Дальневосточный математический журнал. 2013. Том 13. № 1. С. 35–42

УДК 514.743
MSC2010 74A10

© М. А. Гузев, C. Qi[1]

Вывод уравнений градиентной теории в криволинейных координатах

Для градиентной теории получены уравнения равновесия в криволинейных координатах.

Ключевые слова: *градиентная теория, криволинейные координаты.*

1. Введение

В начале 1960-х годов Toupin [1] и Mindlin [2] предложили градиентную теорию деформации, в которой предполагается, что энергия зависит как от деформации, так и градиента деформации. Последующее развитие теории было выполнено по различным направлениям, при этом разработанные методы и подходы использовались для разнообразных приложений (см., например, [3]–[7]). Дело в том, что обычные теории континуума не в состоянии справиться со многими проблемами механики сплошной среды из-за отсутствия в них параметров длины, которые определяют масштаб микроструктуры. Применение прикладных вариантов градиентной модели привело к решению ряда проблем в механике материалов. В частности, были исследованы вопросы локализации деформаций, различные масштабные эффекты на микроуровне, включая изменение механических свойств нанокомпозитов (см., например, [8]–[15]) и др.. Возможности использования градиентной теории для макроскопического описания материалов представлены в [16], а связь кинематических параметров градиентной модели с внутренними геометрическими характеристиками материала указана в [17], [18].

Однако модель [1, 2] была сформулирована в декартовых прямоугольных координатах. Если для исследуемой задачи криволинейные координаты являются естественными по геометрии, то уравнения градиентной теории не могут быть получены автоматически из [1, 2]. Поэтому для решения практических задач было бы весьма желательно иметь набор общих формул для уравнений градиентной теории деформации в криволинейных координатах. Насколько известно авторам, попытка

[1]Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, 1 Zhanlanguan road, Xicheng district, Beijing, 100044, China. Электронная почта: `guzev@iam.dvo.ru`, `qczbicea@yahoo.com.cn`

выполнить такую работу была предпринята в [19]. Предложенный в этой статье подход указан на стр. 3511 статьи [19]: “Eringen (1967) suggested that the translation from rectangular coordinates to any curvilinear coordinates follows the following two rules: (a) The partial differentiation symbol (,) must be replaced by the covariant differentiation symbol (;), (b) The repeated indices must be on diagonal positions”. Но знакомство с содержанием [20] показывает, что систематический вывод указанного выше способа получения уравнений для градиентной теории в криволинейных координатах отсутствует. Поэтому целью настоящей статьи является восполнение данного пробела.

2. Основные соотношения

Уравнения градиентной теории деформации в прямоугольной системе координат могут быть получены вариационным способом [1–3]. Уравнения равновесия записываются в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\sigma_{ij}+\frac{\partial}{\partial x_k}T_{ijk}\right]+f_i=0, \tag{1}$$

где подразумевается, что по любой паре повторяющихся индексов выполняется суммирование, слагаемое f_i обозначает компоненту объемной силы. Структура поля внутренних напряжений складывается из поля упругих напряжений σ_{ij} и дополнительного поля градиентных напряжений $\partial T_{ijk}/\partial x_k$. Уравнения (1) представлены в прямоугольной системе координат x_i. Введем криволинейные координаты z^α, связанные с x_i посредством гладкого невырожденного преобразования:

$$z^\alpha = z^\alpha(x_1,x_2,x_3), z^\alpha = z^\alpha(\mathbf{x}). \tag{2}$$

Предполагается, что соответствие между координатами $\{x_i\}$ и $\{z^\alpha\}$ является взаимно однозначным, тогда существует единственное обратное отображение для (2):

$$x_i = x_i(z^1,z^2,z^3), x_i = x_i(\mathbf{z}). \tag{3}$$

В соотношениях (2), (3) координаты указаны с верхними и нижними индексами, что в геометрической терминологии означает рассмотрение контравариантных и ковариантных компонент вектора соответственно. Но в прямоугольной системе координат между этими компонентами не существует различия, то есть $x_i = x^i$. Это предположение является непротиворечивым, поскольку в криволинейной системе координат переход от верхних к нижним индексам выполняется с помощью метрического тензора, который для декартовой системы является единичным $g_{ij}(\mathbf{x}) = \delta_{ij}$. Тогда справедлива цепочка соотношений, определяющих операцию поднятия и опускания индексов:

$$\sigma^{ij}(\mathbf{x})=g^{ik}(\mathbf{x})g^{jm}(\mathbf{x})\sigma_{km}(\mathbf{x})=\sigma_{ij}(\mathbf{x})=g^{ik}(\mathbf{x})\sigma_k^j(\mathbf{x})=\sigma_i^j(\mathbf{x}),\quad \frac{\partial}{\partial x_i}=g^{ik}(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x^k}=\frac{\partial}{\partial x^i},$$

где компоненты $g^{ik}(\mathbf{x}) \equiv (g^{-1})_{ik}(\mathbf{x}) = \delta^{ik} = \delta^i_k = \delta_{ik}$ равны единице при совпадении индексов и нулю – в противоположном случае (символ Кронекера).

При переходе от прямоугольных координат к криволинейным координатам компоненты тензоров $f_k(\mathbf{x}), \sigma_{ij}(\mathbf{x})$ и $T_{ijk}(\mathbf{x})$ преобразуются согласно правилу

$$\begin{aligned} f_\alpha(\mathbf{z}) &= \frac{\partial x^i}{\partial z^\alpha} f_i(\mathbf{x}), \quad \sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{z}) = \frac{\partial x^i}{\partial z^\alpha}\frac{\partial x^k}{\partial z^\beta}\sigma_{ik}(\mathbf{x}), \quad T_{\alpha\beta\mu}(\mathbf{z}) = \frac{\partial x^i}{\partial z^\alpha}\frac{\partial x^k}{\partial z^\beta}\frac{\partial x^n}{\partial z^\mu} T_{ikn}(\mathbf{x}), \\ f_k(\mathbf{x}) &= \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^k} f_\alpha(\mathbf{z}), \quad \sigma_{ik}(\mathbf{x}) = \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^k}\frac{\partial z^\beta}{\partial x^k}\sigma_{\alpha\beta}(\mathbf{z}), \quad T_{ijk}(\mathbf{x}) = \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial z^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial z^\mu}{\partial x^k} T_{\alpha\beta\mu}(\mathbf{z}). \end{aligned} \tag{4}$$

Метрический тензор $g_{ij}(\mathbf{z})$ в криволинейных координатах равен

$$g_{\alpha\beta}(\mathbf{z}) = \frac{\partial x^k}{\partial z^\alpha}\frac{\partial x^k}{\partial z^\beta}. \tag{5}$$

Он позволяет вычислить квадрат элемента длины $(ds)^2 = g_{\alpha\beta}(\mathbf{z}) dz^\alpha dz^\beta$ и определяет переход от ковариантных к контравариантным компонентам тензора, в частности,

$$\sigma^\alpha_\beta(\mathbf{z}) = g^{\alpha\gamma}(\mathbf{z})\sigma_{\gamma\beta}(\mathbf{z}), \quad T^{\alpha\nu}_\beta(\mathbf{z}) = g^{\alpha\gamma}(\mathbf{z}) g^{\nu\mu}(\mathbf{z}) T_{\beta\gamma\mu}(\mathbf{z}), \quad g^{\alpha\beta}(\mathbf{z}) = \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^k}\frac{\partial z^\beta}{\partial x^k}. \tag{6}$$

Величины $g^{\alpha\beta}(\mathbf{z})$ образуют обратный метрический тензор, то есть $g^{\alpha\beta}(\mathbf{z}) g_{\beta\gamma}(\mathbf{z}) = \delta^\alpha_\gamma$. Дальнейшая задача состоит в том, чтобы представить уравнение равновесия (1) в терминах объектов (6).

3. Уравнения равновесия в криволинейных координатах

Производные $\partial/\partial x_i$ связаны с $\partial/\partial z^\alpha$ соотношением

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial z^\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial z^\alpha}. \tag{7}$$

Используя (4), (7), запишем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x^j}\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\left[\frac{\partial z^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial z^\gamma}{\partial x^j}\sigma_{\beta\gamma}(\mathbf{z})\right] = \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\left[\frac{\partial z^\beta}{\partial x^i}\right]\frac{\partial z^\gamma}{\partial x^j}\sigma_{\beta\gamma}(\mathbf{z}) + \\ + \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial z^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\left[\frac{\partial z^\gamma}{\partial x^j}\right]\sigma_{\beta\gamma}(\mathbf{z}) + \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial z^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial z^\gamma}{\partial x^j}\frac{\partial \sigma_{\beta\gamma}(\mathbf{z})}{\partial z^\alpha}. \end{aligned} \tag{8}$$

В первом и последнем слагаемом соотношения (8) свертка по j дает компоненты обратного метрического тензора (6), тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\left[\frac{\partial z^\beta}{\partial x^i}\right]\frac{\partial z^\gamma}{\partial x^j}\sigma_{\beta\gamma}(\mathbf{z}) + \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^j}\frac{\partial z^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial z^\gamma}{\partial x^j}\frac{\partial \sigma_{\beta\gamma}(\mathbf{z})}{\partial z^\alpha} = \\ = g^{\alpha\gamma}(\mathbf{z})\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\left[\frac{\partial z^\beta}{\partial x^i}\right]\sigma_{\beta\gamma}(\mathbf{z}) + g^{\alpha\gamma}(\mathbf{z})\frac{\partial z^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial \sigma_{\beta\gamma}(\mathbf{z})}{\partial z^\alpha}. \end{aligned} \tag{9}$$

Производную $\partial\left[...\right]/\partial z^\alpha$ нетрудно получить дифференцированием из тождества $\partial x^i/\partial z^\gamma \times \partial z^\beta/\partial x^i = \delta^\beta_\gamma$:

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial z^\alpha \partial z^\gamma}\frac{\partial z^\beta}{\partial x^i} + \frac{\partial x^i}{\partial z^\gamma}\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\left[\frac{\partial z^\beta}{\partial x^i}\right] = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z^\alpha}\left[\frac{\partial z^\beta}{\partial x^i}\right] = -\frac{\partial^2 x^n}{\partial z^\alpha \partial z^\gamma}\frac{\partial z^\beta}{\partial x^n}\frac{\partial z^\gamma}{\partial x^i}.$$

Последнее выражение записывается через символы Кристоффеля $\Gamma^\beta_{\alpha\gamma} = \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}(\mathbf{z})$:

$$\Gamma^\beta_{\alpha\gamma} = \frac{\partial^2 x^n}{\partial z^\alpha \partial z^\gamma}\frac{\partial z^\beta}{\partial x^n}, \quad \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} = \Gamma^\beta_{\gamma\alpha}, \quad \frac{\partial}{\partial z^\alpha}\left[\frac{\partial z^\beta}{\partial x^i}\right] = -\Gamma^\beta_{\alpha\gamma}\frac{\partial z^\gamma}{\partial x^i}. \tag{10}$$

Подставляя (9), (10) в (8), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\partial z^\beta}{\partial x^i} g^{\alpha\gamma}(\mathbf{z})\left[\frac{\partial \sigma_{\beta\gamma}(\mathbf{z})}{\partial z^\alpha} - \Gamma^\nu_{\beta\alpha}\sigma_{\nu\gamma}(\mathbf{z}) - \Gamma^\nu_{\gamma\alpha}\sigma_{\beta\nu}(\mathbf{z})\right] \equiv \frac{\partial z^\beta}{\partial x^i} g^{\alpha\gamma}(\mathbf{z})\nabla_\alpha \sigma_{\beta\gamma}(\mathbf{z}). \tag{11}$$

Выражение в квадратных скобках определяет ковариантную производную тензора напряжений $\nabla_\alpha \sigma_{\beta\gamma}(\mathbf{z})$. Ясно, что

$$g^{\alpha\gamma}(\mathbf{z})\nabla_\alpha \sigma_{\beta\gamma}(\mathbf{z}) = \frac{\partial g^{\alpha\gamma}(\mathbf{z})\sigma_{\beta\gamma}(\mathbf{z})}{\partial z^\alpha} - \frac{\partial g^{\alpha\gamma}(\mathbf{z})}{\partial z^\alpha}\sigma_{\beta\gamma}(\mathbf{z}) - \Gamma^\nu_{\alpha\beta} g^{\alpha\gamma}(\mathbf{z})\sigma_{\nu\gamma}(\mathbf{z}) - \Gamma^\nu_{\alpha\gamma} g^{\alpha\gamma}(\mathbf{z})\sigma_{\beta\nu}(\mathbf{z}). \tag{12}$$

Из (6) следует

$$\frac{\partial g^{\alpha\gamma}(\mathbf{z})}{\partial z^\beta} = \frac{\partial}{\partial z^\beta}\left[\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^k}\right]\frac{\partial z^\gamma}{\partial x^k} + \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial z^\beta}\left[\frac{\partial z^\gamma}{\partial x^k}\right].$$

Подставляя сюда (10), получаем

$$\frac{\partial g^{\alpha\gamma}(\mathbf{z})}{\partial z^\beta} = -\Gamma^\alpha_{\nu\beta} g^{\nu\gamma}(\mathbf{z}) - \Gamma^\gamma_{\nu\beta} g^{\alpha\nu}(\mathbf{z}). \tag{13}$$

Комбинирование (12), (13) дает

$$g^{\alpha\gamma}(\mathbf{z})\nabla_\alpha \sigma_{\beta\gamma}(\mathbf{z}) = \frac{\partial g^{\alpha\gamma}(\mathbf{z})\sigma_{\beta\gamma}(\mathbf{z})}{\partial z^\alpha} + \Gamma^\alpha_{\alpha\nu} g^{\nu\gamma}(\mathbf{z})\sigma_{\beta\gamma}(\mathbf{z}) - \Gamma^\nu_{\alpha\beta} g^{\alpha\gamma}(\mathbf{z})\sigma_{\nu\gamma}(\mathbf{z}). \tag{14}$$

Используя операцию поднятия индекса (6), представим (14) в виде

$$g^{\alpha\gamma}(\mathbf{z})\nabla_\alpha \sigma_{\beta\gamma}(\mathbf{z}) = \frac{\partial \sigma^\alpha_\beta(\mathbf{z})}{\partial z^\alpha} + \Gamma^\alpha_{\nu\alpha}\sigma^\nu_\beta(\mathbf{z}) - \Gamma^\nu_{\alpha\beta}\sigma^\alpha_\nu(\mathbf{z}). \tag{15}$$

Введем ковариантную производную тензора напряжений

$$\nabla_\alpha \sigma^\gamma_\beta(\mathbf{z}) \equiv \frac{\partial \sigma^\gamma_\beta(\mathbf{z})}{\partial z^\alpha} + \Gamma^\gamma_{\nu\alpha}\sigma^\nu_\beta(\mathbf{z}) - \Gamma^\nu_{\beta\alpha}\sigma^\gamma_\nu(\mathbf{z}). \tag{16}$$

Тогда соотношение (15) эквивалентно

$$g^{\alpha\gamma}(\mathbf{z})\nabla_\alpha \sigma_{\beta\gamma}(\mathbf{z}) = \nabla_\alpha \sigma^\alpha_\beta(\mathbf{z}). \tag{17}$$

Рассмотрим слагаемое $\partial^2 T_{ijk}/\partial x_j \partial x_k$ в (1). Тензор $T_{ijk} = T_{ijk}(\mathbf{x})$ имеет третий ранг и преобразуется согласно правилу (4). Переходя к криволинейным координатам, запишем производную от тензора $T_{ijk}(\mathbf{x})$ в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_k} T_{ijk}(\mathbf{x}) = \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \left[\frac{\partial z^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial z^\gamma}{\partial x^j} \frac{\partial z^\mu}{\partial x^k} T_{\beta\gamma\mu}(\mathbf{z}) \right] = \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \left[\frac{\partial z^\beta}{\partial x^i} \right] \frac{\partial z^\gamma}{\partial x^j} \frac{\partial z^\mu}{\partial x^k} T_{\beta\gamma\mu}(\mathbf{z}) + \\ + \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^k} \frac{\partial z^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \left[\frac{\partial z^\gamma}{\partial x^j} \right] \frac{\partial z^\mu}{\partial x^k} T_{\beta\gamma\mu}(\mathbf{z}) + \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^k} \frac{\partial z^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial z^\gamma}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \left[\frac{\partial z^\mu}{\partial x^k} \right] T_{\beta\gamma\mu}(\mathbf{z}) + \\ + \frac{\partial z^\alpha}{\partial x^k} \frac{\partial z^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial z^\gamma}{\partial x^j} \frac{\partial z^\mu}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \left[T_{\beta\gamma\mu}(\mathbf{z}) \right]. \tag{18}$$

Используя представление для коэффициента связности (10) и метрического тензора (6), получаем

$$\frac{\partial T_{ijk}(\mathbf{x})}{\partial x_k} = g^{\alpha\mu}(\mathbf{z}) \frac{\partial z^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial z^\gamma}{\partial x^j} \times \\ \times \left[\frac{\partial T_{\beta\gamma\mu}(\mathbf{z})}{\partial z^\alpha} - \Gamma^\nu_{\beta\alpha}(\mathbf{z}) T_{\nu\gamma\mu}(\mathbf{z}) - \Gamma^\nu_{\gamma\alpha}(\mathbf{z}) T_{\beta\nu\mu}(\mathbf{z}) - \Gamma^\nu_{\mu\alpha}(\mathbf{z}) T_{\beta\gamma\nu}(\mathbf{z}) \right]. \tag{19}$$

Выражение в квадратных скобках совпадает с ковариантной производной тензора $T_{\beta\gamma\mu}(\mathbf{z})$:

$$\nabla_\alpha T_{\beta\gamma\mu}(\mathbf{z}) \equiv \frac{\partial T_{\beta\gamma\mu}(\mathbf{z})}{\partial z^\alpha} - \Gamma^\nu_{\beta\alpha}(\mathbf{z}) T_{\nu\gamma\mu}(\mathbf{z}) - \Gamma^\nu_{\gamma\alpha}(\mathbf{z}) T_{\beta\nu\mu}(\mathbf{z}) - \Gamma^\nu_{\mu\alpha}(\mathbf{z}) T_{\beta\gamma\nu}(\mathbf{z}).$$

Тогда (19) записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_k} T_{ijk}(\mathbf{x}) = g^{\alpha\mu}(\mathbf{z}) \frac{\partial z^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial z^\gamma}{\partial x^j} \nabla_\alpha T_{\beta\gamma\mu}(\mathbf{z}). \tag{20}$$

Дальнейшее дифференцирование (20) приводит к следующему результату:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} T_{ijk}(\mathbf{x}) = \frac{\partial z^\nu}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial z^\nu} \left[g^{\alpha\mu}(\mathbf{z}) \frac{\partial z^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial z^\gamma}{\partial x^j} \nabla_\alpha T_{\beta\gamma\mu}(\mathbf{z}) \right] = \\ = \frac{\partial z^\nu}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial z^\nu} \left[g^{\alpha\mu}(\mathbf{z}) \right] \frac{\partial z^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial z^\gamma}{\partial x^j} \nabla_\alpha T_{\beta\gamma\mu}(\mathbf{z}) + \frac{\partial z^\nu}{\partial x^j} g^{\alpha\mu}(\mathbf{z}) \frac{\partial}{\partial z^\nu} \left[\frac{\partial z^\beta}{\partial x^i} \right] \frac{\partial z^\gamma}{\partial x^j} \nabla_\alpha T_{\beta\gamma\mu}(\mathbf{z}) + \\ + \frac{\partial z^\nu}{\partial x^j} g^{\alpha\mu}(\mathbf{z}) \frac{\partial z^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial z^\nu} \left[\frac{\partial z^\gamma}{\partial x^j} \right] \nabla_\alpha T_{\beta\gamma\mu}(\mathbf{z}) + \frac{\partial z^\gamma}{\partial x^j} g^{\alpha\mu}(\mathbf{z}) \frac{\partial z^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial z^\nu}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial z^\nu} \left[\nabla_\alpha T_{\beta\gamma\mu}(\mathbf{z}) \right]. \tag{21}$$

Производная $\partial g^{\alpha\mu}/\partial z^\gamma$ определяется из (13), тогда, используя (10), перепишем (21) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} T_{ijk}(\mathbf{x}) = g^{\alpha\mu}(\mathbf{z}) g^{\nu\gamma}(\mathbf{z}) \frac{\partial z^\beta}{\partial x^i} \times \\ \times \left[\frac{\partial \nabla_\alpha T_{\beta\gamma\mu}(\mathbf{z})}{\partial z^\nu} - \Gamma^\kappa_{\alpha\nu} \nabla_\kappa T_{\beta\gamma\mu}(\mathbf{z}) - \Gamma^\kappa_{\beta\nu} \nabla_\alpha T_{\kappa\gamma\mu}(\mathbf{z}) - \Gamma^\kappa_{\gamma\nu} \nabla_\alpha T_{\beta\kappa\mu}(\mathbf{z}) - \Gamma^\kappa_{\mu\nu} \nabla_\alpha T_{\beta\gamma\kappa}(\mathbf{z}) \right]. \tag{22}$$

Выражение в квадратных скобках определяет ковариантную производную тензора $\nabla_\alpha T_{\beta\gamma\mu}(\mathbf{z})$:

$$\nabla_\nu \nabla_\alpha T_{\beta\gamma\mu}(\mathbf{z}) = \frac{\partial \nabla_\alpha T_{\beta\gamma\mu}(\mathbf{z})}{\partial z^\nu} - \\ - \Gamma^\kappa_{\alpha\nu} \nabla_\kappa T_{\beta\gamma\mu}(\mathbf{z}) - \Gamma^\kappa_{\beta\nu} \nabla_\alpha T_{\kappa\gamma\mu}(\mathbf{z}) - \Gamma^\kappa_{\gamma\nu} \nabla_\alpha T_{\beta\kappa\mu}(\mathbf{z}) - \Gamma^\kappa_{\mu\nu} \nabla_\alpha T_{\beta\gamma\kappa}(\mathbf{z}).$$

Отсюда и из (22) получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} T_{ijk}(\mathbf{x}) = g^{\alpha\mu}(\mathbf{z}) g^{\nu\gamma}(\mathbf{z}) \frac{\partial z^\beta}{\partial x^i} \nabla_\nu \nabla_\alpha T_{\beta\gamma\mu}(\mathbf{z}). \tag{23}$$

Свойство (13) позволяет «пронести» $g^{\alpha\mu}(\mathbf{z}), g^{\nu\gamma}(\mathbf{z})$ через операцию ковариантного дифференцирования и записать выражение (23) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} T_{ijk}(\mathbf{x}) = \frac{\partial z^\beta}{\partial x^i} \nabla_\nu \nabla_\alpha [g^{\alpha\mu}(\mathbf{z}) g^{\nu\gamma}(\mathbf{z}) T_{\beta\gamma\mu}(\mathbf{z})]. \tag{24}$$

Используя операцию поднятия индекса (6), представим (24) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} T_{ijk}(\mathbf{x}) = \frac{\partial z^\beta}{\partial x^i} \nabla_\nu \nabla_\alpha T^{\nu\alpha}_\beta(\mathbf{z}). \tag{25}$$

Комбинирование (11), (17), (25) с (1) дает следующий результат:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} T_{ijk}(\mathbf{x}) + f_i = \frac{\partial z^\beta}{\partial x^i} [\nabla_\alpha \sigma^\alpha_\beta(\mathbf{z}) + \nabla_\alpha \nabla_\nu T^{\nu\alpha}_\beta(\mathbf{z})] + f_i = 0.$$

Переходя к компонентам $f_k(\mathbf{z})$ согласно (4), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} T_{ijk}(\mathbf{x}) + f_i = \nabla_\alpha \sigma^\alpha_\beta(\mathbf{z}) + \nabla_\alpha \nabla_\nu T^{\nu\alpha}_\beta(\mathbf{z}) + f_\beta(\mathbf{z}) = 0. \tag{26}$$

Отсюда видно, что сформулированный во введении способ записи уравнений в координатах полностью обоснован. Следует также отметить, что уравнения (26) представлены для произвольной криволинейной системы координат, тогда как авторы [18] рассмотрели случай ортогональной криволинейной системы координат.

Список литературы

[1] R. A. Toupin, “Elastic materials with couple stresses”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **11**:1 (1962), 385–414.

[2] R. D. Mindlin, “Micro-structure in linear elasticity”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **16**:1 (1964), 51–78.

[3] R. A. Toupin, “Theories of elasticity with couple-stress”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **17**:2 (1964), 85–112.

[4] J. L. Bleustein, “A note on the boundary conditions of Toupin’s strain-gradient theory”, *Int. J. Solids Struct.*, **3** (1967), 1053–1057.

[5] R. D. Mindlin, N. N. Eshel, “On first strain-gradient theories in linear elasticity”, *Int. J. Solids Struct.*, **4** (1968), 109–124.

[6] N. N. Eshel, G. Rosenfeld, “Axi-symmetric problems in elastic materials of grade two”, *J. Franklin Inst.*, **299**:1 (1975), 43–51.

[7] P. Germain, “The method of virtual power in continuum mechanics. Part 2: microstructure”, *SIAM J. Appl. Math.*, **25**:3 (1973), 556–575.

[8] I. Vardoulakis, E. C. Aifantis, “A gradient flow theory of plasticity for granular materials”, *Acta Mech.*, **87** (1991), 197–217.

[9] N. A. Fleck, J. W. Hutchinson, “A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity”, *J. Mech. Phys. Solids*, **41**:12 (1993), 1825–1857.

[10] N. A. Fleck, J. W. Hutchinson, “A reformulation of strain gradient plasticity”, *J. Mech. Phys. Solids*, **49** (2001), 2245–2271.

[11] R. Chambon, D. Caillerie, T. Matsuchima, “Plastic continuum with microstructure, local second gradient theories for geomaterials: localization studies”, *Int. J. Solids Struct.*, **38** (2001), 8503–8527.

[12] S. Lurie, P. Belov, N. Tuchkova, “The application of the multiscale models for description of the dispersed composites”, *Comput. Mater. Sci.*, **36**:2 (2004), 145–152.

[13] П. А. Белов, А. М. Бодунов, С. А. Лурье, И. Ф. Образцов, Ю. Г. Яновский, “О моделировании масштабных эффектов в тонких структурах”, *Механика композицонных материалов и конструкций*, **8**:4 (2002), 585–598.

[14] J. D. Zhao, D. C. Sheng, “Strain gradient plasticity by internal-variable approach with normality structure”, *Int. J. Solids Struct.*, **43** (2006), 5836–5850.

[15] J. D. Zhao, D. C. Sheng, S. W. Sloan, K. Krabbenhoft, “Limit theorems for gradient-dependent elastoplastic geomaterials”, *Int. J. Solids Struct.*, **44** (2007), 480–506.

[16] C. Qi, Q. Qian, M. Wang, and J. Chen, “Derivation of governing equations of strain gradient model of rock mass near deep level tunnels”, *Nonlinear geomechanical – geodynamic processes in deep mining*, 2^{nd} Russia-China Proceedings, July 2–5, Novosibirsk, 2012, 20–26.

[17] М. А. Гузев, “Связь нелокальной и неевклидовой моделей сплошной среды”, *Нелинейные геомеханические процессы при отработке месторождений полезных ископаемых на больших глубинах*, 2-я Российско-Китайская конференция. Сборник трудов, ИГД СО РАН, Новосибирск, 2012, 27–31.

[18] M. A. Guzev, “Comparision of non-Euclidean continuum model with strain gradient theory”, *Abstract Book of the 23^{rd} International Congress of Theoretical and Applied Mechanics*, August 19–24, 2012, Beijing, China, 144.

[19] J. Zhao, D. Pedroso, “Strain gradient theory in orthogonal curvilinear coordinates”, *International Journal of Solids and Structures*, **45** (2008), 3507–3520.

[20] A. C. Eringen, *Mechanics of Continua*, John Wiley & Sons, Inc., 1967.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 20 февраля 2013 г.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 11-01-00357-а, NSFC № 51174012, Project IDHT20130512 and the “973” Key State Research Program (grant № 010CB732003).

Guzev M. A., Qi Chengzhi Equations of the strain gradient theory in curvilinear coordinates. Far Eastern Mathematical Journal. 2013. V. 13. № 1. P. 35–42.

ABSTRACT

It is shown how to obtain the equilibrium equations of the strain gradient theory in curvilinear coordinates.

Key words: *gradient theory, curvilinear coordinates.*