Дальневосточный математический журнал. 2013. Том 13. № 1. С. 72–82

УДК 534.134
MSC2010 74B10; 74B20

© Т. Б. Лаврова[1]

Особенности распространения волн ускорений в предварительно деформированных нелинейно упругих средах

Изучаются особенности распространения волн ускорений по, вообще говоря, анизотропной, но в естественном состоянии изотропной среде. Анизотропия среды наведена посредством предварительной деформации. Использование корректной линеаризации определяющего соотношения дало возможность построить алгоритм вычисления акустического тензора по известной начальной деформации и заданному в естественном состоянии упругому потенциалу. В самых общих предположениях о начальной деформации построен акустический тензор для двух гиперупругих сред: среды с неогуковым потенциалом и среды с модифицированным потенциалом Муни – Ривлина. Показано, что закономерности распространения волн ускорений в этих средах существенно отличаются от привычных закономерностей распространения этих волн в линейно упругой среде.

Ключевые слова: *волны ускорений, упругий потенциал, тензор упругих модулей, акустический тензор, вектор поляризации, скорость распространения волн.*

Введение

Волновые явления самой разной природы и разного происхождения (как естественного, так и искусственного) являются важной составной частью окружающего нас мира, и с древнейших времен привлекали к себе внимание мыслителей, а также людей, занимающихся практической деятельностью, например, мореплавателей, строителей причалов и т.п. В новое время, когда появилась физическая наука, основанная на ньютоновской механике, исследование закономерностей распространения волн стало важным направлением в физике вообще и в механике в

[1]Самарский государственный университет, 443011, Россия, Самара, ул. Акад. Павлова, 1. Электронная почта: `lavr@ssu.samara.ru`

частности. По мере развития механики и оформления в качестве самостоятельной науки механики сплошных сред (как совокупности механики жидкости и газа и механики деформируемого твёрдого тела) исследование распространения волн в сплошных средах стало одним из важнейших разделов динамики сплошных сред (в обоих основных разделах этой науки). В самом конце XIX века и в особенности в XX веке существенное развитие получила такая область механики деформируемого твёрдого тела (МДТТ), как теория упругости (сначала в основном как линейная, а затем и как нелинейная теория). Заметим, что где-то в середине XX века произошло окончательное осознание того факта, что физически и математически адекватной и логически состоятельной может быть только нелинейная теория упругости, а классическая теория линейной упругости (в том числе и анизотропная) представляет собой частный случай линеаризации в окрестности состояний с нулевыми напряжениями. Попытки применения классической линейной упругости в вопросах, принципиально выходящих за рамки предположений, из которых она вытекает, приводят к неверным, а порой и к совершенно нелепым результатам. Последнее замечание справедливо и в отношении исследования распространения волн в предварительно деформированных (а следовательно, и в предварительно напряжённых) упругих средах, т.е. в отношении того самого направления, к которому относится настоящая работа. Её результаты, касающиеся некоторого конкретного класса изотропных упругих материалов, подтверждают и иллюстрируют тот факт, что закономерности распространения волн в деформированной упругой среде разительно отличаются от привычных закономерностей распространения волн в соответствующей линейно упругой среде. Поясним, почему рассмотрение вопроса об анизотропии распространения волн ведётся на основе модели упругого материала. Заметим, что исследования такого рода, помимо чисто академического интереса, представляют и значительный практический интерес: например, измерения, относящиеся к анизотропии распространения поперечных волн в земной коре, используются в качестве одного из геофизических методов поиска и разведки нефтегазоносных пластов [1]. При этом ясно, что горные породы, в которых распространяются сейсмические волны, весьма условно можно отнести к упругим средам. Тем не менее, для осмысленной интерпретации экспериментальных данных желательно иметь набор ключевых модельных задач, которые допускают полное и точное аналитическое решение, достоверность которого не вызывает сомнений. В МДТТ единственной математически ясной и строгой моделью материала является модель упругого материала, и современная теория упругости вполне может считаться областью математической физики, а уравнения динамической теории упругости – это усложнённый вариант одного из классических уравнений математической физики, а именно, волнового уравнения. Таким образом, исследование волновых решений уравнений динамической теории упругости даёт набор тех модельных закономерностей, которые, как можно предположить, относятся к волнам в средах более сложной природы, и эти закономерности могут быть положены в основу методики анализа соответствующих данных. В работе используется система безындексных тензорных обозначений, введенная Дж. У. Гиббсом. Эта система дополнена знаком тензорного произведения и мультииндексом для обозначения изомеров тензора [2].

1. Условие распространения волн ускорений. Акустический тензор

Волны ускорений – это распространяющиеся по частицам среды сингулярные поверхности второго порядка для движения сплошной среды, представленного как деформация отсчетной конфигурации κ. При переходе через такую поверхность скорость движения $\mathbf{v}$ и градиент деформации $\mathbf{F}$ непрерывны, а ускорение $\dot{\mathbf{v}}$, производная по времени $\dot{\mathbf{F}}$ и отсчетный градиент $\mathbf{F}$ терпят разрыв. Кинематические и геометрические условия совместности Адамара [3] связывают эти величины между собой. Пусть $\mathbf{x}$ – отсчетный радиус-вектор, t – время, ∇_κ – отсчетный градиент, $\mathbf{n}_\kappa$ – нормаль к сингулярной поверхности в отсчетной конфигурации κ, тогда условия совместности Адамара для $\mathbf{v}$ и $\mathbf{F}$ имеют вид

$$\left[\dot{\mathbf{F}}\right] = -\frac{1}{\alpha_\kappa}\mathbf{n}_\kappa \otimes [\dot{\mathbf{v}}], \qquad [\nabla_\kappa \otimes \mathbf{F}] = (\frac{1}{\alpha_\kappa})^2 \mathbf{n}_\kappa \otimes \mathbf{n}_\kappa \otimes [\dot{\mathbf{v}}], \tag{1}$$

где α_κ – скорость движения сингулярной поверхности в отсчетной конфигурации в направлении нормали $\mathbf{n}_\kappa$, $[f] = f^+ - f^-$ – скачок функции f при переходе через сингулярную поверхность. Рассмотрим уравнения движения гиперупругой среды в отсчетном описании

$$\rho_\kappa \dot{\mathbf{v}} = \nabla \cdot \mathbf{T}_\kappa + \rho_\kappa \mathbf{b}. \tag{2}$$

Предполагается, что на волне ускорения поля плотности ρ_κ, массовых сил $\mathbf{b}$, тензора напряжений Пиолы $\mathbf{T}_\kappa$ непрерывны. Тогда скачок $[\dot{\mathbf{v}}]$, как следует из (2), будет удовлетворять уравнению

$$\rho_\kappa [\dot{\mathbf{v}}] = [\nabla \cdot \mathbf{T}_\kappa]. \tag{3}$$

Применим кинематическое условие совместности Адамара к тензору напряжений Пиолы $\mathbf{T}_\kappa$ и получим соотношение

$$[\nabla \cdot \mathbf{T}_\kappa] = -\frac{1}{\alpha_\kappa}\mathbf{n}_\kappa \cdot \left[\dot{\mathbf{T}}_\kappa\right]. \tag{4}$$

Пусть среда, свойства которой изучаем, гиперупругая, $\sigma(\mathbf{F})$ – ее упругий потенциал, тогда определяющее соотношение для тензора напряжений Пиолы можно представить в виде $\dot{\mathbf{T}}_\kappa = \mathbf{C} : \dot{\mathbf{F}}$, где тензор четвертого ранга $\mathbf{C}$ есть тензор упругих модулей для тензора напряжений Пиолы (он является второй тензорной производной упругого потенциала $\mathbf{C} = \dfrac{d^2\left(\rho_\kappa \sigma(\mathbf{F})\right)}{d\mathbf{F}d\mathbf{F}}$). Тензор упругих модулей определяет инкрементально упругие свойства среды и непрерывен при переходе через волну ускорения, тогда

$$\left[\dot{\mathbf{T}}_\kappa\right] = \mathbf{C} : \left[\dot{\mathbf{F}}\right]. \tag{5}$$

С учетом соотношений (1), (4) и (5) и введенного в [2] обозначения для мультииндекса изомера тензора уравнение (3) принимает вид

$$(\alpha_\kappa)^2 \rho_\kappa [\dot{\mathbf{v}}] = \mathbf{n}_\kappa \otimes \mathbf{n}_\kappa : \mathbf{C}^{(1324)} \cdot [\dot{\mathbf{v}}]. \tag{6}$$

Примем актуальную конфигурацию в качестве отсчетной, тогда отсчетный радиус-вектор $\mathbf{x}$ перейдет в актуальный радиус-вектор $\mathbf{r}$, плотность в отсчетной конфигурации ρ_κ – в плотность в актуальной конфигурации ρ, нормаль $\mathbf{n}_\kappa$ к фронту волны ускорения в отсчетной конфигурации – в нормаль $\mathbf{n}$ к фронту волны ускорения в актуальной конфигурации, α_κ (скорость движения сингулярной поверхности в отсчетной конфигурации в направлении нормали $\mathbf{n}_\kappa$) – в собственную скорость распространения волны ускорения α (эта скорость не зависит от отсчетной конфигурации), тензор упругих модулей $\mathbf{C}(\mathbf{F})$ перейдет в $\mathbf{C}_0(\mathbf{E})$ (здесь $\mathbf{E}$ – единичный тензор второго ранга), а уравнение (6)примет вид

$$\alpha^2\rho\,[\dot{\mathbf{v}}] = \mathbf{n}\otimes\mathbf{n} : \mathbf{C}_0^{(1324)}\cdot[\dot{\mathbf{v}}]\,. \tag{7}$$

Определим акустический тензор $\mathbf{A}(\mathbf{n})$, соответствующий волновой нормали $\mathbf{n}$, следующим образом: $\mathbf{A}(\mathbf{n}) = \mathbf{n}\otimes\mathbf{n} : \mathbf{C}_0^{(1324)}$. В силу симметрии тензора $\mathbf{C}(\mathbf{F})$, как второй производной тензорной функции по тензорному аргументу, акустический тензор $\mathbf{A}(\mathbf{n})$ будет симметричным тензором второго ранга, и уравнение (7) примет форму условия распространения волны ускорений:

$$\alpha^2\rho\,[\dot{\mathbf{v}}] = \mathbf{A}(\mathbf{n})\cdot[\dot{\mathbf{v}}]\,. \tag{8}$$

Это уравнение совпадает с соответствующим уравнением для вектора поляризации $\mathbf{g}$ плоской волны малой амплитуды, которая распространяется в однородной и однородно напряженной среде. Плоская волна имеет вид $\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \mathbf{g}u(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} - ct)$, здесь $u(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n} - ct)$ – амплитуда, $\mathbf{g}$ – вектор поляризации, $\mathbf{n}$ – волновая нормаль, c – скорость распространения волны в направлении нормали. Как уже было замечено выше, $\mathbf{g}$ удовлетворяет уравнению

$$\rho_\kappa c^2\mathbf{g} = \mathbf{g}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{n}). \tag{9}$$

Дальнейшее обсуждение особенностей распространения волн ускорений ведется в следующих терминах: направление распространения $\mathbf{n}$, вектор поляризации $\mathbf{g}$. Условие (8) означает, что скачок ускорения $[\dot{\mathbf{v}}]$ (или вектор поляризации $\mathbf{g}$) должен быть собственным вектором акустического тензора $\mathbf{A}(\mathbf{n})$, соответствующим неотрицательному собственному числу. С точки зрения теории распространения волн это означает, что для любых реально существующих сред акустический тензор неотрицательно определен для любого направления распространения волны, и, следовательно, для любого направления распространения найдутся волны всех трех поляризаций, причем векторы поляризации этих волн взаимно ортогональны.

2. Корректно линеаризованное определяющее соотношение

Среда называется гиперупругой (в дальнейшем будем называть ее просто упругой), если ее внутренняя энергия σ зависит только от градиента деформации $\mathbf{F}$.

Обычно $\sigma(\mathbf{F})$, называемая упругим потенциалом, задается относительно естественной конфигурации. Будем считать среду, по которой распространяется волна ускорения, однородно деформированной. Если до того, как было произведено это деформирование, среда была изотропной, то после деформирования она становится анизотропной. Для дальнейшего вычисления акустического тензора $\mathbf{A}(\mathbf{n})$ необходимо построить тензор четвертого ранга $\mathbf{C}_0(\mathbf{E})$. А для этого нужно вывести вывести формулу преобразования упругого потенциала при замене одной отсчетной конфигурации на другую.

Пусть κ – естественная отсчетная конфигурация, $\tilde{\kappa}$ – некоторая другая конфигурация. Обозначим через $\mathbf{F}_0$ тензор второго ранга, связывающий элементарный вектор $d\mathbf{x}$ в конфигурации κ с его образом $d\tilde{\mathbf{x}}$ в конфигурации $\tilde{\kappa}$ ($d\mathbf{x} = d\tilde{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}_0$). Найдем связь между градиентом деформации $\mathbf{F}$, вычисленным относительно конфигурации κ, и градиентом деформации $\tilde{\mathbf{F}}$, вычисленным относительно новой конфигурации $\tilde{\kappa}$. Приращение радиус-вектора актуальной конфигурации $\mathbf{r}$ можно вычислить двумя способами:

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F} = d\tilde{\mathbf{x}} \cdot \tilde{\mathbf{F}} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}_0 \cdot \tilde{\mathbf{F}}. \tag{10}$$

Сравнивая эти способы (см. (9)), получим связь между $\mathbf{F}$ и $\tilde{\mathbf{F}}$: $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 \cdot \tilde{\mathbf{F}}$. Найдем теперь соответствующую связь между упругим потенциалом $\sigma_\kappa(\mathbf{F})$ (относительно отсчетной конфигурации κ) и упругим потенциалом той же среды $\sigma_{\tilde{\kappa}}(\mathbf{F})$ (относительно отсчетной конфигурации $\tilde{\kappa}$). Для этого необходимо учесть, что с помощью упругого потенциала $\sigma_\kappa(\mathbf{F})$ определяется упругая энергия деформации для элементарного объема конфигурации κ, а с помощью упругого потенциала $\sigma_{\tilde{\kappa}}(\mathbf{F})$ определяется упругая энергия деформации для элементарного объема конфигурации $\tilde{\kappa}$. Эти элементарные объемы связаны соотношением

$$dV_{\tilde{\kappa}} = \det \mathbf{F}_0 dV_\kappa. \tag{11}$$

Т.к. накопленная упругая энергия элементарного объема не зависит от отсчетной конфигурации, то должно выполняться равенство $\sigma_\kappa dV_\kappa = \sigma_{\tilde{\kappa}} dV_{\tilde{\kappa}}$. Тогда, с учетом (9) и (10) получим соотношение между упругими потенциалами:

$$\sigma_{\tilde{\kappa}}\left(\tilde{\mathbf{F}}\right) = \frac{1}{\det \mathbf{F}_0} \sigma_\kappa \left(\mathbf{F}_0 \cdot \tilde{\mathbf{F}}\right). \tag{12}$$

Пусть задан упругий потенциал $\sigma_\kappa(\mathbf{F})$. Для того чтобы получить тензор упругих модулей $\mathbf{C}_\kappa$ для конфигурации $\tilde{\kappa}$, воспользуемся тем, что он является второй производной по градиенту деформаций от упругого потенциала, взяв в качестве упругого потенциала $\tilde{\sigma}(\tilde{\mathbf{F}})$ потенциал, определяемый соотношением (11)

$$\mathbf{C}_{\tilde{\kappa}} = \frac{d^2}{d\tilde{\mathbf{F}} d\tilde{\mathbf{F}}} \left(\frac{1}{\det \mathbf{F}_0} \sigma_\kappa \left(\mathbf{F}_0 \cdot \tilde{\mathbf{F}}\right)\right). \tag{13}$$

Если конфигурация $\tilde{\kappa}$ является актуальной, то тензор $\mathbf{C}_\kappa|_{\tilde{\mathbf{F}}=\mathbf{E}}$ задает инкрементальное определяющее соотношение для тензора напряжений Пиолы $\mathbf{T}_{\tilde{\kappa}}$ при малых отклонениях от конфигурации $\tilde{\kappa}$:

$$\delta \mathbf{T}_{\tilde{\kappa}} = \mathbf{C}_{\tilde{\kappa}}|_{\tilde{\mathbf{F}}=\mathbf{E}} : \delta\, \tilde{\mathbf{F}}. \tag{14}$$

Он же инкрементально задает анизотропию первоначально изотропной среды. Если среда однородно деформирована, то нетрудно доказать, что она из изотропной становится ортотропной. Введем обозначение: $\mathbf{C}_{\tilde{\kappa}}|_{\tilde{\mathbf{F}}=\mathbf{E}} = \mathbf{C}_0(\mathbf{E})$. Определяющее соотношение (14) принципиально отличается от аналогичного соотношения для естественной конфигурации,так как тензор $\mathbf{C}_0(\mathbf{E})$ существенно зависит от предварительной деформации (см. (14)).

3. Особенности распространения волн ускорений в конкретных гиперупругих предварительно деформированных средах

В этой части работы изучаются особенности распространения волн ускорений в двух изначально изотропных, но под действием деформации ставших анизотропными, конкретных гиперупругих средах. Выбор этих сред определяется исключительно компактностью и обозримостью полученных результатов. Упругие свойства этих сред заданы с помощью упругого потенциала $\sigma_{\kappa_0}(\mathbf{F})$. В естественной конфигурации тензор $\mathbf{C}_0$, соответствующий каждому из потенциалов, совпадает с тензором упругих модулей, фигурирующим в законе Гука:

$$\mathbf{L} = 2G\mathbf{1}^{\mathrm{def}} + \left(K - \frac{2}{3}G\right)\mathbf{E}\otimes\mathbf{E}. \tag{15}$$

Для упругой изотропной среды с таким тензором упругих модулей акустический тензор имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{n}) = G\mathbf{E} + \left(K + \frac{1}{3}G\right)\mathbf{n}\otimes\mathbf{n} = \left(K + \frac{4}{3}G\right)\mathbf{n}\otimes\mathbf{n} + G\left(\mathbf{E} - \mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\right).$$

То есть в изотропной упругой среде, в естественной конфигурации в произвольном направлении $\mathbf{n}$ могут распространяться только продольная волна ускорения со скоростью $c_{||} = \sqrt{\dfrac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}}$ и две поперечные волны ускорения с одинаковыми скоростями $c_{\perp} = \sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$.

В дальнейшем для простоты предполагается, что в естественной конфигурации для рассматриваемых сред коэффициент Пуассона равен нулю, то есть в соотношении (15) $K = \dfrac{2}{3}G$.

3.1. Неогукова среда. Акустический тензор и анализ распространения волн

Рассмотрим изотропную гиперупругую среду, свойства которой задаются с помощью потенциала $\sigma_{\kappa_0} = \dfrac{G}{2}\left(\mathbf{F} : \mathbf{F} + \ln(\det\mathbf{F}\right)$. Такой потенциал называют неогуковым [4]. Этот потенциал удовлетворяет принципу независимости от системы отсчета

$$\sigma_{\kappa_0}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{Q}) = \sigma_{\kappa_0}(\mathbf{F}), \tag{16}$$

где $\mathbf{Q}$ – произвольный ортогональный тензор. Инкрементальное определяющее соотношение для такого материала вблизи естественной конфигурации является законом Гука с нулевым коэффициентом Пуассона.

Обозначим естественную конфигурацию через κ_0. В конфигурации κ, полученной из κ_0 с помощью градиента $\mathbf{F}_0$, как следует из соотношения (12),

$$\sigma_\kappa(\tilde{\mathbf{F}}) = \frac{G}{2\det\mathbf{F}}\left(\left(\mathbf{F}_0\cdot\tilde{\mathbf{F}}\right):\left(\mathbf{F}_0\cdot\tilde{\mathbf{F}}\right) + 2\ln\left(\det\mathbf{F}_0\cdot\tilde{\mathbf{F}}\right)\right). \tag{17}$$

Пусть $\mathbf{B} = \mathbf{F}_0^T\cdot\mathbf{F}_0$, тогда вторая производная $\sigma_\kappa\left(\tilde{\mathbf{F}}\right)$ по $\tilde{\mathbf{F}}$ при $\mathbf{F}=\mathbf{E}$ (см. (13) и (17)) имеет вид

$$\mathbf{C}|_{\mathbf{F}=\mathbf{E}} = \frac{G}{2\det\mathbf{F}_0} = \left[2\mathbf{1}^{\mathrm{def}} + ((\mathbf{B}_0-\mathbf{E})\otimes\mathbf{E})\right].$$

Вычисленный с помощью приведенного выше определения акустический тензор для этой среды в конфигурации κ имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{n}) = \frac{G}{\det\mathbf{F}_0}\left((\mathbf{E}-\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})\,\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{n} + (1+\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\right)$$

То есть в среде такого типа опять возможны только продольная и две поперечные волны в каждом направлении распространения $\mathbf{n}$. Однако скорость продольной волны $c_{||} = \sqrt{\dfrac{G}{\rho\det\mathbf{F}_0}(1+\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{n})}$ зависит от ориентации волновой нормали $\mathbf{n}$ в базисе собственных векторов правого тензора деформаций $\mathbf{B}_0$, который и характеризует степень деформации, а значит, и характер наведенной анизотропии. Скорость поперечных волн также зависит от $\mathbf{n}$ и вычисляется по формуле $c_\perp = \sqrt{\dfrac{G}{\rho\det\mathbf{F}_0}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{n})}$. Значит, несмотря на то что в первоначально деформированной неогуковой среде в каждом направлении $\mathbf{n}$ распространяется (как и в недеформированной) одна продольная волна и две поперечных, их скорости распространения уже не являются константами, а зависят как от предварительной деформации, так и от направления распространения. То есть признаком того, что неогукова среда уже деформирована, является то, что скорости продольных и поперечных волн при изменении направления распространения будут меняться от своего максимального значения до минимального. Эти значения зависят от наибольшего и наименьшего собственных чисел тензора $\mathbf{B}_0$. Если $\mathbf{B}_0$ – шаровой, то скорости продольной и поперечных волн будут зависеть только от его нормы и не будут зависеть от направления распространения.

3.2. Модифицированная среда Муни – Ривлина. Акустический тензор и анализ распространения волн

Рассмотрим другую начально изотропную среду с более богатыми возможностями. Упругий потенциал для этой среды имеет вид

$$\sigma_{\kappa_0} = \frac{G}{4}\left(\mathbf{F} : \mathbf{F} + \mathbf{F}^{-1} : \mathbf{F}^{-1}\right). \tag{18}$$

Такой потенциал называют модифицированным потенциалом Муни – Ривлина [4]. Этот потенциал также удовлетворяет принципу независимости от системы отсчета. Кроме того, инкрементальное определяющие соотношение для такой среды в естественной конфигурации κ_0 совпадает с аналогичным соотношением для неогуковой среды. Этот потенциал не зависит от замены $\mathbf{F}$ на $\mathbf{F}^{-1}$, то есть упругая энергия при сжатии в k раз равна упругой энергии при растяжении в k раз. В конфигурации κ, полученной из κ_0 с помощью градиента деформации $\mathbf{F}_0$, согласно (12) и (18) выполняется соотношение:

$$\sigma_\kappa(\tilde{\mathbf{F}}) = \frac{G}{4\det \mathbf{F}_0}\left(\left(\mathbf{F}_0\cdot\tilde{\mathbf{F}}\right) : \left(\mathbf{F}_0\cdot\tilde{\mathbf{F}}\right) + \left(\tilde{\mathbf{F}}^{-1}\cdot\mathbf{F}_0^{-1}\right) : \left(\tilde{\mathbf{F}}^{-1}\cdot\mathbf{F}_0^{-1}\right)\right). \tag{19}$$

Вторая производная от упругого потенциала (19) по $\tilde{\mathbf{F}}$ принимает вид

$$\mathbf{C}_0 = \frac{d^2\sigma_\kappa}{d\tilde{\mathbf{F}}d\tilde{\mathbf{F}}} = \frac{G}{2\det\mathbf{F}_0}\times$$
$$\times\left(\left(\mathbf{B}_0\otimes\mathbf{E}\right)^{(2314)} + \left(\mathbf{E}\otimes\mathbf{B}_0^{-1}\right)^{(2314)} + \left(\mathbf{E}\otimes\mathbf{B}_0^{-1}\right)^{(3214)} + \left(\mathbf{B}_0^{-1}\otimes\mathbf{E}\right)^{(3214)}\right).$$

Тогда акустический тензор модифицированной среды Муни – Ривлина в конфигурации κ определяется зависимостью

$$\mathbf{A}(\mathbf{n}) = \frac{G}{2\det\mathbf{F}_0}\left((\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{E} + \mathbf{B}_0^{-1} + \mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_0^{-1} + \mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_0^{-1}\otimes\mathbf{n}\right). \tag{20}$$

Пусть спектральное разложение $\mathbf{B}_0$ имеет вид

$$\mathbf{B}_0 = b_1\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_3.$$

Если волновая нормаль $\mathbf{n}$ совпадает с собственным вектором $\mathbf{e}_i$ тензора $\mathbf{B}_0$, то в этом направлении ($\mathbf{n} = \mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$) могут распространяться продольные и поперечные волны со скоростями $c_{i||} = \sqrt{\frac{G}{2\rho\sqrt{b_1b_2b_3}}\left(b_i + \frac{3}{b_i}\right)}$ и $c_{ik\perp} = \sqrt{\frac{G}{2\rho\sqrt{b_1b_2b_3}}\left(b_i + \frac{1}{b_k}\right)}$ $(i \neq k, k = 1, 2, 3)$.

Если волновая нормаль $\mathbf{n}$ не совпадает ни с одним собственным вектором $\mathbf{B}_0$, то в зависимости от структуры $\mathbf{B}_0$ возможны три случая.

В первом случае все собственные числа b_1, b_2, b_3 – разные. Докажем, что если $\mathbf{n}$ не является собственным вектором для тензора $\mathbf{B}_0$, то не будет ни продольных, ни поперечных волн.

Доказательство: Пусть $\mathbf{n}$ – собственный вектор $\mathbf{A}(\mathbf{n})$, тогда $\mathbf{A}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}$. С помощью (16) получим

$$\lambda \mathbf{n} = \frac{G}{2 \det \mathbf{F}_0} \left((\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n}) \, \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_0^{-1} \right).$$

Это равенство не верно, т.к., по предположению, $\mathbf{n}$ не является собственным для $\mathbf{B}_0$. Значит, в этом случае нет продольных волн ускорения.

Пусть $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = 0$, $\mathbf{g}$ – собственный вектор для $\mathbf{A}(\mathbf{n})$, тогда

$$\lambda \mathbf{g} = \frac{G}{2 \det \mathbf{F}_0} \left((\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n}) \, \mathbf{g} + \mathbf{B}_0^{-1} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_0^{-1} \cdot \mathbf{g} \right). \tag{21}$$

Умножим равенство (21) скалярно на $\mathbf{n}$ и получим, что $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_0^{-1} \cdot \mathbf{g} = 0$. Подставив этот результат обратно в (21), увидим, что $\mathbf{g}$ должен быть собственным для $\mathbf{B}_0^{-1}$, так как

$$\lambda \mathbf{g} = \frac{G}{2 \det \mathbf{F}_0} \left((\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n}) \, \mathbf{g} + \mathbf{B}_0^{-1} \cdot \mathbf{g} \right).$$

Однако этого не может быть, так как в этом случае $\mathbf{n}$, который ортогонален $\mathbf{g}$, лежал бы в плоскости, натянутой на два других собственных вектора $\mathbf{B}_0^{-1}$,что противоречит принятому предположению. Таким образом, вектор, который является собственным для $\mathbf{A}(\mathbf{n})$, не может быть ортогонален $\mathbf{n}$, что и требовалось доказать. Таким образом, при наличии начальной деформации в модифицированной среде Муни – Ривлина, которая стала ортотропной, в общем случае поляризации волн ускорений волны будут и не продольными, и не поперечными.

Пусть во втором случае $\mathbf{B}_0$ имеет собственное число кратности два. Тогда деформированная среда будет трансверсально изотропна, а $\mathbf{B}_0 = b_1 \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + b_2 \, (\mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k})$. Если волновая нормаль $\mathbf{n}$ не является собственной для $\mathbf{B}_0$, то вектор $\mathbf{g} = \mathbf{n} \times \mathbf{k}$ будет собственным, а волна ускорений с вектором поляризации, равным $\mathbf{g}$, будет поперечной, скорость ее распространения $c_\perp = \sqrt{\dfrac{G}{2\rho b_2 \sqrt{b_1}} \left(b_1 \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} + \dfrac{1}{b_2} \right)}$. Хотя векторы поляризации двух оставшихся волн ускорений для направления распространения $\mathbf{n}$ лежат в плоскости, ортогональной $\mathbf{g} = \mathbf{n} \times \mathbf{k}$, и могут быть получены с помощью простых, но достаточно громоздких вычислений, объем данной статьи не позволяет привести их. Волны не будут продольными. То есть в этом случае для каждого направления распространения, не являющегося собственным вектором для $\mathbf{B}_0$, при наличии у $\mathbf{B}_0$ собственного числа кратности два существует одна поперечная волна ускорения, две другие не будут ни продольными, ни поперечными.

В третьем случае пусть $\mathbf{B}_0 = b_1 \mathbf{E}$, тогда конфигурация κ будет по-прежнему неискаженной в смысле изотропии. Акустический тензор примет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{n}) = \frac{G}{2 b_1^{\frac{3}{2}}} \left(\left(b_1 + \frac{1}{b_1} \right) (\mathbf{E} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + \left(b_1 + \frac{2}{b_1} \right) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right). \tag{22}$$

Волны ускорений будут продольными и поперечными, скорости их распространения не зависят от волновой нормали $\mathbf{n}$, но зависят от b_1:

$$c_{||} = \sqrt{\frac{G \, (b_1^2 + 2)}{2 b_1^{\frac{5}{2}} \rho}},$$

$$c_{\perp} = \sqrt{\frac{G\left(b_1^2+1\right)}{2b_1^{\frac{5}{2}}\rho}}.$$

В этом случае картина распространения волн ускорений будет подобна соответствующей картине, полученной на основе линейной теории упругости, но упругие модули будут другими, зависящими от предварительной деформации.

Заключение

В данной работе, которая носит теоретический характер, рассмотрены закономерности распространения волн в предварительно деформированной упругой среде. Рассмотрения такого рода принципиально не могут быть проведены в рамках линейной теории упругости, поскольку если формально следовать законам линейной упругости, то придем к абсолютно неверному выводу о том, что наличие предварительных деформаций и соответствующих им напряжений никак не влияет на распространение волн ускорений. Дело в том, что линейная теория упругости некорректна в принципе, так как несовместима с фундаментальными постулатами теории определяющих соотношений и, прежде всего, с принципом материальной объективности. Она представляет собой линеаризацию корректного нелинейного определяющего соотношения в окрестности некоторого деформированного состояния, причем классическая линейная упругость даже анизотропная является результатом линеаризации вблизи состояния с нулевыми напряжениями и вообще не является каким бы то ни было приближением в окрестности других состояний. В каких-то задачах в случае малых начальных деформаций может оказаться, что применение классической линейной теории хотя и незаконно, но приводит к не слишком большим ошибкам. В других задачах, а таких немало, применение классической теории искажает результат до неузнаваемости. Например, в ней принципиально невозможно получить эффект инкрементальной ортотропии изначально изотропного упругого материала, а также порождаемые этой ортотропией поляризации и скорости распространения волн, которые в общем случае не являются ни продольными, ни поперечными, что и продемонстрировано в данной работе на примере конкретной нелинейно упругой среды.

Список литературы

[1] H. B. Lynn, “A geographysicist‘s view on seismic anisotropy”, *Seismic anisotropy*, Soc. of Exploration Geophysicists, Proc. Sixth Int. workshop on seismic anisotropy (Oklahoma), 1994, 1–11.

[2] Е. И. Рыжак, *Бескоординатное тензорное исчисление для механики сплошных сред*, МФТИ, М., 2011.

[3] К. Трусделл, *Первоначальный курс механики сплошных сред*, Мир, М., 1975.

[4] Ф. Сьярле, *Математическая теория упругости*, Мир, М., 1992.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 7 февраля 2013 г.

Lavrova T. B. The features of propagation of the acceleration waves in preliminary strained nonlinear elastic solids. Far Eastern Mathematical Journal. 2013. V. 13. № 1. P. 72–82.

ABSTRACT

The features of propagation of the acceleration waves in a solid that is anisotropic in its actual state, while being isotropic in the natural one, are studied. An algorithm for constructing the acoustic tensor given an initial strain and for elastic potential set in its natural state is derived. Under the most general assumptions on the initial strain, the acoustic tensor is constructed for the following two hyperelastic solids: the Neo – Hookean one and that with modified Mooney – Rivlin potential. It is shown that the regularities of the acceleration waves propagation in the solids differ significantly from conventional properties based on the classical linear theory of elasticity.
Key words: *accelerations waves, elastic potential, tensor of the elastic modules, acoustic tensor, polarization vector, speed of waves propagation*