Дальневосточный математический журнал. 2013. Том 13. № 1. С. 15–34

УДК 519.116 + 511.556
MSC2010 11F20, 11F27

© В. А. Быковский, М. Д. Монина[1]

Об арифметической природе некоторых тождеств теории эллиптических функций

В работе предложен новый арифметический метод доказательства классических разложений для тройного, пятикратного и восьмикратного произведений из теории тэта-функций.

Ключевые слова: *тэта-функция, тождество Лиувилля, бесконечное произведение.*

Введение

Пусть

$$k^2 + k'^2 = 1, \quad q = e^{-\frac{K'}{K}},$$

где

$$K = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad K' = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}.$$

В основополагающей работе по теории эллиптических функций "Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum", опубликованной в 1829 году (см. [1]), Якоби получил q-разложения:

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + 2q^{25} + \cdots = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m^2},$$

$$\frac{2K}{\pi} = 1 + \frac{4q}{1-q} - \frac{4q^3}{1-q^3} + \frac{4q^5}{1-q^5} - \ldots,$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = 1 + \frac{8q}{1-q} + \frac{16q^2}{1+q^2} + \frac{24q^3}{1-q^3} + \frac{32q^4}{1+q^4} + \ldots,$$

[1]Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54; Дальневосточный государственный гуманитарный университет, 680000, г. Хабаровск, ул. Карла Маркса, 68. Электронная почта: `vab@iam.khv.ru, monina@iam.khv.ru`

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 = k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 + k'^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3 =$$

$$= 16\{\frac{q}{1+q^2} + \frac{4q^2}{1+q^4} + \frac{9q^3}{1+q^6} + \frac{16q^4}{1+q^8} + \ldots\} + 1 - 4\{\frac{q}{1-q} - \frac{9q^3}{1-q^3} + \frac{25q^5}{1-q^5} - \frac{49q^7}{1-q^7} + \ldots\},$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4 = 1 + 16\{\frac{q}{1+q} + \frac{2^3q^2}{1-q^2} + \frac{3^3q^3}{1+q^5} + \frac{4^3q^4}{1-q^5} + \ldots\}.$$

Как отметил сам Якоби в письме Лежандру от 9 сентября 1828 г., из них стандартным способом немедленно следует, что количество всех разбиений натурального числа на 2, 4, 6 и 8 квадратов выражается через суммы по его делителям. Справедливости ради следует отметить: теорема Якоби о четырёх квадратах в виде тождества

$$(1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \ldots)^4 = 1 + \frac{8x}{1-x} + \frac{16x^2}{1+x^2} + \frac{24x^2}{1-x^2} + \frac{32x^4}{1+x^4} + \ldots$$

была известна Гауссу уже к 1809 году (см. собрание сочинений Гаусса, том 3, стр. 445). Это обнаружилось после смерти Гаусса в его дневниковых записях. Соответствующие этим тождествам формулы и историю вопроса можно найти в [2] и [3].

Позднее, в “Journal de mathématiques pures et appliquées”, в 1858–1865 годах Лиувилль в более чем ста заметках опубликовал без доказательств множество подобного рода результатов. В отличие от Якоби, он опирался на специальные арифметические тождества (их список можно найти в [2]), опубликованные в серии из восемнадцати статей под общим названием “Sur quelques formules générales qui peuvent étre utiles dans la théorie des nombres” в те же годы, в том же журнале и также без доказательств. В письме к Эрмиту (Journal des mathématiques, 1862) Лиувилль писал по поводу своего метода:

“Мы с вами идём к одной цели, но совершенно разными путями, которые всё же связаны с работами Якоби... Теория эллиптических функций, которой вы непосредственно пользуетесь, для меня заменяется формулами, принадлежащими к области элементарной алгебры и полученными при помощи весьма простых тождеств.”

Методы Лиувилля были воссозданы в работах Баскакова, Назимова, Успенского и других авторов (см. [2], [3], [4] и [5]). Продолжая эту традицию, мы строим новую, более универсальную арифметическую конструкцию для доказательства подобного рода результатов. Рассматривая конкретные реализации конструкции, мы доказываем классические:

“the triple product identity”

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 - q^{2k})(1 + uq^{2k-1})(1 + u^{-1}q^{2k-1}) = \sum_{b=-\infty}^{\infty} u^b q^{b^2}, \tag{1}$$

восходящее к Гауссу [6] и Якоби [1],

“the quintuple product identity”

$$(1-u^{-1})\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)(1-uq^k)(1-u^{-1}q^k)(1-u^2q^{2k-1})(1-u^{-2}q^{2k-1}) = \\ = \sum_{b=-\infty}^{\infty} q^{\frac{3b^2+b}{2}}(u^{3b}-u^{-3b-1}), \quad (2)$$

восходящее к Фрикке [7], а также ещё одно важное тождество из теории эллиптических функций.

В дальнейшем мы будем считать, что

$$s = 2, 3, 4, \ldots \text{ – размерность;}$$
$$t, b, b_1, b_2, m_1, \ldots, m_s \text{ – целые числа;}$$
$$k, l, n, a, a_1, c, c_1 \text{ – натуральные числа.}$$

§1. Универсальное арифметическое тождество

Начиная с этого момента и в дальнейшем Ω – конечное подмножество в

$$\mathbb{Z}^s = \{m = (m_1, \ldots, m_s) | m_1, \ldots, m_s \in \mathbb{Z}\},$$

которое разобьём с помощью некоторого функционала $L : \mathbb{Z}^s \to \mathbb{Z}$ на три непересекающиеся части Ω_0, Ω_- и Ω_+, определяемые условиями: $L(m) = 0, L(m) < 0$ и $L(m) > 0$.

Пусть $J : \mathbb{Z}^s \to \mathbb{Z}^s$ и $U : \mathbb{Z}^s \to \mathbb{Z}^s$ – некоторые отображения, и при этом

$$L(J(m)) = -L(m) \qquad (m \in \mathbb{Z}^s). \quad (3)$$

Теорема 1. *Пусть $\Phi : \mathbb{Z}^s \to A$ произвольная функция со значениями в аддитивной абелевой группе A и при этом*

$$\Phi(J(U(m))) = -\Phi(m) \qquad (m \in \mathbb{Z}^s).$$

Предположим также, что отображения J и U определяют, соответственно, биекции Ω и Ω_+ на себя. Тогда

$$\sum_{m\in\Omega} \Phi(m) = \sum_{m\in\Omega_0} \Phi(m).$$

Доказательство. Из условия (3) следует, что отображение J определяет биекцию Ω_+ на Ω_-. Поэтому

$$\sum_{m\in\Omega_-}\Phi(m)=\sum_{m'\in\Omega_+}\Phi(J(m'))=\sum_{m''\in\Omega_+}\Phi(J(U(m'')))=-\sum_{m''\in\Omega_+}\Phi(m'').$$

Следовательно,

$$\sum_{m\in\Omega}\Phi(m)=\sum_{m\in\Omega_-}\Phi(m)+\sum_{m\in\Omega_0}\Phi(m)+\sum_{m\in\Omega_+}\Phi(m)=$$

$$=-\sum_{m\in\Omega_+}\Phi(m)+\sum_{m\in\Omega_0}\Phi(m)+\sum_{m\in\Omega_+}\Phi(m)=\sum_{m\in\Omega_0}\Phi(m)$$

и теорема доказана. □

Замечание 1. *В конкретных рассматриваемых в работе случаях отображение $R:\mathbb{Z}^s\to\mathbb{Z}^s$, определяемое по формуле $R(m)=J(U(m))\qquad(m\in\mathbb{Z}^s)$, имеет некоторый конечный чётный порядок $2l$ (т.е. $R^{2l}=E$ – тождественное преобразование) и при этом $R^l=-E$. Поэтому утверждение теоремы справедливо для функции $\Phi:\mathbb{Z}^s\to A$, определяемой по формуле*

$$\Phi(m)=\sum_{t=0}^{l-1}G(R^{2t}(m))\qquad(m\in\mathbb{Z}^s),$$

где $G:\mathbb{Z}^s\to A$ – произвольная функция с $G(-m)=-G(m)\qquad(m\in\mathbb{Z}^s)$.

Замечание 2. *Если выполняется предположение теоремы о том, что J определяет биекцию Ω на себя, то J определяет также и биекцию Ω_0 на себя.*

И в заключение этого параграфа договоримся о том, что для целого b и натурального n

$$\delta_n(b)=\begin{cases}1, & \text{если } b\equiv 0\ (mod\ n);\\ 0, & \text{если } b\not\equiv 0\ (mod\ n).\end{cases}$$

§2. Тождество Успенского

Нетрудно проверить, что преобразования

$$J:(m_1,m_2,m_3)\to(m_3,-m_2,m_1),$$

$$U:(m_1,m_2,m_3)\to(m_1+2m_2-m_3,-m_2+m_3,m_3)$$

определяют целочисленные линейные автоморфизмы квадратичной формы $Q(m_1,m_2,m_3)=m_2^2+m_1m_3$. При этом для $L(m_1,m_2,m_3)=m_1+2m_2-m_3$ выполняется условие (3), а для конечных множеств

$$\Omega(d)=\{(a,b,c)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\mid Q(a,b,c)=b^2+ac=d\}$$

условия теоремы 1 при любом натуральном d.
По определению,

$$R(m) = J(U(m)) = (m_3, m_2 - m_3, m_1 + 2m_2 - m_3),$$

$$R^2(m) = -U(J(m)) = (m_1 + 2m_2 - m_3, -m_1 - m_2, -m_1), \tag{4}$$

$$R^3(m) = (-m_1, -m_2, -m_3),$$

$$R^4(m) = -J(U(m)) = (-m_3, -m_2 + m_3, -m_1 - 2m_2 + m_3), \tag{5}$$

$$R^5(m) = U(J(m)) = (-m_1 - 2m_2 + m_3, m_1 + m_2, m_1).$$

Кроме того, из равенства $L(m) = m_1 + 2m_2 - m_3 = 0$ следует, что

$$Q(m_1, m_2, m_3) = m_2^2 + (m_1 + 2m_2)m_1 = (m_1 + m_2)^2.$$

Поэтому для (a, b, c) из $\Omega_0(d)$ число

$$d = Q(a, b, c) = (a + b)^2$$

может быть только квадратом некоторого натурального n. В этом случае

$$2a + 2b > a + 2b = c > 0 \quad \text{и} \quad a + b = n,$$

а при замене a на k получаем, что

$$b = n - k, \quad c = a + 2b = 2n - k.$$

Следовательно, для d, отличных от квадрата, $\Omega_0(d)$ – пустое множество, а для $d = n^2$

$$\Omega_0(n^2) = \{(k, n - k, 2n - k) \mid \ 0 < k < 2n\}.$$

С учётом вышесказанного, теорема 1 (см. также замечание 1) в рассматриваемом случае приобретает следующий вид.

Теорема 2. *Пусть $G : \mathbb{Z}^3 \to A$ произвольная функция с $G(-m) = -G(m)$ $(m \in \mathbb{Z}^3)$. Тогда для любого натурального d выполняется равенство*

$$\sum_{b^2+ac=d} \Phi(a, b, c) = \sum_{\substack{d=n^2\\0<k<2n}} \Phi(k, n - k, 2n - k),$$

где

$$\Phi(m) = G(m) + G(R^2(m)) + G(R^4(m)) =$$

$$= G(m_1, m_2, m_3) + G(m_1 + 2m_2 - m_3, -m_1 - m_2, -m_1)+$$

$$+G(-m_3, -m_2 + m_3, -m_1 - 2m_2 + m_3).$$

Предположим, что

$$G(J(m)) = G(m) \qquad (m \in \mathbb{Z}^3). \tag{6}$$

Тогда, в соответствии с (4) и (5),

$$G(R^2(m)) = G(-U(J(m))) = -G(U(J(m))), \quad G(R^4(m)) = G(-J(U(m))) = -G(U(m)).$$

Так как (см. замечание 2)

$$\sum_{m\in(*)} G(U(J(m))) = \sum_{m\in(*)} G(U(m)),$$

где $(*)$ означает $\Omega(d)$ или $\Omega_0(d)$, то тождество теоремы 2 можно переписать в виде

$$\sum_{b^2+ac=d} \{G(a,b,c) - 2G(a+2b-c, -b+c, c)\} = \sum_{\substack{d=n^2\\0<k<2n}} \{G(k, n-k, 2n-k) - 2G(0,n,k)\}. \tag{7}$$

При этом мы воспользовались очевидным равенством

$$\sum_{0<k<2n} \{G(0,n,2n-k) = \sum_{0<k<2n} G(0,n,k).$$

Если положить

$$G(m_1, m_2, m_3) = F(m_1 + m_3, m_2, -m_1 + m_3),$$

то условию (6) на G будет соответствовать равенство

$$F(m_1, -m_2, -m_3) = F(m_1, m_2, m_3) \qquad (m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}).$$

С учётом этого условие $G(-m) = -G(m)$ из теоремы 2 заменится на второе равенство

$$F(-m_1, m_2, m_3) = -F(m_1, m_2, m_3) \qquad (m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}).$$

В таком случае мы получаем из (7) тождество Успенского

$$\sum_{b^2+ac=d} \{F(a+c, b, -a+c) - 2F(a-2b, b+c, -a+2b+2c)\} =$$

$$\sum_{\substack{d=n^2\\0<k<2n}} \{F(2n, n-k, 2n-2k) - 2F(k,n,k)\},$$

впервые опубликованное в работе [8]. При этом, принимая во внимание биекцию $\Omega(d)$ на себя, определяемую преобразованием $(a,b,c) \to (a,-b,c)$, мы заменили в тождестве (7) сумму

$$\sum_{b^2+ac=d} F(a+2b, -b+c, -a-2b+2c)$$

на

$$\sum_{b^2+ac=d} F(a-2b, b+c, -a+2b+2c).$$

§3. Тройное произведение

Действуя стандартным способом, восходящим к Эйлеру (см., например, [9]), применим к обеим частям (1) логарифмическую производную $q\frac{\partial}{\partial q}\log$ и воспользуемся разложением

$$\frac{z}{1-z}=\sum_{l=1}^{\infty}z^l.$$

В результате получим, что

$$\frac{\sum\limits_{b=-\infty}^{\infty}b^2u^bq^{b^2}}{\sum\limits_{b=-\infty}^{\infty}u^bq^{b^2}}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(-2k\frac{q^{2k}}{1-q^{2k}}+(2k-1)\frac{uq^{2k-1}}{1+uq^{2k-1}}+(2k-1)\frac{u^{-1}q^{2k-1}}{1+u^{-1}q^{2k-1}})=$$

$$=\sum_{k,l=1}^{\infty}(-2kq^{2kl}-(2k-1)(-1)^l(u^l+u^{-l})q^{(2k-1)l})=$$

$$=-\sum_{a,c=1}^{\infty}\delta_2(a)aq^{ac}+\sum_{a,c=1}^{\infty}(\delta_2(a)-1)(-1)^ca(u^c+u^{-c})q^{ac}.$$

Избавляясь от знаменателя и принимая во внимание равенства

$$\sum_{b=-\infty}^{\infty}u^bq^{b^2}=\sum_{b=-\infty}^{\infty}u^{-b}q^{b^2}=\frac{1}{2}\sum_{b=-\infty}^{\infty}(u^b+u^{-b})q^{b^2},$$

$$\sum_{b=-\infty}^{\infty}b^2u^bq^{b^2}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2(u^n+u^{-n})q^{n^2},$$

находим

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2(u^n+u^{-n})q^{n^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{a,c=1}^{\infty}\sum_{b=-\infty}^{\infty}\delta_2(a)a(u^b+u^{-b})q^{b^2+ac}+$$

$$+\sum_{a,c=1}^{\infty}\sum_{b=-\infty}^{\infty}(\delta_2(a)-1)(-1)^ca(u^{c-b}+u^{-c+b})q^{b^2+ac}.$$

Положив $f(b)=u^b+u^{-b}$ и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях q^d с натуральным $d=b^2+ac$, получим арифметическое тождество

$$-\frac{1}{2}\sum_{b^2+ac=d}\delta_2(a)af(b)+\sum_{b^2+ac=d}(\delta_2(a)-1)(-1)^caf(c-b)=\begin{cases}n^2f(n), & \text{если } d=n^2,\\ 0, & \text{если } d\neq n^2.\end{cases}\quad(8)$$

Замечание 3. *Здесь и в дальнейшем суммирования проводятся по всем тройкам* $(a,b,c)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$*, для которых* $b^2+ac=d$*.*

Обращая только что проведённую цепочку преобразований, мы получим исходное разложение (1) с точностью до множителя не зависящего от q (при логарифмическом дифференцировании он становится равным нулю). Величина множителя находится путём сравнения правой и левой частей при $q=0$. Поэтому тождество для тройного произведения вытекает из следующего утверждения.

Теорема 3. *Пусть* $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ *произвольная чётная функция. Тогда для любого натурального* d *выполняется тождество* (8)*.*

Доказательство. Положим в тождестве (7)

$$G(m_1,m_2,m_3)=-\frac{1}{4}((-1)^{m_1}-(-1)^{m_3})(m_1+2m_2-m_3)f(m_2).$$

Рассмотрим сумму

$$S_1(d)=\sum_{b^2+ac=d}G(a,b,c)=-\frac{1}{4}\sum_{b^2+ac=d}((-1)^a-(-1)^c)(a+2b-c)f(b).$$

Так как преобразование $(a,b,c)\to(a,-b,c)$ определяет биекцию на $\Omega(d)$, а f – чётная функция, то

$$\sum_{b^2+ac=d}bf(b)=0.$$

Принимая во внимание биекцию J, для оставшейся части суммы $S_1(d)$ находим

$$-\frac{1}{4}\sum_{b^2+ac=d}((-1)^a-(-1)^c)(a-c)f(b)=-\frac{1}{2}\sum_{b^2+ac=d}((-1)^a-(-1)^c)af(b)=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{b^2<d}f(b)\sum_{ac=d-b^2}((-1)^a-(-1)^c)a.$$

□

Для любого натурального N

$$\sum_{ac=N}((-1)^a-(-1)^c)a=2\sum_{\substack{ac=N\\ a+c-\text{нечёт}}}(-1)^a a=$$

$$=2\sum_{\substack{ac=N\\ a-\text{чёт},\\ c-\text{нечёт}}}a-2\sum_{\substack{ac=N\\ a-\text{нечёт},\\ c-\text{чёт}}}a=2\sum_{\substack{ac=N\\ a-\text{чёт}}}a-2\sum_{\substack{ac=N\\ c-\text{чёт}}}a=$$

$$=2\sum_{ac=N}\delta_2(a)a-\sum_{\substack{2a\cdot\frac{c}{2}=N\\ \frac{c}{2}\in\mathbb{N}}}2a=\sum_{ac=N}\delta_2(a)a.$$

В итоге получаем, что
$$S_1(d) = -\frac{1}{2}\sum_{b^2+ac=d}\delta_2(a)af(b).$$
Нетрудно заметить, что
$$\sum_{b^2+ac=d}G(a+2b-c,-b+c,c) = -\frac{1}{4}\sum_{b^2+ac=d}((-1)^{a-c}-(-1)^c)af(-b+c) =$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{b^2+ac=d}(\delta_2(a)-1)(-1)^c af(-b+c).$$
И, наконец, для $d = n^2$
$$\sum_{0<k<2n}G(k,n-k,2n-k) = -\frac{1}{4}\sum_{0<k<2n}((-1)^k-(-1)^{2n-k})\cdot 0\cdot f(n-k) = 0,$$
$$\sum_{0<k<2n}G(0,n,2n-k) = -\frac{1}{4}\sum_{0<k<2n}(1-(-1)^k)(0+2n-2n+k)f(n) =$$
$$= -\frac{1}{4}\sum_{0<k<2n}(1-(-1)^k)kf(n) = -\frac{1}{2}n^2 f(n).$$
Мы показали, что при данном выборе G тождество (7) преобразуется в тождество (8) теоремы 3.

§4. Тождество для пятикратного произведения

Напомним, что для $q = e^{\pi i\tau}$ и $u = e^{2\pi ix}$
$$\vartheta_0(v;\tau) = \sum_{b=-\infty}^{\infty}(-1)^b u^b q^{b^2} = \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})(1-uq^{2k-1})(1-u^{-1}q^{2k-1}),$$
$$\vartheta_1(v;\tau) = \frac{1}{i}\sum_{b=-\infty}^{\infty}(-1)^b u^{b+\frac{1}{2}}q^{(b+\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{i}(u^{\frac{1}{2}}-u^{-\frac{1}{2}})q^{\frac{1}{4}}\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})(1-uq^{2k})(1-u^{-1}q^{2k}),$$
$$\vartheta_2(v;\tau) = \sum_{b=-\infty}^{\infty}u^{b+\frac{1}{2}}q^{(b+\frac{1}{2})^2} = (u^{\frac{1}{2}}+u^{-\frac{1}{2}})q^{\frac{1}{4}}\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})(1+uq^{2k})(1+u^{-1}q^{2k}),$$
$$\vartheta_3(v;\tau) = \sum_{b=-\infty}^{\infty}u^b q^{b^2} = \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})(1+uq^{2k-1})(1+u^{-1}q^{2k-1})$$
– классические тэта-функции Якоби вместе с их разложениями в тройное произведение. Последнее разложение совпадает с (1) из Введения.

На странице 433 первого тома монографии Фрикке [7] приведено вместе с доказательством тождество

$$2q^{\frac{1}{6}}\sum_{b=-\infty}^{\infty}(-1)^b\cos\pi v(6b+1)q^{\frac{(6b+1)^2}{12}}=\vartheta_0(v;\tau)\vartheta_2(v;\tau)\vartheta_3(v;\tau)\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})^{-2}.$$

Его с помощью замен

$$u\to -u \quad \text{и} \quad q\to q^{\frac{1}{2}}$$

можно представить в виде (2), которое переоткрывалось в работах [10], [11], [12] и [13]. В свою очередь (2) после замен (см. [9])

$$q\to q^6 \quad \text{и} \quad u\to uq^3$$

преобразуется к виду

$$q(u-u^{-1})\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{6k})(1-uq^{3k})(1-u^{-1}q^{3k})(1+uq^{6k})(1+u^{-1}q^{6k})=\sum_{b=-\infty}^{\infty}\chi_{-3}(b)u^bq^{b^2}, \quad (9)$$

где $\chi_{-3}:\mathbb{Z}\to\{-1,0,1\}$ – квадратичный характер по модулю 3.

Действуя точно так же как в случае тройного тождества, получим

$$\frac{\sum\limits_{b=-\infty}^{\infty}\chi_{-3}(b)b^2u^bq^{b^2}}{\sum\limits_{b=-\infty}^{\infty}\chi_{-3}(b)u^bq^{b^2}}=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-6k\frac{q^{6k}}{1-q^{6k}}-3k\frac{uq^{3k}}{1-uq^{3k}}-3k\frac{u^{-1}q^{3k}}{1-u^{-1}q^{3k}}+6k\frac{uq^{6k}}{1+uq^{6k}}+6k\frac{u^{-1}q^{6k}}{1+u^{-1}q^{6k}})=$$

$$=1-\sum_{a,c=1}^{\infty}\delta_6(a)aq^{ac}-\sum_{a,c=1}^{\infty}(\delta_3(a)+(-1)^c\delta_6(a))a(u^c+u^{-c})q^{ac}.$$

Так как функция χ_{-3} – нечётная, то

$$\sum_{b=-\infty}^{\infty}\chi_{-3}(b)b^2u^bq^{b^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{-3}(n)n^2(u^n-u^{-n})q^{n^2},$$

$$\sum_{b=-\infty}^{\infty}\chi_{-3}(b)u^bq^{b^2}=-\sum_{b=-\infty}^{\infty}\chi_{-3}(b)u^{-b}q^{b^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{b=-\infty}^{\infty}\chi_{-3}(b)(u^b-u^{-b})q^{b^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{-3}(n)(u^n-u^{-n})q^{n^2}.$$

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{-3}(n)(n^2-1)g(n)q^{n^2}=-\frac{1}{2}\sum_{b=-\infty}^{\infty}\sum_{a,c=1}^{\infty}\delta_6(a)a(u^b-u^{-b})\chi_{-3}(b)q^{b^2+ac}-$$

$$-\sum_{b=-\infty}^{\infty}\sum_{a,c=1}^{\infty}\delta_3(a)(1+\delta_2(a)(-1)^c)\chi_{-3}(b)(u^{b-c}-u^{-b+c})q^{b^2+ac}.$$

Положив $g(b)=u^b-u^{-b}$ и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях q^d с $d=b^2+ac$, получим тождество из работы [9]

$$-\frac{1}{2}\sum_{b^2+ac=d}\delta_6(a)a\chi_{-3}(b)g(b)-\sum_{b^2+ac=d}\delta_3(a)(1+\delta_2(a)(-1)^c)a\chi_{-3}(b)g(b-c)=$$
$$=\begin{cases}\chi_{-3}(n)(n^2-1)g(n), & \text{если } d=n^2,\\ 0, & \text{если } d\neq n^2.\end{cases} \tag{10}$$

Как и ранее, тождество для пятикратного произведения получается обращением только что приведённых выкладок из следующего утверждения.

Теорема 4. *Пусть $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ произвольная нечётная функция. Тогда для любого натурального d выполняется тождество (10).*

Доказательство. Утверждение теоремы очевидно для $d\not\equiv 1\ (mod\ 3)$. Пусть теперь $d\equiv 1\ (mod\ 3)$. Положим в тождестве (7)

$$G(m_1,m_2,m_3)=$$
$$=\frac{1}{4}(2+(-1)^{m_1}+(-1)^{m_3})\chi_{-3}(m_2-m_3)\delta_3(m_1+2m_2-m_3)(m_1+2m_2-m_3)g(m_2).$$

В таком случае

$$\sum_{b^2+ac=d}G(a+2b-c,-b+c,c)=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{b^2+ac=d}(2+(-1)^{a+c}+(-1)^c)\delta_3(a)a\chi_{-3}(-b)g(-b+c)=$$
$$=\sum_{b^2+ac=d}\delta_3(a)(1+\delta_2(a)(-1)^c)a\chi_{-3}(b)g(b-c).$$

Воспользовавшись преобразованием $J:(a,b,c)\to(c,-b,a)$ и равенством

$$\chi_{-3}(b-c)\delta_3(a+2b-c)=\chi_{-3}(-a-b)\delta_3(a+2b-c)$$

получим, что

$$\sum_{b^2+ac=d}(2+(-1)^a+(-1)^c)\chi_{-3}(b-c)\delta_3(a+2b-c)bg(b)=$$

$$=\sum_{b^2+ac=d}(1+(-1)^a)\chi_{-3}(b-c)\delta_3(a+2b-c)bg(b)=2\sum_{\substack{b^2+2a_1c=d\\ b-c\equiv a_1-b\ (mod\ 3)}}\chi_{-3}(b-c)bg(b).$$

Так как в рассматриваемой сумме

$$\chi_{-3}(b-a_1)=\chi_{-3}(-b+c)=-\chi_{-3}(b-c),$$

то при замене $(a_1,b,c)\to(c,b,a_1)$ все слагаемые поменяют знак. Следовательно, сумма равна нулю и

$$\sum_{b^2+ac=d}G(a,b,c)=\frac{1}{4}\sum_{\substack{b^2+ac=d\\ a+b\equiv -b+c\ (mod\ 3)}}(2+(-1)^a+(-1)^c)\chi_{-3}(b-c)(a-c)g(b)=S_0+S_1,$$

где к S_0 отнесены слагаемые с $b\equiv 0\ (mod\ 3)$, а к S_1 с $b\equiv\pm1\ (mod\ 3)$. В первом случае $a\equiv c\ (mod\ 3)$ и

$$\chi_{-3}(b-c)=-\chi_{-3}(c)=-\chi_{-3}(a).$$

Тогда замена $(a,b,c)\to(c,b,a)$ приводит к перемене знака у слагаемых

$$(2+(-1)^a+(-1)^c)\chi_{-3}(c)(a-c)g(b),$$

и поэтому $S_0=0$. Во втором случае

$$ac=d-b^2\equiv 1-(\pm1)^2\equiv 0\ (mod\ 3),\qquad a-c\equiv -2b\not\equiv 0\ (mod\ 3).$$

Воспользовавшись биекцией J, из этих сравнений находим

$$\sum_{b^2+ac=d}G(a,b,c)=\frac{1}{4}\sum_{\substack{b^2+ac=d\\ ac\equiv 0\ (mod\ 3)\\ a+b\equiv -b+c\ (mod\ 3)}}(2+(-1)^a+(-1)^c)\chi_{-3}(b-c)(a-c)g(b)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\substack{b^2+ac=d\\ a-b\equiv c\equiv 0\ (mod\ 3)}}(2+(-1)^a+(-1)^c)\chi_{-3}(b)(a-c)g(b).$$

Замена $(a,b,c)\to(a,-b,c)$ не меняет слагаемых. Поэтому условие $a-b\equiv 0\ (mod\ 3)$ можно заменить на $a\not\equiv 0\ (mod\ 3)$, добавив коэффициент $\frac{1}{2}$ перед суммой. Так как слагаемые с $a\equiv c\equiv 0\ (mod\ 3)$ взаимно уничтожаются при замене $(a,b,c)\to(c,b,a)$, то

$$\sum_{b^2+ac=d}G(a,b,c)=\frac{1}{4}\sum_{\substack{b^2+ac=d\\ c\equiv 0\ (mod\ 3)}}(2+(-1)^a+(-1)^c)\chi_{-3}(b)(a-c)g(b)=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{b^2<d}\chi_{-3}(b)g(b)\sum_{ac_1=\frac{d-b^2}{3}}(2+(-1)^a+(-1)^{c_1})(a-3c_1).$$

Поскольку $1+(-1)^a$ и $1+(-1)^{c_1}$ отличны от нуля только для чётных a и c_1, то внутренняя сумма равна

$$2\sum_{2a_1c_1=\frac{d-b^2}{3}}(2a_1-3c_1)+2\sum_{2ac_2=\frac{d-b^2}{3}}(a-6c_1)=-2\sum_{ac=d-b^2}\delta_6(a)a.$$

В итоге мы получаем

$$\sum_{b^2+ac=d} G(a,b,c) = -\frac{1}{2} \sum_{b^2+ac=d} \delta_6(a) a \chi_{-3}(b) g(b).$$

Наконец, нетрудно проверить, что

$$\sum_{0<k<2n} G(k, n-k, 2n-k) = 0,$$

$$\sum_{0<k<2n} G(0,n,k) = \frac{1}{4} \sum_{0<k<2n} (2+1+(-1)^k)\chi_{-3}(n-k)\delta_3(2n-k)(2n-k)g(n) =$$
$$= -\frac{3}{4}\chi_{-3}(n)g(n) \sum_{\substack{0<k<2n \\ k\equiv 2n \ (mod\ 3)}} (3+(-1)^k)(2n-k) = -\frac{1}{2}\chi_{-3}(n)(n^2-1)g(n).$$

Теорема 4 полностью доказана. □

Замечание 4. *В работе [9] приведено имеющее такую же арифметическую природу доказательство теоремы 4, слегка отличающееся в некоторых технических деталях.*

§5. Тождество для восьмикратного произведения

Преобразования

$$J : (m_1, m_2, m_3, m_4) \to (m_4, -m_3, -m_2, m_1),$$

$$U : (m_1, m_2, m_3, m_4) \to (m_1+m_2+m_3-m_4, -m_2+m_4, -m_3+m_4, m_4)$$

определяют целочисленные линейные автоморфизмы квадратичной формы

$$Q(m_1, m_2, m_3, m_4) = m_2^2 + m_3^2 + 2m_1m_4.$$

При этом для

$$L(m_1, m_2, m_3, m_4) = m_1 + m_2 + m_3 - m_4$$

выполняется условие (3), а для конечных множеств

$$\Omega = \Omega(d) = \{(a, b_1, b_2, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N} \mid b_1^2 + b_2^2 + 2ac = d\}$$

условия теоремы 1 при любом натуральном d.

По определению,

$$R(m) = J(U(m)) = (m_4, m_3 - m_4, m_2 - m_4, m_1 + m_2 + m_3 - m_4),$$

$$R^2(m) = -U(J(m)) = (m_1 + m_2 + m_3 - m_4, -m_1 - m_3, -m_1 - m_2, -m_1),$$
$$R^3(m) = (-m_1, -m_2, -m_3, -m_4),$$

$$R^4(m) = -J(U(m)) = (-m_4, -m_3 + m_4, -m_2 + m_4, -m_1 - m_2 - m_3 + m_4),$$
$$R^5(m) = U(J(m)) = (-m_1 - m_2 - m_3 + m_4, m_1 + m_3, m_1 + m_2, m_1).$$

Из равенства
$$L(m) = m_1 + m_2 + m_3 - m_4 = 0$$
следует, что
$$Q(m) = m_2^2 + m_3^2 + 2m_1(m_1 + m_2 + m_3) = (m_1 + m_2)^2 + (m_1 + m_3)^2.$$

В рассматриваемом случае теорема 1 и замечание 1 приводят к следующему утверждению.

Теорема 5. *Пусть $G : \mathbb{Z}^4 \to A$ произвольная функция с $G(-m) = -G(m)$ $(m \in \mathbb{Z}^4)$. Тогда для любого натурального d выполняется равенство*
$$\sum_{b_1^2+b_2^2+2ac=d} \Phi(a, b_1, b_2, c) = \sum_{\substack{(a+b_1)^2+(a+b_2)^2=d \\ a+b_1+b_2>0}} \Phi(a, b_1, b_2, a + b_1 + b_2),$$
где
$$\Phi(m) = G(m) + G(R^2(m)) + G(R^4(m)) =$$
$$= G(m_1, m_2, m_3, m_4) + G(m_1 + m_2 + m_3 - m_4, -m_1 - m_3, -m_1 - m_2, -m_1) +$$
$$+ G(-m_4, -m_3 + m_4, -m_2 + m_4, -m_1 - m_2 - m_3 + m_4).$$

Если дополнительно предположить, что
$$G(J(m)) = G(m) \qquad (m \in \mathbb{Z}^4),$$
то по тем же причинам, что и ранее (см. §2) тождество теоремы 5 преобразуется к виду
$$\sum_{b_1^2+b_2^2+2ac=d} \{G(a, b_1, b_2, c) - 2G(a + b_1 + b_2 - c, -b_1 + c, -b_2 + c, c)\} =$$
$$= \sum_{\substack{(a+b_1)^2+(a+b_2)^2=d \\ a+b_1+b_2>0}} \{G(a, b_1, b_2, a + b_1 + b_2) - 2G(0, a + b_2, a + b_1, a + b_1 + b_2)\}. \quad (11)$$

К числу важнейших в теории эллиптических и тэта-функций относится тождество
$$\frac{uv - 1}{(u - 1)(v - 1)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - q^k)(1 - q^k)(1 - uvq^k)(1 - u^{-1}v^{-1}q^k)}{(1 - uq^k)(1 - u^{-1}q^k)(1 - vq^k)(1 - v^{-1}q^k)} =$$
$$= 1 - \frac{1}{1 - u} - \frac{1}{1 - v} - \sum_{n,l=1}^{\infty} (u^n v^l - u^{-n} v^{-l}) q^{nl}.$$

С помощью разложения тэта-функции $\vartheta_1(v; \tau)$ в тройное произведение и замен
$$q \to q^8, u \to u^2, v \to v^2$$

оно преобразуется в восходящее к Якоби тождество (см. по этому поводу [14], стр. 92)

$$2\sum_{a,c=1}^{\infty}\delta_2(a)\delta_2(c)(u^a v^c - u^{-a}v^{-c})q^{2ac} = -\frac{H(uv;q)H'(1;q)}{H(u;q)H(v;q)} + \frac{u^2+1}{u^2-1} + \frac{v^2+1}{v^2-1}, \qquad (12)$$

$$H(w;q) = \sum_{b=-\infty}^{\infty}\chi_{-4}(b)w^b q^{b^2} = q(w-w^{-1})\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{8k})(1-w^2q^{8k})(1-w^{-2}q^{8k}),$$

$$H'(1;q) = \sum_{b=-\infty}^{\infty}\chi_{-4}(b)bq^{b^2} = 2q\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{8k})^3,$$

где $\chi_{-4}:\mathbb{Z}\to\{-1,0,1\}$ – квадратичный характер по модулю 4. Положим

$$\Lambda(u,v;q) = \sum_{a,c=1}^{\infty}\delta_2(a)\delta_2(c)u^a v^c q^{2ac} = \Lambda(v,u;q).$$

Тогда

$$2H(u;q)H(v;q)\cdot\sum_{a,c=1}^{\infty}\delta_2(a)\delta_2(c)(u^a v^c - u^{-a}v^{-c})q^{2ac} =$$

$$= 2H(u;q)H(v;q)(\Lambda(u,v;q) - \Lambda(u^{-1},v^{-1};q)) =$$

$$= H(u;q)H(v;q)\Lambda(u,v;q) - H(u^{-1};q)H(v^{-1};q)\Lambda(u^{-1},v^{-1};q)+$$

$$+H(v;q)H(u;q)\Lambda(v,u;q) - H(v^{-1};q)H(u^{-1};q)\Lambda(v^{-1},u^{-1};q) =$$

$$= \sum_{b_1,b_2=-\infty}^{\infty}\sum_{a,c=1}^{\infty}\chi_{-4}(b_1)\chi_{-4}(b_2)\delta_2(a)\delta_2(c)q^{b_1^2+b_2^2+2ac}\times$$

$$\times(u^{a+b_1}v^{c+b_2} - u^{-a-b_1}v^{-c-b_2} + v^{a+b_1}u^{c+b_2} - v^{-a-b_1}u^{-c-b_2}) =$$

$$= \sum_{d=1}^{\infty}\Big(\sum_{b_1^2+b_2^2+2ac=d}\chi_{-4}(b_1)\chi_{-4}(b_2)\delta_2(a)\delta_2(c)h(a+b_1,b_2+c)\Big)q^d,$$

где

$$h(b_1,b_2) = u^{b_1}v^{b_2} - u^{-b_1}v^{-b_2} + v^{b_1}u^{b_2} - v^{-b_1}u^{-b_2}.$$

Заметим, что

$$H(uv;q)H'(1;q) = \Big(\sum_{b_1=-\infty}^{\infty}\chi_{-4}(b_1)(uv)^{b_1}q^{b_1^2}\Big)\Big(\sum_{b_2=-\infty}^{\infty}\chi_{-4}(b_2)b_2q^{b_2^2}\Big) =$$

$$= 2\Big(\sum_{n_1=1}^{\infty}\chi_{-4}(n_1)((uv)^{n_1} - (uv)^{-n_1})q^{n_1^2}\Big)\Big(\sum_{n_2=1}^{\infty}\chi_{-4}(n_2)n_2q^{n_2^2}\Big) =$$

$$= 2\sum_{n_1,n_2=1}^{\infty}\chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)n_2((uv)^{n_1} - (uv)^{-n_1})q^{n_1^2+n_2^2} =$$

$$= \sum_{d=1}^{\infty} (\sum_{n_1^2+n_2^2} \chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)n_2h(n_1,n_1))q^d.$$

Так как для нечётных n

$$\frac{u^2+1}{u^2-1}(u^n - u^{-n}) = 2 \sum_{\substack{-n<t<n \\ t-\text{нечёт}}}'' u^t,$$

где штрихи подразумевают коэффициент $\frac{1}{2}$ при $t = \pm n$, то

$$\frac{u^2+1}{u^2-1}H(u;q)H(v;q) + \frac{v^2+1}{v^2-1}H(v;q)H(u;q) =$$

$$= 2 \sum_{n_1,n_2=1}^{\infty} \chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2) (\sum_{\substack{-n_1 \le t \le n_1 \\ t-\text{нечёт}}}'' u^t(v^{n_2} - v^{-n_2}))q^{n_1^2+n_2^2} +$$

$$+ 2 \sum_{n_1,n_2=1}^{\infty} \chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2) (\sum_{\substack{-n_1 \le t \le n_1 \\ t-\text{нечёт}}}'' v^t(u^{n_2} - u^{-n_2}))q^{n_1^2+n_2^2} =$$

$$= 2 \sum_{d=1}^{\infty} (\sum_{n_1,n_2=d} \chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2) \sum_{\substack{-n_1 \le t \le n_1 \\ t-\text{нечёт}}}'' h(t,n_2))q^{n_1^2+n_2^2}.$$

Умножив обе части (12) на $H(u;q)H(v;q)$ и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях q^d, получим тождество

$$- \sum_{b_1^2+b_2^2+2ac=d} \chi_{-4}(b_1)\chi_{-4}(b_2)\delta_2(a)\delta_2(c)h(a+b_1, b_2+c) =$$

$$= \sum_{n_1^2+n_2^2=d} \chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)(n_2h(n_1,n_1) - 2 \sum_{\substack{-n_1 \le t \le n_1 \\ t-\text{нечёт}}}'' h(t,n_2)). \quad (13)$$

Проведённые выкладки показывают, что тождество (12) вытекает из следующего утверждения.

Теорема 6. *Пусть* $h : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$ *произвольная функция, для которой* $h(m_1,m_2) = h(m_2,m_1) = -h(-m_1,-m_2) \quad (m_1,m_2 \in \mathbb{Z})$. *Тогда для любого натурального* d *выполняется тождество* (13).

Доказательство. Положим в тождестве (11)

$$G(m) = \chi_{-4}(m_2)\chi_{-4}(m_3)\delta_2(m_1)\delta_2(m_4)h(m_1+m_2, -m_3+m_4).$$

Тогда

$$\sum_{b_1^2+b_2^2+2ac=d} G(a+b_1+b_2-c, -b_1+c, -b_2+c, c) =$$

$$= \sum_{\substack{b_1^2+b_2^2+2ac=d \\ a,c-\text{чёт}}} \chi_{-4}(-b_1+c)\chi_{-4}(-b_2+c)h(a+b_2,b_2).$$

Так как

$$\chi_{-4}(-b_1+2c_1) = -\chi_{-4}(b_1-2c_1) = -\chi_{-4}(b_1+2c_1),$$

то при замене $b_1 \to -b_1$ все слагаемые в последней сумме поменяют знак, и поэтому она равна нулю.

Далее,

$$\sum_{b_1^2+b_2^2+2ac=d} G(a,b_1,b_2,c) = \sum_{\substack{b_1^2+b_2^2+2ac=d \\ a,c-\text{чёт}}} \chi_{-4}(b_1)\chi_{-4}(b_2)h(a+b_1,-b_2+c).$$

После замены $b_2 \to -b_2$ правая часть превратится в левую часть тождества (13).

Воспользовавшись заменами $a+b_1=m_1$ и $a+b_2=m_2$, а также равенствами

$$\chi_{-4}(2a_1+b_2) = (-1)^{a_1}\chi_{-4}(b_2), \quad \chi_{-4}(2a_1+b_1) = (-1)^{a_1}\chi_{-4}(b_1),$$

представим правую часть (11)

$$\sum_{\substack{(a+b_1)^2+(a+b_2)^2=d \\ a+b_1+b_2>0}} \{\chi_{-4}(b_1)\chi_{-4}(b_2)h(a+b_1,a+b_1) - 2\chi_{-4}(a+b_2)\chi_{-4}(a+b_1)h(a+b_2,b_2)\}$$

как сумму двух слагаемых:

$$\sum_{\substack{m_1^2+m_2^2=d \\ m_1+m_2>0}} \sum_{\substack{0<a<m_1+m_2 \\ a-\text{чётное}}} \chi_{-4}(m_1)\chi_{-4}(m_2)h(m_1,m_1), \tag{14}$$

$$-2\sum_{\substack{m_1^2+m_2^2=d \\ m_1+m_2>0}} \sum_{\substack{0<a<m_1+m_2 \\ a-\text{чётное}}} \chi_{-4}(m_1)\chi_{-4}(m_2)h(m_2,m_2-a). \tag{15}$$

Разбивая область суммирования

$$\{(m_1,m_2)|m_1^2+m_2^2=d, m_1+m_2>0\}$$

на непересекающиеся три с

$$m_1=n_1>0 \quad \text{и} \quad m_2=n_2>0,$$
$$m_1=-n_1<0 \quad \text{и} \quad m_2=n_2>0,$$
$$m_1=n_1>0 \quad \text{и} \quad m_2=-n_2<0, \tag{16}$$

для суммы (14) получим выражение

$$\sum_{n_1^2+n_2^2=d} \chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)(\frac{n_1+n_2}{2}-1)h(n_1,n_1)+$$

$$+\sum_{\substack{n_1^2+n_2^2=d\\ n_1<n_2}}\chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)(\frac{-n_1+n_2}{2}-1)h(n_1,n_1)-$$

$$-\sum_{\substack{n_1^2+n_2^2=d\\ n_1>n_2}}\chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)(\frac{n_1-n_2}{2}-1)h(n_1,n_1)=\sum_{n_1^2+n_2^2=d}\chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)n_2h(n_1,n_1)-$$

$$-2\sum_{\substack{n_1^2+n_2^2=d\\ n_1<n_2}}\chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)h(n_1,n_1)-\sum_{\substack{n_1^2+n_2^2=d\\ n_1=n_2}}\chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)h(n_1,n_1).$$

Выполнив замену $t=m_2-a$, перепишем сумму из (15) в виде

$$-2\sum_{\substack{m_1^2+m_2^2=d\\ m_1+m_2>0}}\ \sum_{\substack{-m_1<t<m_2\\ t-\text{нечётное}}}\chi_{-4}(m_1)\chi_{-4}(m_2)h(t,m_2),$$

которая в соответствии с (16) разобьётся в сумму трёх слагаемых:

$$-2\sum_{n_1^2+n_2^2=d}\ \sum_{\substack{-n_1<t<n_2\\ t-\text{нечётное}}}\chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)h(t,n_2),$$

$$2\sum_{\substack{n_1^2+n_2^2=d\\ n_1<n_2}}\ \sum_{\substack{n_1<t<n_2\\ t-\text{нечётное}}}\chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)h(t,n_2),$$

$$-2\sum_{\substack{n_1^2+n_2^2=d\\ n_1>n_2}}\ \sum_{\substack{n_2<t<n_1\\ t-\text{нечётное}}}\chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)h(t,n_2).$$

При этом в третьем случае мы воспользовались заменой $t\to-t$ и равенством $h(-t,-n_2)=-h(t,n_2)$. Разбивая первую из этих сумм на три в соответствии с условиями

$$n_1<n_2,\quad n_1=n_2,\quad n_1>n_2,$$

и добавляя к ним оставшиеся две получим выражение

$$-2\sum_{\substack{n_1^2+n_2^2=d\\ n_1<n_2}}\ \sum_{\substack{-n_1<t<n_1\\ t-\text{нечётное}}}\chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)h(t,n_2)-2\sum_{\substack{n_1^2+n_2^2=d\\ n_1>n_2}}\cdots-2\sum_{\substack{n_1^2+n_2^2=d\\ n_1=n_2}}\cdots-$$

$$-2\sum_{\substack{n_1^2+n_2^2=d\\ n_1<n_2}}\chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)h(n_1,n_2)+2\sum_{\substack{n_1^2+n_2^2=d\\ n_1>n_2}}\chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)h(n_2,n_2).$$

Первые три суммы можно записать в виде одной

$$-2\sum_{n_1^2+n_2^2=d}\ \sum_{\substack{-n_1<t<n_1\\ t-\text{нечётное}}}\chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)h(t,n_2).$$

Четвёртую с помощью замены $(n_1, n_2) \to (n_2, n_1)$ преобразуем к виду

$$-\sum_{n_1^2+n_2^2=d} \chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)h(n_1,n_2) + \sum_{\substack{n_1^2+n_2^2=d\\ n_1=n_2}} \ldots .$$

В результате для суммы (15) получаем выражение

$$-2\sum_{n_1^2+n_2^2=d} \sum_{\substack{-n_1<t<n_1\\ t-\text{нечётное}}} \chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)h(t,n_2) - \sum_{n_1^2+n_2^2=d} \chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)h(n_1,n_2)+$$

$$+\sum_{\substack{n_1^2+n_2^2=d\\ n_1=n_2}} \chi_{-4}(n_2)h(n_1,n_1) + 2\sum_{\substack{n_1^2+n_2^2=d\\ n_1<n_2}} \chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)h(n_1,n_1).$$

Так как при замене $(n_1, n_2) \to (n_2, n_1)$ величина $h(-n_1, n_2)$ меняет знак, то

$$\sum_{n_1^2+n_2^2=d} \chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)h(-n_1,n_2) = 0.$$

Объединив все эти вычисления вместе, получим выражение для правой части тождества (13) в виде суммы выражений из (14) и (15). Теорема 5 полностью доказана. □

Список литературы

[1] C. G. J. Jacobi, *Gesammelte Werke*, **1**, Berlin, 1881.

[2] L. E. Dickson, *History of the Theory of Numbers*, **2**, Chelsea Pub. Co., New York, 1952.

[3] J. V. Uspensky, M. A. Heaslet, *Elementary Number Theory*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York and London, 1939.

[4] Б. А. Венков, *Элементарная теория чисел*, ОНТИ НКТП СССР, М. ; Ленинград, 1937.

[5] Kenneth S. Williams, *Number theory in the spirit of Liouville*, London Mathematical Society Student Texts, 76, Cambridge University Press, 2011.

[6] C. F. Gauss, *Werke*, **II**, Gottingen, 1863.

[7] R. Fricke, *Die Elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen*, **1**, Springer, Berlin, 2011.

[8] J. Ouspensky, "Sur les relations entre les nombres des classes des formes quadratiques binaires et positives. Premier Memoire, I", *Известия Академии Наук. VI серия*, **19**:12-15 (1925), 599–620.

[9] Н. В. Бударина, В. А. Быковский, "Арифметическая природа тождесв для тройного и пятикратного произведений", *Дальневосточный математический журнал*, **11**:2 (2011), 140–148.

[10] G. N. Watson, "Theorems stated by Ramanujan (VII): theorems on a continued fraction", *J. London Math. Soc.*, **4** (1929), 39–48.

[11] A. O. L. Atkin, P. Swinnerton-Dyer, "Some properties of partitions", *Proc. London Math. Soc. (3)*, **4** (1954), 84–106.

[12] B. Gordon, "Some identities in combinatorial analysis", *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **12** (1961), 285–290.

[13] А. А. Клячко, “Модулярные формы и представления симметрических групп”, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **116**, 1982, 74–85.

[14] H. M. Weber, *Lehrbuch der Algebra*, **3**, Braunschweig, 1908.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 1 марта 2013 г.

Работа поддержана грантами ведущей научной школы НШ-1922.2012.1 и РФФИ №13-01-91151-ГФЕН-а.

Bykovskii V. A., Monina M. D. On the arithmetic nature of some identities of the elliptic functions theory. Far Eastern Mathematical Journal. 2013. V. 13. № 1. P. 15–34.

ABSTRACT

The article offers a new arithmetic method of proof of the classical triple, quintuple and octuple product identities of the theta functions theory.

Key words: *theta function, Liouville's identity, infinite product.*