij}\dot u_{k,i}\dot u_{k,j},$$

$$\tilde E(\dot{\tilde u}_{i,j}) = \frac{1}{2}c_{ijkl}\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}\dot{\tilde\varepsilon}_{kl} - c_{ijkl}\dot{\tilde\varepsilon}_{ij}\eta_{kl} + \frac{1}{2}\rho_{ij}\dot{\tilde u}_{k,i}\dot{\tilde u}_{k,j},$$

где учитываются выражения (15).

Используя потенциальные функции, (3), (15), текущие и остаточные скорости первого тензора напряжений Пиола–Кирхгофа имеют вид

$$\dot\Sigma_{ij} = \frac{\partial E(\dot u_{i,j})}{\partial \dot u_{i,j}} = (\delta_{ik} + u_{i,k})\dot\sigma_{kj} + \dot u_{i,k}\sigma_{kj}, \quad \dot P_{ij} = \frac{\partial \tilde E(\dot{\tilde u}_{i,j})}{\partial \dot{\tilde u}_{i,j}} = (\delta_{ik} + \tilde u_{i,k})\dot\rho_{kj} + \dot{\tilde u}_{i,k}\rho_{kj}.$$

Учитывая, что для скоростей второго тензора напряжений Пиола – Кирхгофа будет выполняться соотношение $\dot{\rho}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} + \dot{\sigma}^e_{ij}$, а для векторов перемещений – $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^e$ или по компонентам, в общем случае, $\tilde{u}_i = u_i + u^e_i$ (рис.1), можно найти

$$\dot{P}_{ij} - \dot{\Sigma}_{ij} = (\delta_{ik} + \tilde{u}_{i,k})\dot{\rho}_{kj} + \dot{\tilde{u}}_{i,k}\rho_{kj} - (\delta_{ik} + u_{i,k})\dot{\sigma}_{kj} - \dot{u}_{i,k}\sigma_{kj} =$$

$$= (\delta_{ik} + \tilde{u}_{i,k})\dot{\sigma}^e_{kj} + \dot{\tilde{u}}_{i,k}\sigma^e_{kj} + u^e_{i,k}\dot{\sigma}_{kj} + \dot{u}^e_{i,k}\sigma_{kj} = \dot{\Sigma}^e_{ij} + u^e_{i,k}\dot{\sigma}_{kj} + \dot{u}^e_{i,k}\sigma_{kj},$$

таким образом,

$$\dot{P}_{ij} = \dot{\Sigma}_{ij} + \dot{\Sigma}^e_{ij} + u^e_{i,k}\dot{\sigma}_{kj} + \dot{u}^e_{i,k}\sigma_{kj}, \tag{17}$$

где $\dot{\Sigma}^e_{ij} = (\delta_{ik} + \tilde{u}_{i,k})\dot{\sigma}^e_{kj} + \dot{\tilde{u}}_{i,k}\sigma^e_{kj}$.

Достаточные условия определяются тогда [4, 5]

$$\int_V \triangle\dot{\Sigma}_{ij}\triangle\dot{u}_{i,j}dV > 0, \quad \int_V \triangle\dot{P}_{ij}\triangle\dot{\tilde{u}}_{i,j}dV > 0, \tag{18}$$

а функционал (1)

$$J(\dot{u}_i, \dot{\tilde{u}}_i) = w_1[\int_V E(\dot{u}_{i,j})dV - \int_S \dot{p}_i\dot{u}_i dS] + w_2\int_V \tilde{E}(\dot{\tilde{u}}_{i,j})dV. \tag{19}$$

Стационарное значение функционала (16), с учетом независимости $\dot{u}_i$, $\dot{\tilde{u}}_i$, дают два вариационных принципа:

$$\delta J_1(\dot{u}_i) \equiv \int_V (\dot{\sigma}_{ij}\delta\dot{\varepsilon}_{ij} + \sigma_{ij}\dot{u}_{k,i}\delta\dot{u}_{k,j})dV - \int_S p_i\delta\dot{u}_i dS = 0, \tag{20}$$

$$\delta J_2(\dot{\tilde{u}}_i) \equiv \int_V (\dot{\rho}_{ij}\delta\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} + \rho_{ij}\dot{\tilde{u}}_{k,i}\delta\dot{\tilde{u}}_{k,j})dV = 0. \tag{21}$$

Условие стационарности функционала (20) приводит к уравнениям равновесия для скоростей напряжений в объеме V и граничным условиям на поверхности S

$$[(\delta_{ik} + u_{i,k})\dot{\sigma}_{kj} + \dot{u}_{i,k}\sigma_{kj}]_{,j} = 0, \quad [(\delta_{ik} + u_{i,k})\dot{\sigma}_{kj} + \dot{u}_{i,k}\sigma_{kj}]n_j = \dot{p}_i. \tag{22}$$

Рассмотрим задачу упругой разгрузки с начальными уравновешенными скоростями напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ в объеме V, вариационный принцип которой можно представить в виде [8]

$$\int_V ((\dot{\sigma}_{ij} + \dot{\sigma}^e_{ij})\delta\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} + (\sigma_{ij} + \sigma^e_{ij})\dot{\tilde{u}}_{k,i}\delta\dot{\tilde{u}}_{k,j})dV = 0. \tag{23}$$

Используя теорему Гаусса – Остроградского и вариацию скорости остаточных деформаций, преобразуем левую часть последнего выражения:

$$\delta\dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \frac{1}{2}(\delta\dot{\tilde{u}}_{i,j} + \delta\dot{\tilde{u}}_{j,i} + \delta\dot{\tilde{u}}_{k,i}\tilde{u}_{k,j} + \tilde{u}_{k,i}\delta\dot{\tilde{u}}_{k,j}) = \frac{1}{2}(\delta_{ki} + \tilde{u}_{k,i})\delta\dot{\tilde{u}}_{k,j} + \frac{1}{2}(\delta_{kj} + \tilde{u}_{k,j})\delta\dot{\tilde{u}}_{k,i},$$

$$\int_V ((\delta_{ki} + \tilde{u}_{k,i})(\dot{\sigma}_{ij} + \dot{\sigma}^e_{ij}) + (\sigma_{ij} + \sigma^e_{ij})\dot{\tilde{u}}_{k,i})\delta\dot{\tilde{u}}_{k,j}dV =$$

$$= \int_S ((\delta_{ki} + \tilde{u}_{k,i})(\dot{\sigma}_{ij} + \dot{\sigma}^e_{ij}) + (\sigma_{ij} + \sigma^e_{ij})\dot{\tilde{u}}_{k,i})n_j \delta\dot{\tilde{u}}_k dS -$$

$$- \int_V ((\delta_{ki} + \tilde{u}_{k,i})(\dot{\sigma}_{ij} + \dot{\sigma}^e_{ij}) + (\sigma_{ij} + \sigma^e_{ij})\dot{\tilde{u}}_{k,i})_{,j} \delta\dot{\tilde{u}}_k dV.$$

Учитывая $\tilde{u}_i = u_i + u^e_i$ и (22), (23) можно записать

$$\int_S [((\delta_{ki} + \tilde{u}_{k,i})\dot{\sigma}^e_{ij} + \dot{\tilde{u}}_{k,i}\sigma^e_{ij} + u^e_{k,i}\dot{\sigma}_{ij} + \dot{u}^e_{k,i}\sigma_{ij})n_j + \dot{p}_k]\delta\dot{\tilde{u}}_k dS -$$

$$- \int_V ((\delta_{ki} + \tilde{u}_{k,i})\dot{\sigma}^e_{ij} + \dot{\tilde{u}}_{k,i}\sigma^e_{ij} + u^e_{k,i}\dot{\sigma}_{ij} + \dot{u}^e_{k,i}\sigma_{ij})_{,j}\delta\dot{\tilde{u}}_k dV = 0,$$

откуда следуют уравнения равновесия в объеме V и граничные условия на поверхности S

$$((\delta_{ki} + \tilde{u}_{k,i})\dot{\sigma}^e_{ij} + \dot{\tilde{u}}_{k,i}\sigma^e_{ij})_{,j} + (u^e_{k,i}\dot{\sigma}_{ij} + \dot{u}^e_{k,i}\sigma_{ij})_{,j} = 0,$$

$$[((\delta_{ki} + \tilde{u}_{k,i})\dot{\sigma}^e_{ij} + \dot{\tilde{u}}_{k,i}\sigma^e_{ij}]n_j = -[u^e_{k,i}\dot{\sigma}_{ij} + \dot{u}^e_{k,i}\sigma_{ij}]n_j - \dot{p}_k.$$

Таким образом, задача разгрузки с начальными напряжениями $\dot{\sigma}_{ij}$ в V эквивалентна упругой задаче с усилиями $\dot{t}_k = -[u^e_{k,i}\dot{\sigma}_{ij} + \dot{u}^e_{k,i}\sigma_{ij}]n_j - \dot{p}_k$ на поверхности S и объемными силами $\dot{F}_k = (u^e_{k,i}\dot{\sigma}_{ij} + \dot{u}^e_{k,i}\sigma_{ij})_{,j}$ в объеме V.

Замечая в (4), что скорости текущих деформаций в (23) остаются постоянными, можно сделать вывод: вариационный принцип (21) эквивалентен задаче упругой разгрузки тела с образованными в процессе деформирования в ползучести скоростями полных деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ и напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$, а также задаче деформирования в упругости с начальными скоростями деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ и приложенными к поверхности S и к объему V усилиями $\dot{t}_k = -[u^e_{k,i}\dot{\sigma}_{ij} + \dot{u}^e_{k,i}\sigma_{ij}]n_j - \dot{p}_k$, $F_k = (u^e_{k,i}\dot{\sigma}_{ij} + \dot{u}^e_{k,i}\sigma_{ij})_{,j}$.

К такому же выводу можно прийти, если рассматривать стационарное значение функционала (19) с соотношением (17).

Теорема 3. *Пусть выполнены достаточные условия единственности решения задач деформирования (20) и разгрузки (21). Тогда решение задачи формообразования по заданным нагрузкам единственно.*

Доказательство. Пусть имеется два решения с полями $\dot{u}^1_i$, $\dot{\tilde{u}}^1_i$ и $\dot{u}^2_i$, $\dot{\tilde{u}}^2_i$ в объеме V, соответствующих нагрузкам на поверхности S $\dot{p}^1_i$ и $\dot{p}^2_i$, причем $\dot{p}^2_i - \dot{p}^1_i = \triangle\dot{p}_i = 0$. Используя потенциальные функции, определяем $\dot{\Sigma}^1_{ij}$, $\dot{P}^1_{ij}$ и $\dot{\Sigma}^2_{ij}$, $\dot{P}^2_{ij}$. На основе функционала (19) находим так же, как в доказательстве теоремы 1, уравнения

$$\int_V \triangle\dot{\Sigma}_{ij}\triangle\dot{u}_{i,j}dV - \int_S \triangle\dot{p}_i\triangle\dot{u}_i dS = 0, \tag{24}$$

$$\int_V \triangle\dot{P}_{ij}\triangle\dot{\tilde{u}}_{i,j}dV = 0. \tag{25}$$

По условию теоремы $\triangle\dot{p}_i = 0$, поэтому $\int_V \triangle\dot{\Sigma}_{ij}\triangle\dot{u}_{i,j}dV = 0$. Учитывая достаточное условие единственности, перемещения $\dot{u}_i$ определяются с точностью до смещения всего тела как жесткого целого (если имеется жесткое закрепление, то $\triangle\dot{u}_i = 0$). Из потенциальных форм определяющих соотношений следует, что $\triangle\dot{\Sigma}_{ij} = 0$.

В силу того, что (25) является задачей об упругой разгрузке (для которой выполняется достаточный признак единственности) перемещения $\dot{\tilde{u}}_i$ определяются с точностью до смещения всего тела как жесткого целого (если имеется жесткое закрепление, то $\triangle\dot{\tilde{u}}_i = 0$). □

Теорема 4. *Пусть выполнены достаточные условия единственности решения задач деформирования (20) и разгрузки (21). Тогда решение обратной задачи формообразования единственно.*

Доказательство. Пусть имеется два решения с полями $\dot{u}_i^1$, $\dot{\tilde{u}}_i^1$ и $\dot{u}_i^2$, $\dot{\tilde{u}}_i^2$ в объеме V, соответствующих нагрузкам на поверхности S $\dot{p}_i^1$ и $\dot{p}_i^2$, причем $\dot{\tilde{u}}_i^2 - \dot{\tilde{u}}_i^1 = \triangle\dot{\tilde{u}}_i = 0$ на S. На основе функционала (19) так же, как в доказательстве теоремы 3, находим (24), (25). Из (25) на основе достаточного признака (18) следует $\triangle\dot{P}_{ij} = 0$. С учетом (17), можно представить (25)

$$\int_V \triangle\dot{\Sigma}_{ij}\triangle\dot{\tilde{u}}_{i,j}dV + \int_V \triangle\dot{\Sigma}^e_{ij}\triangle\dot{\tilde{u}}_{i,j}dV + \int_V \triangle(u^e_{i,k}\dot{\sigma}_{kj} + \dot{u}^e_{i,k}\sigma_{kj})\triangle\dot{\tilde{u}}_{i,j}dV = 0,$$

или, используя теорему Гаусса – Остроградского, записать

$$\int_S \triangle\dot{\Sigma}_{ij}n_j\triangle\dot{\tilde{u}}_i dS - \int_V \triangle[\dot{\Sigma}_{ij}]_{,j}\triangle\dot{\tilde{u}}_i dV + \int_V \triangle\dot{\Sigma}^e_{ij}\triangle\dot{\tilde{u}}_{i,j}dV + \\ + \int_V \triangle(u^e_{i,k}\dot{\sigma}_{kj} + \dot{u}^e_{i,k}\sigma_{kj})\triangle\dot{\tilde{u}}_{i,j}dV = 0.$$

Т.к. выполняются условия $\triangle\dot{\tilde{u}}_i = 0$ на S и в деформированном состоянии тела, положение точек которого определяется радиус-вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$, условия равновесия $[(\delta_{ik} + u_{i,k})\dot{\sigma}_{kj} + \dot{u}_{i,k}\sigma_{kj}]_{,j} = 0$ или $\dot{\Sigma}_{ij,j} = 0$ для каждого решения, то находим

$$\int_V \triangle(\dot{\Sigma}^e_{ij} + u^e_{i,k}\dot{\sigma}_{kj} + \dot{u}^e_{i,k}\sigma_{kj})\triangle\dot{\tilde{u}}_{i,j}dV = 0.$$

Используя эти же преобразования в достаточном условии $\int_V \triangle\dot{P}_{ij}\triangle\dot{\tilde{u}}_{i,j}dV > 0$, получим

$$\int_V \triangle(\dot{\Sigma}^e_{ij} + u^e_{i,k}\dot{\sigma}_{kj} + \dot{u}^e_{i,k}\sigma_{kj})\triangle\dot{\tilde{u}}_{i,j}dV > 0$$

для всех пар непрерывно дифференцируемых полей скоростей перемещений $\dot{\tilde{u}}_i$ ($\triangle\dot{\tilde{u}}_i$ отлично от тождественного нуля). Таким образом, из (25) находим $\triangle(\dot{\Sigma}^e_{ij} + u^e_{i,k}\dot{\sigma}_{kj} + \dot{u}^e_{i,k}\sigma_{kj}) = 0$, а с учетом (17) получаем $\triangle\dot{\Sigma}_{ij} = 0$. Из (24) следует, что $\triangle\dot{p}_i = 0$ на поверхности S. По теореме 3, при условии $\triangle\dot{p}_i = 0$ на поверхности S, перемещения $\dot{u}_i$, $\dot{\tilde{u}}_i$ определяются с точностью до смещения всего тела как жесткого целого (если имеется жесткое закрепление, то $\triangle\dot{u}_i = 0$, $\triangle\dot{\tilde{u}}_i = 0$). □

3. Заключение

Доказана единственность квазистатических задач формообразования с учетом бесконечно малых деформаций, а также с учетом геометрической нелинейности.

Единственность рассмотренных задач можно сформулировать и в более общем виде, как с учетом криволинейных систем координат, так и с учетом больших деформаций. В этом случае выбираются сопряженные тензоры, определяются соответствующие потенциалы деформирования [5] и строятся функционалы типа (1).

Список литературы

[1] И. А. Банщикова, Б. В. Горев, И. В. Сухоруков, "Двумерные задачи формообразования стержней в условиях ползучести", *Прикладная механика и техническая физика*, **43**:3 (2002), 129–139.

[2] И. Ю. Цвелодуб, *Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов*, ИГиЛ СО АН СССР, Новосибирск, 1991.

[3] И. Ю. Цвелодуб, "Некоторые геометрически нелинейные задачи формоизменения неупругих пластин и пологих оболочек", *Прикладная механика и техническая физика*, **46**:2 (2005), 151–157.

[4] R. Hill, "On uniqueness and stability in the theory of finite elastic strain", *J. Mech. Phys. Solids.*, **5**:4 (1957), 229–241; Русский перевод:
Р. Хилл, "О единственности и устойчивости в теории конечных упругих деформаций", *Механика: Сб. переводов*, **3(49)** (1958), 53–65.

[5] С. Н. Коробейников, *Нелинейное деформирование твердых тел*, СО РАН, Новосибирск, 2000.

[6] К. С. Бормотин, "Вариационные методы решения обратной задачи оптимального деформирования в ползучести", *Информатика и системы управления*, **2(28)** (2011), 106–116.

[7] Ю. Н. Работнов, *Ползучесть элементов конструкций*, Изд-во «НАУКА», М, 1966.

[8] К. Васидзу, *Вариационные методы в теории упругости и пластичности*, Пер. с англ., Мир, М, 1987.

[9] А. А. Ильюшин, *Пластичность*, Государственное издательство Технико-теоретической литературы, М, 1948.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 10 апреля 2012 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11-08-00845-а), Целевой программы "Развитие научного потенциала высшей школы" Минобрнауки РФ (проект 2.1.1/9725) и государственного задания Минобрнауки РФ (проект 1.2582.2011)

Bormotin K. S. The uniqueness of quasistatic problems of creep forming. Far Eastern Mathematical Journal. 2013. V. 13. № 1. P. 03–14.

ABSTRACT

General statements of direct and inverse problems of creep forming in the form of quasistatic deformation taking into account both infinitesimal deformations and geometrical nonlinearity are given. Such statements allow the author to prove the uniqueness of creep forming problems using the sufficient conditions for uniqueness of the boundary-value problems.

Key words: *problems of creep forming, variational principles, quasistatic deformation, uniqueness.*