Дальневосточный математический журнал. 2013. Том 13. № 1. С. 83–101

УДК 517.95
MSC2010 35A02

© Я. Т. Мегралиев[1]

Обратная краевая задача для уравнения изгиба тонких пластинок с дополнительным интегральным условием

В работе исследована одна обратная краевая задача для уравнения изгиба тонких пластинок с дополнительным интегральным условием первого рода. Сначала исходная задача сводится к эквивалентной задаче, для которой доказывается теорема существования и единственности решения. Далее, с использованием этих фактов, доказывается существование и единственность классического решения исходной задачи.

Ключевые слова: *обратная краевая задача, уравнение изгиба тонких пластинок, метод Фурье, классическое решение.*

Введение

В последнее время обратные задачи находят очень широкое применение в различных областях науки: геофизике, сейсмологии, аэродинамике, гидродинамике, теории фильтрации, теории взрыва, разведке полезных ископаемых, биологии, медицине, компьютерной томографии и др. Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались во многих работах. Отметим здесь прежде всего работы А. Н. Тихонова [1], М. М. Лаврентьева [2], [3] , В.К. Иванова [4], А. М. Денисова [5] и их учеников.

В работах [6]–[9] исследовались обратные краевые задачи для эллиптического уравнения второго порядка в прямоугольной области.

Целью данной работы является доказательство существования и единственности решения обратной краевой задачи для уравнения изгиба тонких пластинок с интегральным условиям переопределения.

[1]Бакинский Государственный Университет, АЗ1148, г. Баку, ул. З. Халилова, 23.
Электронная почта: `yashar_aze@mail.ru`

1. Постановка задачи и сведение её к эквивалентной задаче

Рассмотрим уравнение [10], [11]

$$u_{tttt}(x,t) + 2u_{ttxx}(x,t) + u_{xxxx}(x,t) = a(t)u(x,t) + f(x,t) \tag{1}$$

и поставим для него в области $D_T = \{(x,t):\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T\}$ обратную краевую задачу с граничными условиями:

$$\begin{gathered} u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x,T) = \varphi_1(x), \\ u_{tt}(x,0) = \varphi_2(x), \quad u_{ttt}(x,T) = \varphi_3(x) \quad (0 \le x \le 1), \end{gathered} \tag{2}$$

$$u(0,t) = u_x(1,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xxx}(1,t) = 0 \quad (0 \le t \le T) \tag{3}$$

и интегральным условием переопределения

$$\int_0^1 u(x,t)\,dx = h(t) \quad (0 \le t \le T), \tag{4}$$

где $f(x,t)$, $\varphi_i(x)(i = \overline{0,3})$, $h(t)$ — заданные функции, а $u(x,t)$ и $a(t)$ — искомые функции.

Условие (4) является нелокальным интегральным условием первого рода, то есть не содержит значений искомого решения в точках границы.

Определение 1. *Классическим решением обратной краевой задачи* (1)–(4) *назовем пару* $\{u(x,t),\, a(t)\}$ *функций* $u(x,t)$ *и* $a(t)$*, обладающих следующими свойствами:*

1) функция $u(x,t)$ *непрерывна в* D_T *вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение* (1)*;*

2) функция $a(t)$ *непрерывна на* $[0,T]$*;*

3) все условия (1)–(4) *удовлетворяются в обычном смысле.*

Для исследования задачи (1)–(4) сначала рассмотрим следующую задачу:

$$y^{(4)}(t) = a(t)y(t) \quad (0 \le t \le T), \tag{5}$$

$$y(0) = 0,\ y'(T) = 0,\ y''(0) = 0,\ y'''(T) = 0, \tag{6}$$

где $a(t) \in C[0,T]$ – заданная функция, а $y(t)$ – искомая функция, причём под решением задачи (5), (6) понимаем функцию $y(t)$, принадлежащую $C^4[0,T]$ и удовлетворяющую условиям (5), (6) в обычном смысле.

Доказывается следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $a(t) \in C[0,T]$ *такая, что*

$$\|a(t)\|_{C[0,T]} \le R = const.$$

Кроме того,

$$\frac{5}{12}T^4R < 1. \tag{7}$$

Тогда задача (5), (6) *имеет только тривиальное решение.*

Доказательство. Нетрудно увидеть, что задача

$$y^{(4)}(t) = 0,\ y(0) = 0,\ y'(T) = 0,\ y''(0) = 0,\ y'''(T) = 0 \tag{8}$$

имеет только тривиальное решение. Известно (см. [12]), что задача (8) имеет одну функцию Грина, а краевая задача (5), (6) эквивалентна интегральному уравнению

$$y(t) = \int\limits_0^T G(t,\tau)y(\tau)\,d\tau \quad (0 \le t \le T), \tag{9}$$

где

$$G(t,\tau) = \begin{cases} -\frac{t^3}{6} + (T\tau - \frac{\tau^2}{2})t, t \in [0,\tau], \\ -\frac{\tau^3}{6} + (Tt - \frac{t^2}{2})\tau, t \in [\tau, T]. \end{cases} \tag{10}$$

Обозначив

$$A(y(t)) = \int\limits_0^T G(t,\tau)a(\tau)y(\tau)\,d\tau, \tag{11}$$

запишем (9) в виде

$$y(t) = A(y(t)). \tag{12}$$

Уравнение (12) будем изучать в пространстве $C[0,T]$. Нетрудно увидеть, что оператор является непрерывным в пространстве $C[0,T]$. Покажем, что оператор является сжимающим в пространстве $C[0,T]$. Действительно, для любых $y(t)$, $\overline{y}(t)$ из пространства $C[0,T]$

$$\|A(y(t)) - A(\overline{y}(t))\|_{C[0,T]} \le \|a(t)\|_{C[0,T]}\,\|y(t) - \overline{y}(t)\|_{C[0,T]} \int\limits_0^T |G(t,\tau)|\,d\tau. \tag{13}$$

Из (10) получаем

$$\int\limits_0^T |G(t,\tau)|\,d\tau = \int\limits_0^t (\frac{\tau^3}{6} + (Tt - \frac{t^2}{2})\tau)\,d\tau + \int\limits_t^T (\frac{t^3}{6} + Tt\tau - \frac{t}{2}\tau^2)\,d\tau = -\frac{t^4}{4} + \frac{T}{6}t^3 + \frac{T^3}{2}t.$$

Очевидно, что функция

$$g(t) = -\frac{t^4}{4} + \frac{T}{6}t^3 + \frac{T^3}{2}t \quad (0 \le t \le T)$$

принимает наибольшее значение в $C[0,T]$ при $t = T$ и $g(T) = \frac{5}{12}T^4$.

Поэтому

$$\int\limits_0^T |G(t,\tau)|\,d\tau \le \frac{5}{12}T^4 \quad (0 \le t \le T). \tag{14}$$

Теперь из (13), с учетом (14), получаем

$$\|A(y(t)) - A(\overline{y}(t))\|_{C[0,T]} \le \frac{5}{12}T^4 \|a(t)\|_{C[0,T]} \|y(t) - \overline{y}(t)\|_{C[0,T]}\,. \tag{15}$$

Тогда, с учетом (7), из (15) следует, что оператор A является сжимающим в $C[0,T]$. Поэтому в пространстве $C[0,T]$ оператор A имеет единственную неподвижную точку $y(t)$, которая является решением уравнения (12). Таким образом, интегральное уравнение (9) имеет в $C[0,T]$ единственное решение. Так как $y(t)=0$ является решением краевой задачи (5), (6), то она имеет только одно тривиальное решение. Лемма доказана. □

Наряду с обратной краевой задачей (1)–(4) рассмотрим следующую вспомогательную обратную краевую задачу. Требуется определить пару$\{u(x,t),\ a(t)\}$ функций $u(x,t)$ и $a(t)$, обладающих свойствами 1) и 2) определения классического решения задачи (1)–(4), из соотношений (1)–(3)

$$h^{(4)}(t) - 2u_{ttx}(0,t) - u_{xxx}(0,t) = a(t)h(t) + \int_0^1 f(x,t)\,dx \quad (0 \leqslant t \leqslant T). \tag{16}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть* $\varphi_i(x) \in C[0,1]$ $(i=\overline{0,3})$, $f(x,t) \in C(D_T)$, $h(t) \in C^4[0,T]$, $h(t) \ne 0$ *при* $t \in [0,T]$ *и выполняются условия согласования*

$$\int_0^1 \varphi_0(x)\,dx = h(0), \quad \int_0^1 \varphi_1(x)\,dx = h'(T),$$

$$\int_0^1 \varphi_2(x)\,dx = h''(0), \quad \int_0^1 \varphi_3(x)\,dx = h'''(T). \tag{17}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Каждое классическое решение $\{u(x,t),a(t)\}$ *задачи* (1)–(4) *является и решением задачи* (1)–(3), (16).

2. Каждое решение $\{u(x,t),a(t)\}$ *задачи* (1)–(3), (16) *такое, что*

$$\frac{5}{12}T^4 \|a(t)\|_{C[0,T]} < 1 \tag{18}$$

является классическим решением задачи (1)–(4).

Доказательство. Пусть $\{u(x,t),a(t)\}$ является решением задачи (1)–(4). Считая $h(t) \in C^4[0,T]$ и дифференцируя четыре раза (4), получаем

$$\int_0^1 u_{tttt}(x,t)\,dx = h^{(4)}(t) \quad (0 \le t \le T). \tag{19}$$

Проинтегрировав уравнение (1) по x от 0 до 1 и учитывая условия (3), получаем

$$\frac{d^4}{dt^4}\int_0^1 u(x,t)\,dx - 2u_{ttx}(0,t) - u_{xxx}(0,t) =$$

$$a(t)\int_0^1 u(x,t)\,dx + \int_0^1 f(x,t)\,dx \quad (0 \le t \le T). \tag{20}$$

Отсюда, с учётом (4) и (19), приходим к выполнению (16).

Теперь предположим, что $\{u(x,t), a(t)\}$ является решением задачи (1)–(3), (16), причём выполнено условие (18). Тогда из (16) и (20) находим

$$\frac{d^4}{dt^4}\left(\int_0^1 u(x,t)\,dx - h(t)\right) = a(t)\left(\int_0^1 u(x,t)\,dx - h(t)\right) \quad (0 \le t \le T). \tag{21}$$

Далее, в силу выполнения условий (2) и условий согласования (17), получаем

$$\int_0^1 u\,(x,0)\,dx - h\,(0) = \int_0^1 \varphi_0\,(x)\,dx - h\,(0) = 0,$$

$$\int_0^1 u_t\,(x,T)\,dx - h'\,(T) = \int_0^1 \varphi_1\,(x)\,dx - h'\,(T) = 0,$$

$$\int_0^1 u_{tt}\,(x,0)\,dx - h''\,(0) = \int_0^1 \varphi_2\,(x)\,dx - h''\,(0) = 0,$$

$$\int_0^1 u_{ttt}\,(x,T)\,dx - h'''\,(T) = \int_0^1 \varphi_3\,(x)\,dx - h'''\,(T) = 0. \tag{22}$$

Из (21) и (22), в силу существования леммы 1, заключаем, что выполняется условие (4). Лемма доказана. □

2. Исследование существования и единственности классического решения обратной краевой задачи

Первую компоненту $u(x,t)$ решения $\{u(x,t), a(t)\}$ задачи (1)–(3), (16) будем искать в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin\lambda_k x \quad \left(\lambda_k = \frac{\pi}{2}(2k-1)\right), \tag{23}$$

где

$$u_k(t) = 2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x\,dx \quad (k = 1, 2, ...).$$

Тогда, применяя формальную схему метода Фурье, из (1) и (2) получаем

$$u_k^{(4)}(t) - 2\lambda_k^2 u_k''(t) + \lambda_k^4 u_k(t) = F_k(t; u, a) \quad (k = 1, 2, ...; 0 \le t \le T), \tag{24}$$

$$u_k(0)=\varphi_{0k}, u_k'(T)=\varphi_{1k}, u_k''(0)=\varphi_{2k}, u_k'''(T)=\varphi_{3k} \quad (k=1,2,...), \tag{25}$$

где

$$F_k(t;u,a)=f_k(t)+a(t)u_k(t), \quad f_k(t)=2\int_0^1 f(x,t)\sin\lambda_k x\,dx,$$

$$\varphi_{ik}=2\int_0^1 \varphi_i(x)\sin\lambda_k x\,dx \quad (i=\overline{0,3}; k=1,2,...).$$

Чтобы преобразовать задачу (24), (25) к задаче с однородными граничными условиями, введем новую искомую функцию

$$u_k\left(t\right)=v_k\left(t\right)+\left(\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{2}T^2t\right)\varphi_{3k}+\left(\frac{1}{2}t^2-Tt\right)\varphi_{2k}+t\varphi_{1k}+\varphi_{0k}, \tag{26}$$

где $v_k\left(t\right)$ – является решением следующей задачи:

$$v_k^{(4)}(t)-2\lambda_k^2v_k''(t)+\lambda_k^4v_k(t)=g_k(t;v_k,a) \quad (k=1,2,...;0\leq t\leq T), \tag{27}$$

$$v_k(0)=v_k'(T)=v_k''(0)=v_k'''(T)=0 \quad (k=1,2,...), \tag{28}$$

причём

$$g_k(t;v_k,a)=f_k(t)+a(t)v_k\left(t\right)+\left(a(t)-\lambda_k^4\right)\left(\left(\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{2}T^2t\right)\varphi_{3k}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2}t^2-Tt\right)\varphi_{2k}+t\varphi_{1k}+\varphi_{0k}\right)+2\lambda_k^2\left(t\varphi_{3k}+\varphi_{2k}\right). \tag{29}$$

Сначала рассмотрим однородное уравнение, соответствующее уравнению (27)

$$v_k^{(4)}(t)-2\lambda_k^2v_k''(t)+\lambda_k^4v_k(t)=0 \quad (k=1,2,...;0\leq t\leq T). \tag{30}$$

Очевидно, что общее решение уравнения (30) имеет вид

$$v_k(t)=(c_{1k}+c_{2k}t)\,\mathrm{ch}(\lambda_kt)+(c_{3k}+c_{4k}t)\,\mathrm{sh}(\lambda_kt), \tag{31}$$

где c_{1k}, c_{2k}, c_{3k}, c_{4k} – произвольные постоянные.

Можно показать, что задача

$$v_k^{(4)}(t)-2\lambda_k^2v_k''(t)+\lambda_k^4v_k(t)=0, \quad v_k(0)=v_k'(T)=v_k''(0)=v_k'''(T)=0 \tag{32}$$

имеет только тривиальное решение.

Известно (см.[12]), что задача (32) имеет одну функцию Грина, причём функцией Грина краевой задачи (32) называется функция $G_k(t,\tau)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $G_k(t,\tau)$ непрерывна и имеет непрерывные производные по t до второго порядка включительно для всех значений t и τ из интервала $[0,T]$.

2) При любом фиксированном τ из $[0,T]$ функция$G_k(t,\tau)$ имеет непрерывные производные третьего и четвертого порядка по t в каждом из интервалов $[0,\tau)$ и $(\tau,T]$, причем производная третьего порядка имеет при $t=\tau$ скачок 1:

$$G_{kttt}(\tau+0,\tau)-G_{kttt}(\tau-0,\tau)=1. \tag{33}$$

3) В каждом из интервалов $[0,\tau)$ и $(\tau,T]$ функция $G_k(t,\tau)$, рассматриваемая как функция от t, удовлетворяет уравнению (30) и краевым условиям (28).

Так как общее решение однородного уравнения (30) имеет вид (31), функция Грина для краевой задачи (32) имеет вид

$$G_k(t,\tau)=\begin{cases}(c_{1k}+c_{2k}t)\operatorname{ch}(\lambda_k t)+(c_{3k}+c_{4k}t)\operatorname{sh}(\lambda_k t), t\in[0,\tau]\\(\overline{c}_{1k}+\overline{c}_{2k}t)\operatorname{ch}(\lambda_k t)+(\overline{c}_{3k}+\overline{c}_{4k}t)\operatorname{sh}(\lambda_k t), t\in[\tau,T],\end{cases} \tag{34}$$

где c_{1k}, c_{2k}, c_{3k}, c_{4k}, $\overline{c}_{1k}$, $\overline{c}_{2k}$, $\overline{c}_{3k}$, $\overline{c}_{4k}$ – некоторые функции от τ.

Дифференцируя три раза по t (34), получаем

$$G_{kt}(t,\tau)=\begin{cases}(c_{2k}+\lambda_k(c_{3k}+c_{4k}t))\operatorname{ch}(\lambda_k t)+\\+(c_{4k}+\lambda_k(c_{1k}+c_{2k}t))\operatorname{sh}(\lambda_k t), t\in[0,\tau]\\(\overline{c}_{2k}+\lambda_k(\overline{c}_{3k}+\overline{c}_{4k}t))\operatorname{ch}(\lambda_k t)+\\+(\overline{c}_{4k}+\lambda_k(\overline{c}_{1k}+\overline{c}_{2k}t))\operatorname{sh}(\lambda_k t),\ t\in[\tau,T],\end{cases} \tag{35}$$

$$G_{ktt}(t,\tau)=\begin{cases}(2\lambda_k c_{4k}+\lambda_k^2(c_{1k}+c_{2k}t))\operatorname{ch}(\lambda_k t)+\\+(2\lambda_k c_{2k}+\lambda_k^2(c_{3k}+c_{4k}t))\operatorname{sh}(\lambda_k t), t\in[0,\tau]\\(2\lambda\ \overline{c_{4k}}+\lambda_k^2(\overline{c}_{1k}+\overline{c}_{2k}t))\operatorname{ch}(\lambda_k t)+\\+(2\lambda_k\overline{c}_{2k}+\lambda_k^2(\overline{c}_{3k}+\overline{c}_{4k}t))\operatorname{sh}(\lambda_k t), t\in[\tau,T],\end{cases} \tag{36}$$

$$G_{kttt}(t,\tau)=\begin{cases}(3\lambda_k^2c_{2k}+\lambda_k^3(c_{3k}+c_{4k}t))\operatorname{ch}(\lambda_k t)+\\+(3\lambda_k^2c_{4k}+\lambda_k^3(c_{1k}+c_{2k}t))\operatorname{sh}(\lambda_k t), t\in[0,\tau]\\(3\lambda_k^2\overline{c}_{2k}+\lambda_k^3(\overline{c}_{3k}+\overline{c}_{4k}t))\operatorname{ch}(\lambda_k t)+\\+(3\lambda_k^2\overline{c}_{4k}+\lambda_k^3(\overline{c}_{1k}+\overline{c}_{2k}t))\operatorname{sh}(\lambda_k t),\ t\in[\tau,T].\end{cases} \tag{37}$$

Тогда из (34)–(36) ясно, что условия непрерывности функции $G_k(t,\tau)$ и ее первых двух производных при $t=\tau$ дают

$$(c_{1k}+c_{2k}\tau)\operatorname{ch}(\lambda_k\tau)+(c_{3k}+c_{4k}\tau)\operatorname{sh}(\lambda_k\tau)=$$
$$=(\overline{c}_{1k}+\overline{c}_{2k}\tau)\operatorname{ch}(\lambda_k\tau)+(\overline{c}_{3k}+\overline{c}_{4k}\tau)\operatorname{sh}(\lambda_k\tau),$$

$$(c_{2k}+\lambda_k(c_{3k}+c_{4k}\tau))\operatorname{ch}(\lambda_k\tau)+(c_{4k}+\lambda_k(c_{1k}+c_{2k}\tau))\operatorname{sh}(\lambda_k\tau)=$$
$$=(\overline{c}_{2k}+\lambda_k(\overline{c}_{3k}+\overline{c}_{4k}\tau))\operatorname{ch}(\lambda_k\tau)+(\overline{c}_{4k}+\lambda_k(\overline{c}_{1k}+\overline{c}_{2k}\tau))\operatorname{sh}(\lambda_k\tau),$$

$$\left(2\lambda_k c_{4k}+\lambda_k^2(c_{1k}+c_{2k}\tau)\right)\operatorname{ch}(\lambda_k\tau)+(2\lambda_k c_{2k}+$$
$$+\lambda_k^2(c_{3k}+c_{4k}\tau)\big)\operatorname{sh}(\lambda_k\tau)=\left(2\lambda_k\overline{c}_{4k}+\lambda_k^2(\overline{c}_{1k}+\overline{c}_{2k}\tau)\right)\operatorname{ch}(\lambda_k\tau)+$$
$$+\left(2\lambda_k\overline{c}_{2k}+\lambda_k^2(\overline{c}_{3k}+\overline{c}_{4k}\tau)\right)\operatorname{sh}(\lambda_k\tau),$$

а из (37) очевидно, что условие (33) запишется в виде

$$(3\lambda_k^2\overline{c}_{2k}+\lambda_k^3(\overline{c}_{3k}+\overline{c}_{4k}\tau))\operatorname{ch}(\lambda_k\tau)+(3\lambda_k^2\overline{c}_{4k}+$$
$$+\lambda_k^3(\overline{c}_{1k}+\overline{c}_{2k}\tau))\operatorname{sh}(\lambda_k\tau)-[(3\lambda_k^2c_{2k}+\lambda_k^3(c_{3k}+c_{4k}\tau))\operatorname{ch}(\lambda_k\tau)+$$
$$+(3\lambda_k^2c_{4k}+\lambda_k^3(c_{1k}+c_{2k}\tau))\operatorname{sh}(\lambda_k\tau)]=1.$$

Положим

$$\gamma_{1k} = \overline{c}_{1k} - c_{1k}, \quad \gamma_{2k} = \overline{c}_{2k} - c_{2k},$$

$$\gamma_{3k} = \overline{c}_{3k} - c_{3k}, \quad \gamma_{4k} = \overline{c}_{4k} - c_{4k};$$

тогда эти условия запишутся в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \gamma_{1k}\ ch\,(\lambda_k\tau) + \gamma_{2k}\tau\,\mathrm{ch}\,(\lambda_k\tau) + \gamma_{3k}\,\mathrm{sh}\,(\lambda_k\tau) + \gamma_{4k}\tau\,\mathrm{sh}\,(\lambda_k\tau) = 0 \\ \gamma_{1k}\lambda_k\,\mathrm{sh}\,(\lambda_k\tau) + \gamma_{2k}\,(\mathrm{ch}\,(\lambda_k\tau) + \lambda_k\tau\,\mathrm{sh}\,(\lambda_k\tau)) + \\ +\gamma_{3k}\lambda_k\,\mathrm{ch}\,(\lambda_k\tau) + \gamma_{4k}\,(\mathrm{sh}\,(\lambda_k\tau) + \lambda_k\tau\,\mathrm{ch}\,(\lambda_k\tau)) = 0 \\ \gamma_{1k}\lambda_k^2\,\mathrm{ch}\,(\lambda_k\tau) + \gamma_{2k}\,(2\lambda_k\ sh\,(\lambda_k\tau) + \lambda_k^2\tau\,\mathrm{ch}\,(\lambda_k\tau)) + \\ +\gamma_{3k}\lambda_k^2\,\mathrm{sh}\,(\lambda_k\tau) + \gamma_{4k}\,(2\lambda_k\,\mathrm{ch}\,(\lambda_k\tau) + \lambda_k^2\tau\,\mathrm{sh}\,(\lambda_k\tau)) = 0 \\ \gamma_{1k}\lambda_k^3\,\mathrm{sh}\,(\lambda_k\tau) + \gamma_{2k}\,(3\lambda_k^2\ ch\,(\lambda_k\tau) + \lambda_k^3\tau\,\mathrm{sh}\,(\lambda_k\tau)) + \\ +\gamma_{3k}\lambda_k^3\,\mathrm{ch}\,(\lambda_k\tau) + \gamma_{4k}\,(3\lambda_k^2\,\mathrm{sh}\,(\lambda_k\tau) + \lambda_k^3\tau\,\mathrm{ch}\,(\lambda_k\tau)) = 1, \end{cases} \tag{38}$$

определитель которой есть вронскиан фундаментальной системы $\mathrm{ch}\,(\lambda_k t)$, $t\,\mathrm{ch}\,(\lambda_k t)$, $\mathrm{sh}\,(\lambda_k t)$, $t\,\mathrm{sh}\,(\lambda_k t)$ при $t = \tau$ и, следовательно, отличен от нуля.

Поэтому система (38) однозначно определяет функцию γ_{ik} $(i = \overline{1,4})$:

$$\begin{cases} \gamma_{1k} = -\frac{1}{2\lambda_k^3}\,(\lambda_k\tau\,\mathrm{ch}\,(\lambda_k\tau) - \mathrm{sh}\,(\lambda_k\tau)) \\ \gamma_{2k} = \frac{1}{2\lambda_k^2}\,\mathrm{ch}\,(\lambda_k\tau) \\ \gamma_{3k} = -\frac{1}{2\lambda_k^3}\,(\mathrm{ch}\,(\lambda_k\tau) - \lambda_k\tau\,\mathrm{sh}\,(\lambda_k\tau)) \\ \gamma_{4k} = -\frac{1}{2\lambda_k^2}\,\mathrm{sh}\,(\lambda_k\tau)\,. \end{cases} \tag{39}$$

Очевидно, что

$$\overline{c}_{1k} = c_{1k} + \gamma_{1k}, \quad \overline{c}_{2k} = c_{2k} + \gamma_{2k},$$

$$\overline{c}_{3k} = c_{3k} + \gamma_{3k}, \quad \overline{c}_{4k} = c_{4k} + \gamma_{4k},$$

причем γ_{ik} $(i = \overline{1,4})$ определяется по формулам (39).

Подставляя последнее соотношение в (34), после некоторых вычислений получим

$$G_k(t,\tau) = \begin{cases} (c_{1k} + c_{2k}t)\,\mathrm{ch}(\lambda_k t) + (c_{3k} + c_{4k}t)\,\mathrm{sh}(\lambda_k t), t \in [0,\tau] \\ (c_{1k} + c_{2k}t)\,\mathrm{ch}(\lambda_k t) + (c_{3k} + c_{4k}t)\,\mathrm{sh}(\lambda_k t) - \\ -\frac{1}{2\lambda_k^2}\left[\frac{1}{\lambda_k}\,\mathrm{sh}\,(\lambda_k\,(t-\tau)) - (t-\tau)\,\mathrm{ch}\,(\lambda_k\,(t-\tau))\right], t \in [\tau, T]\,, \end{cases} \tag{40}$$

где c_{ik} $(i = \overline{1,4})$ – некоторые произвольные постоянные.

Для определения c_{ik} $(i = \overline{1,4})$ воспользуемся краевыми условиями (28). Тогда

$$\begin{cases} c_{1k} = 0 \\ c_{4k} = 0 \\ (\,\mathrm{ch}\,(\lambda_k T) + \lambda_k T\,\mathrm{sh}\,(\lambda_k T))\,c_{2k} + c_{3k}\lambda_k\,\mathrm{ch}\,(\lambda_k T) = -\frac{1}{2\lambda_k}\,(T-\tau)\,\mathrm{sh}\,(\lambda_k\,(T-\tau)) \\ (3\lambda_k^2\,\mathrm{ch}\,(\lambda_k T) + \lambda_k^3 T\,\mathrm{sh}\,(\lambda_k T))\,c_{2k} + c_{3k}\lambda_k^3\,\mathrm{ch}\,(\lambda_k T) = \\ = -\,\mathrm{ch}\,(\lambda_k\,(T-\tau)) - \frac{\lambda_k}{2}\,(T-\tau)\,\mathrm{sh}\,(\lambda_k\,(T-\tau))\,. \end{cases}$$

Решая последнюю систему, находим

$$\begin{cases} c_{1k} = 0 \\ c_{2k} = -\frac{\operatorname{ch}(\lambda_k(T-\tau))}{2\lambda_k^2 \operatorname{ch}(\lambda_k T)} \\ c_{3k} = \frac{1}{2\lambda_k^3 \operatorname{ch}^2(\lambda_k T)} \left[(\operatorname{ch}(\lambda_k T) + \lambda_k T \operatorname{sh}(\lambda_k T)) \operatorname{ch}(\lambda_k(T-\tau)) - \right. \\ \left. -\lambda_k(T-\tau) \operatorname{sh}(\lambda_k(T-\tau)) \operatorname{ch}(\lambda_k T) \right] \\ c_{4k} = 0. \end{cases}$$

Подставляя полученные выражения c_{ik} $(i = \overline{1,4})$ в (40), с помощью некоторых преобразований получим функцию Грина для краевой задачи (32):

$$G_k(t,\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2\lambda_k^3 \operatorname{ch}^2(\lambda_k T)} [-\lambda_k t \operatorname{ch}(\lambda_k T) \operatorname{ch}(\lambda_k(T-\tau)) \operatorname{ch}(\lambda_k t) + \\ +(\lambda_k \tau \operatorname{ch}(\lambda_k T) \operatorname{sh}(\lambda_k(T-\tau)) + \\ +\lambda_k T \operatorname{sh}(\lambda_k \tau) + \operatorname{ch}(\lambda_k T) \operatorname{ch}(\lambda_k(T-\tau))) \operatorname{sh}(\lambda_k t)], t \in [0,\tau], \\ \frac{1}{2\lambda_k^3 \operatorname{ch}^2(\lambda_k T)} [-\lambda_k \tau \operatorname{ch}(\lambda_k T) \operatorname{ch}(\lambda_k(T-t)) \operatorname{ch}(\lambda_k \tau) + \\ +(\lambda_k t \operatorname{ch}(\lambda_k T) \operatorname{sh}(\lambda_k(T-t)) + \\ +\lambda_k T \operatorname{sh}(\lambda_k t) + \operatorname{ch}(\lambda_k T) \operatorname{ch}(\lambda_k(T-t))) \operatorname{sh}(\lambda_k \tau)], t \in [\tau, T]. \end{cases} \tag{41}$$

Известно [12], что краевая задача (27), (28) эквивалентна интегральному уравнению

$$v_k(t) = \int_0^T G_k(t,\tau) g_k(\tau; v_k, a)\, d\tau \quad (0 \le t \le T)\,. \tag{42}$$

Подставляя (42) в (26) и учитывая (29), находим

$$u_k(t) = v_k(t) + \left(\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}T^2 t\right)\varphi_{3k} + \left(\frac{1}{2}t^2 - Tt\right)\varphi_{2k} + t\varphi_{1k} + \varphi_{0k} +$$

$$\int_0^T G_k(t,\tau) \left[F_k(\tau; u_k, a) - \lambda_k^4 \left(\left(\frac{1}{6}\tau^3 - \frac{1}{2}T^2\tau\right)\varphi_{3k} + \right.\right.$$

$$\left.\left. \left(\frac{1}{2}\tau^2 - T\tau\right)\varphi_{2k} + \varphi_{1k}\tau + \varphi_{0k}\right) + 2\lambda_k^2 (\varphi_{3k}\tau + \varphi_{2k})\right] d\tau. \tag{43}$$

Отсюда после некоторых вычислений получим

$$u_k(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(\lambda_k T)} \{\varphi_{0k} [\operatorname{ch}(\lambda_k(T-t)) \operatorname{ch}(\lambda_k T) +$$

$$\left. +\lambda_k(\frac{t}{2} \operatorname{sh}(\lambda_k T) \operatorname{ch}(\lambda_k(T-t)) + \frac{T-t}{2} \operatorname{sh}(\lambda_k t))\right] +$$

$$+\frac{\varphi_{1k}}{\lambda_k}\left[\frac{3}{2}\operatorname{ch}(\lambda_k T) \operatorname{sh}(\lambda_k t) - \frac{\lambda_k t}{2} \operatorname{ch}(\lambda_k(T-t)) + \frac{\lambda_k(T-t)}{2} \operatorname{sh}(\lambda_k T) \operatorname{sh}(\lambda_k t)\right] -$$

$$-\frac{\varphi_{2k}}{\lambda_k}\left[\frac{t}{2} \operatorname{sh}(\lambda_k T) \operatorname{ch}(\lambda_k(T-t)) + \frac{T-t}{2} \operatorname{sh}(\lambda_k t)\right] -$$

$$-\frac{\varphi_{3k}}{\lambda_k^2}\left[-\frac{t}{2}\operatorname{ch}(\lambda_k(T-t))+\frac{T-t}{2}\operatorname{sh}(\lambda_k T)\operatorname{sh}(\lambda_k t)+\frac{1}{2\lambda_k}\operatorname{ch}(\lambda_k T)\operatorname{sh}(\lambda_k t)\right]\Bigg\}+$$

$$\left.+\int\limits_0^T G_k(t,\tau)F_k(\tau;u,a)\,d\tau\right\}. \qquad (44)$$

После подстановки выражений из (44) в (23), для определения компоненты $u(x,t)$ решения задачи (1)–(3), (16), получаем

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\operatorname{ch}^2(\lambda_k T)}\left\{\varphi_{0k}\left[\operatorname{ch}(\lambda_k(T-t))\operatorname{ch}(\lambda_k T)+\right.\right.\right.$$

$$\left.+\lambda_k(\frac{t}{2}\operatorname{sh}(\lambda_k T)\operatorname{ch}(\lambda_k(T-t))+\frac{T-t}{2}\operatorname{sh}(\lambda_k t))\right]+$$

$$+\frac{\varphi_{1k}}{\lambda_k}\left[\frac{3}{2}\operatorname{ch}(\lambda_k T)\operatorname{sh}(\lambda_k t)-\frac{\lambda_k t}{2}\operatorname{ch}(\lambda_k(T-t))+\frac{\lambda_k(T-t)}{2}\operatorname{sh}(\lambda_k T)\operatorname{sh}(\lambda_k t)\right]-$$

$$-\frac{\varphi_{2k}}{\lambda_k}\left[\frac{t}{2}\operatorname{sh}(\lambda_k T)\operatorname{ch}(\lambda_k(T-t))+\frac{T-t}{2}\operatorname{sh}(\lambda_k t)\right]-$$

$$-\frac{\varphi_{3k}}{\lambda_k^2}\left[-\frac{t}{2}\operatorname{ch}(\lambda_k(T-t))+\frac{T-t}{2}\operatorname{sh}(\lambda_k T)\operatorname{sh}(\lambda_k t)+\frac{1}{2\lambda_k}\operatorname{ch}(\lambda_k T)\operatorname{sh}(\lambda_k t)\right]\Bigg\}+$$

$$\left.+\int\limits_0^T G_k(t,\tau)F_k(\tau;u,a)\,d\tau\right\}\sin\lambda_k x. \qquad (45)$$

Теперь из (16), с учётом (23), находим

$$a(t)=h^{-1}(t)\left\{h''(t)-\int_0^1 f(x,t)\,dx+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3 u_k(t)-2\lambda_k u_k''(t)\right)\right\}. \qquad (46)$$

Дифференцируя два раза (44), получаем

$$u_k'(t)=\frac{1}{\operatorname{ch}^2(\lambda_k T)}\left\{\varphi_{0k}\left[-\lambda_k\operatorname{sh}(\lambda_k(T-t))\operatorname{ch}(\lambda_k T)+\frac{\lambda_k}{2}\operatorname{sh}(\lambda_k T)\operatorname{ch}(\lambda_k(T-t))-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda_k^2 t}{2}\operatorname{sh}(\lambda_k T)\operatorname{sh}(\lambda_k(T-t))-\frac{\lambda_k}{2}\operatorname{sh}(\lambda_k t)+\frac{\lambda_k^2(T-t)}{2}\operatorname{ch}(\lambda_k t)\right]+$$

$$+\frac{\varphi_{1k}}{\lambda_k}\left[\frac{3\lambda_k}{2}\operatorname{ch}(\lambda_k T)\operatorname{ch}(\lambda_k t)-\frac{\lambda_k}{2}\operatorname{ch}(\lambda_k(T-t))+\frac{\lambda_k^2 t}{2}\operatorname{sh}(\lambda_k(T-t))-\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda_k}{2}\operatorname{sh}(\lambda_k T)\operatorname{sh}(\lambda_k t)+\frac{\lambda_k^2(T-t)}{2}\operatorname{sh}(\lambda_k T)\operatorname{ch}(\lambda_k t)\right]-$$

$$-\frac{\varphi_{2k}}{\lambda_k}\left[\frac{1}{2}\operatorname{sh}(\lambda_k T)\operatorname{ch}(\lambda_k(T-t))-\frac{\lambda_k t}{2}\operatorname{sh}(\lambda_k T)\operatorname{sh}(\lambda_k(T-t))-\right.$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{sh}(\lambda_k t)+\frac{\lambda_k(T-t)}{2}\operatorname{ch}(\lambda_k t)\Big]-$$

$$-\frac{\varphi_{3k}}{\lambda_k^2}\Big[-\frac{1}{2}\operatorname{ch}(\lambda_k(T-t))+\frac{t}{2}\operatorname{sh}(\lambda_k(T-t))-\frac{1}{2}\operatorname{sh}(\lambda_k T)\operatorname{sh}(\lambda_k t)+$$

$$+\frac{\lambda_k(T-t)}{2}\operatorname{sh}(\lambda_k T)\operatorname{ch}(\lambda_k t)+\frac{1}{2}\operatorname{ch}(\lambda_k T)\operatorname{ch}(\lambda_k t)\Big]\Big\}+$$

$$+\int\limits_0^T G_{k,t}(t,\tau)F_k(\tau;u,a)\,d\tau\Big\}, \tag{47}$$

$$u_k''(t)=\frac{1}{\operatorname{ch}^2(\lambda_k T)}\Big\{\varphi_{0k}[\lambda_k^2\operatorname{ch}(\lambda_k(T-t))\operatorname{ch}(\lambda_k T)\ -\lambda_k^2\operatorname{sh}(\lambda_k T)\operatorname{sh}(\lambda_k(T-t))-$$

$$-\lambda_k^2\ ch(\lambda_k t)+\frac{\lambda_k^3 t}{2}\operatorname{sh}(\lambda_k(T)\operatorname{ch}(\lambda_k(T-t))+\frac{\lambda_k^3(T-t)}{2}\operatorname{sh}(\lambda_k t)\Big]+$$

$$+\frac{\varphi_{1k}}{\lambda_k}\Big[\frac{3\lambda_k^2}{2}\operatorname{sh}(\lambda_k t)\operatorname{ch}(\lambda_k T)+\lambda_k^2\operatorname{sh}(\lambda_k(T-t))-\lambda_k^2\operatorname{sh}(\lambda_k T)\operatorname{ch}(\lambda_k t)-$$

$$-\frac{\lambda_k^3 t}{2}\operatorname{ch}(\lambda_k(T-t))+\frac{\lambda_k^3(T-t)}{2}\operatorname{sh}(\lambda_k T)\operatorname{sh}(\lambda_k t)\Big]-$$

$$-\frac{\varphi_{3k}}{\lambda_k^2}\Big[\lambda_k\operatorname{sh}(\lambda_k(T-t))--\lambda_k\operatorname{sh}(\lambda_k T)\operatorname{ch}(\lambda_k t)-\frac{\lambda_k^2 t}{2}\operatorname{ch}(\lambda_k(T-t))+$$

$$+\frac{\lambda_k^2(T-t)}{2}\operatorname{sh}(\lambda_k T)\operatorname{sh}(\lambda_k t)+\frac{\lambda_k}{2}\operatorname{ch}(\lambda_k T)\operatorname{sh}(\lambda_k t)\Big]\Big\}+$$

$$+\int\limits_0^T G_{k,tt}(t,\tau)F_k(\tau;u,a)\,d\tau\Big\}, \tag{48}$$

где

$$G_{k,t}(t,\tau)=\begin{cases}\frac{1}{2\lambda_k^3\operatorname{ch}^2(\lambda_k T)}[(\lambda_k^2\tau\operatorname{ch}(\lambda_k T)\operatorname{sh}(\lambda_k(T-\tau))+\lambda_k^2 T\operatorname{sh}(\lambda_k\tau))\operatorname{ch}(\lambda_k t)-\\ -\lambda_k^2 t\operatorname{ch}(\lambda_k T)\operatorname{ch}(\lambda_k(T-t))\operatorname{sh}(\lambda_k t)],t\in[0,\tau]\\ \\ \frac{1}{2\lambda_k^3\operatorname{ch}^2(\lambda_k T)}[\lambda_k^2\tau\operatorname{ch}(\lambda_k T)\operatorname{sh}(\lambda_k(T-t))\operatorname{ch}(\lambda_k\tau)+\\ +(\lambda_k^2 T\operatorname{ch}(\lambda_k t)-\lambda_k^2 t\operatorname{ch}(\lambda_k T)\operatorname{ch}(\lambda_k(T-t)))\operatorname{sh}(\lambda_k\tau)],t\in[\tau,T],\end{cases} \tag{49}$$

$$G_{k,tt}(t,\tau)=\begin{cases}\frac{1}{2\lambda_k^3\operatorname{ch}^2(\lambda_k T)}[(\lambda_k^3\tau\operatorname{ch}(\lambda_k T)\operatorname{sh}(\lambda_k(T-t))+\lambda_k^3 T\operatorname{sh}(\lambda_k T)-\\ -\lambda_k^2\operatorname{ch}(\lambda_k T)\operatorname{ch}(\lambda_k(T-\tau))]\operatorname{sh}(\lambda_k t)-\\ -\lambda_k^3 t\operatorname{ch}(\lambda_k T)\operatorname{ch}(\lambda_k(T-\tau)\operatorname{ch}(\lambda_k t)],t\in[0,\tau],\\ \frac{1}{2\lambda_k^3\operatorname{ch}^2(\lambda_k T)}[-\lambda_k^3\tau\operatorname{ch}(\lambda_k T)\operatorname{ch}(\lambda_k(T-t))\operatorname{ch}(\lambda_k\tau)+\\ +(\lambda_k^3 T\operatorname{sh}(\lambda_k t)+\lambda_k^2\operatorname{ch}(\lambda_k T)\operatorname{ch}(\lambda_k(T-t))+\\ +\lambda_k^3 t\operatorname{ch}(\lambda_k T)\operatorname{sh}(\lambda_k(T-t)))\operatorname{sh}(\lambda_k\tau)],t\in[\tau,T].\end{cases} \tag{50}$$

Теперь из (44) и (48) находим

$$\lambda_k^2 u_k(t) - 2u_k''(t) =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{ch}^2(\lambda_k T)} \left\{ \varphi_{0k} \left[-\lambda_k^2 \operatorname{ch}(\lambda_k(T-t)) \operatorname{ch}(\lambda_k T) + 2\lambda_k^2 \operatorname{sh}(\lambda_k T) \operatorname{sh}(\lambda_k(T-t)) + \right.\right.$$

$$\left. +2\lambda_k^2 \operatorname{ch}(\lambda_k t) - \frac{\lambda_k^3 t}{2} \operatorname{sh}(\lambda_k T) \operatorname{ch}(\lambda_k(T-t)) - \frac{\lambda_k^3 (T-t)}{2} \operatorname{sh}(\lambda_k t) \right] +$$

$$+\frac{\varphi_{1k}}{\lambda_k} \left[-\frac{3}{2} \operatorname{ch}(\lambda_k T) \operatorname{sh}(\lambda_k t) - 2\lambda_k^2 \operatorname{sh}(\lambda_k(T-t)) + 2\lambda_k^2 \operatorname{sh}(\lambda_k T) \operatorname{ch}(\lambda_k t) + \right.$$

$$\left. +\frac{\lambda_k^3 t}{2} \operatorname{ch}(\lambda_k(T-t)) - \frac{\lambda_k^3 (T-t)}{2} \operatorname{sh}(\lambda_k T) \operatorname{sh}(\lambda_k t) \right] -$$

$$-\frac{\varphi_{2k}}{\lambda_k} \left[2\lambda_k \operatorname{sh}(\lambda_k T) \operatorname{sh}(\lambda_k(T-t)) + 2\lambda_k \operatorname{ch}(\lambda_k t) - \right.$$

$$\left. -\frac{\lambda_k^2 t}{2} \operatorname{sh}(\lambda_k T) \operatorname{ch}(\lambda_k(T-t)) - \frac{\lambda_k^2 (T-t)}{2} \operatorname{sh}(\lambda_k t) \right] -$$

$$-\frac{\varphi_{3k}}{\lambda_k^2} \left[-2\lambda_k \operatorname{sh}(\lambda_k(T-t)) + 2\lambda_k \operatorname{sh}(\lambda_k T) \operatorname{ch}(\lambda_k t) + \frac{\lambda_k^2 t}{2} \operatorname{ch}(\lambda_k(T-t)) - \right.$$

$$\left.\left. +\frac{\lambda_k^2 (T-t)}{2} \operatorname{sh}(\lambda_k T) \operatorname{sh}(\lambda_k t) - \frac{\lambda_k}{2} \operatorname{ch}(\lambda_k T) \operatorname{sh}(\lambda_k t) \right] \right\} +$$

$$+ \int\limits_0^T H_k(t,\tau) F_k(\tau; u, a)\, d\tau, \tag{51}$$

где

$$H_k(t,\tau) = \lambda_k^2 G_k(t,\tau) - 2G_{k,tt}(t,\tau). \tag{52}$$

Далее из (52), с учетом (49) и (50), находим

$$H_k(t,\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2\lambda_k^3 \operatorname{ch}^2(\lambda_k T)} [(\lambda_k^3 t \operatorname{ch}(\lambda_k T) \operatorname{ch}(\lambda(T-t)) \operatorname{ch}(\lambda t) + \\ +(-\lambda_k^3 \tau \operatorname{ch}(\lambda_k T) \operatorname{sh}(\lambda_k(T-t)) - \\ -\lambda_k^3 T \operatorname{sh}(\lambda_k \tau) + \lambda_k^2 \operatorname{ch}(\lambda_k T) \operatorname{ch}(\lambda_k(T-\tau)) \operatorname{sh}(\lambda_k t)], t \in [0,\tau] \\ \frac{1}{2\lambda_k^3 \operatorname{ch}^2(\lambda_k T)} [\lambda_k^3 \tau \operatorname{ch}(\lambda_k T) \operatorname{ch}(\lambda_k(T-t)) \operatorname{ch}(\lambda_k \tau) + \\ +(-\lambda_k^3 T \operatorname{sh}(\lambda_k t) + \lambda_k^2 \operatorname{ch}(\lambda T) \operatorname{ch}(\lambda(T-t)) - \\ -\lambda_k^3 t \operatorname{ch}(\lambda T) \operatorname{sh}(\lambda(T-t))) \operatorname{sh}(\lambda_k \tau)], t \in [\tau, T]. \end{cases} \tag{53}$$

Для того чтобы получить уравнение для второй компоненты $a(t)$ решения $\{u(x,t), a(t)\}$ задачи (1)–(3), (16), подставим выражение (51) в (46):

$$a(t) = h^{-1}(t) \left\{ h^{(4)}(t) - \int_0^1 f(x,t)\, dx + \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left\{ \frac{1}{\operatorname{ch}^2(\lambda_k T)} \left\{ \varphi_{0k} \left[-\ \lambda_k^2 \operatorname{ch}(\lambda_k (T-t)) \operatorname{ch}(\lambda_k T) + \right.\right.\right.$$

$$+2\lambda_k^2 \operatorname{sh}(\lambda_k T)\operatorname{sh}(\lambda_k(T-t)) + 2\lambda_k \operatorname{ch}(\lambda_k t) -$$

$$-\frac{\lambda_k^3 t}{2}\operatorname{sh}(\lambda_k T)\operatorname{ch}(\lambda_k(T-t)) - \frac{\lambda_k^3(T-t)}{2}\operatorname{sh}(\lambda_k t)\Bigg] +$$

$$+\frac{\varphi_{1k}}{\lambda_k}\Bigg[\ -\tfrac{3}{2}\operatorname{ch}(\lambda_k T)\operatorname{sh}(\lambda_k t) - 2\lambda_k^2 \operatorname{sh}(\lambda_k(T-t)) + 2\lambda_k^2 \operatorname{sh}(\lambda_k T)\operatorname{ch}(\lambda_k t) +$$

$$+\frac{\lambda_k^3 t}{2}\operatorname{ch}(\lambda_k(T-t)) - \frac{\lambda_k^3(T-t)}{2}\operatorname{sh}(\lambda_k T)\operatorname{sh}(\lambda_k t)\Bigg] -$$

$$-\frac{\varphi_{2k}}{\lambda_k}\left[2\lambda_k \operatorname{sh}(\lambda_k T)\operatorname{sh}(\lambda_k(T-t)) + 2\lambda_k \operatorname{ch}(\lambda_k t) -\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda_k^2 t}{2}\operatorname{sh}(\lambda_k T)\operatorname{ch}(\lambda_k(T-t)) - \frac{\lambda_k^2(T-t)}{2}\operatorname{sh}(\lambda_k t)\right] -$$

$$-\frac{\varphi_{3k}}{\lambda_k^2}\left[-2\lambda_k \operatorname{sh}(\lambda_k(T-t)) + 2\lambda_k \operatorname{sh}(\lambda_k T)\operatorname{ch}(\lambda_k t) +\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda_k^2 t}{2}\operatorname{ch}(\lambda_k(T-t)) - \frac{\lambda_k^2(T-t)}{2}\operatorname{sh}(\lambda_k T)\operatorname{sh}(\lambda_k t) - \frac{\lambda_k}{2}\operatorname{ch}(\lambda_k T)\operatorname{sh}(\lambda_k t)\right]\Bigg\} +$$

$$+\int_0^T H_k(t,\tau)F_k(\tau;u,a)\,d\tau\Bigg\}\Bigg\}. \tag{54}$$

Таким образом, решение задачи (1)–(3), (16) свелось к решению системы (45), (54) относительно неизвестных функций $a(t)$ и $u(x,t)$.

Для изучения вопроса единственности решения задачи (1)–(3), (16) важную роль играет следующая лемма.

Лемма 3. *Если* $\{u(x,t), a(t)\}$ *– любое решение задачи* (1)–(3), (16), *то функции*

$$u_k(t) = 2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x\,dx \quad (k=1,2,...)$$

удовлетворяют на $[0,T]$ *системе* (44).

Доказательство. Пусть $\{u(x,t), a(t)\}$ – любое решение задачи (1)–(3), (16). Тогда, умножив обе части уравнения (1) на функцию $2\sin\lambda_k x \quad (k=1,2,...)$, интегрируя полученное равенство по t от 0 до 1 и пользуясь соотношениями

$$2\int_0^1 u_{tttt}(x,t)\sin\lambda_k x\,dx = \frac{d^4}{dt^4}(2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x\,dx) = u_k^{(4)}(t) \quad (k=1,2,...),$$

$$2\int_0^1 u_{ttxx}(x,t)\sin\lambda_k x\,dx = -\lambda_k^2\frac{d^2}{dt^2}(2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x\,dx) = -\lambda_k^2 u_k''(t) \quad (k=1,2,...),$$

$$2\int\limits_0^1 u_{xxxx}(x,t)\sin\lambda_k x\,dx = \lambda_k^4(2\int\limits_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x\,dx) = \lambda_k^4 u_k(t) \quad (k=1,2,...),$$

получаем, что выполняется уравнение (24).

Аналогично из (2) получаем, что выполняется условие (25).

Таким образом, $u_k(t) \quad (k=1,2,...)$ является решением задачи (24), (25). А отсюда непосредственно следует, что функции $u_k(t) \quad (k=1,2,...)$ удовлетворяют на $[0,T]$ системе (44). Лемма доказана. □

Очевидно, что если $u_k(t) = 2\int\limits_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x\,dx$ $(k=1,2,...)$ является решением системы (44), то пара $\{u(x,t),a(t)\}$ функций $u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin\lambda_k x$ и $a(t)$ является решением системы (45), (54).

Из леммы 3 вытекает следствие.

Следствие 1. *Пусть система* (45), (54) *имеет единственное решение. Тогда задача* (1)–(3), (16) *не может иметь более одного решения, т.е. если задача* (1)–(3), (16) *имеет решение, то оно единственно.*

Теперь с целью исследования задачи (1)–(3), (16) рассмотрим следующие пространства:

1. Обозначим через $B_{2,T}^5$ [13] совокупность всех функций $u(x,t)$ вида

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin\lambda_k x \quad (\lambda_k = \frac{\pi}{2}(2k-1)),$$

рассматриваемых в D_T, где каждая из функций $u_k(t)$ непрерывна на $[0,T]$ и

$$J_T(u) \equiv \left\{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^5 \|u_k(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{1/2} < +\infty.$$

Норму в этом множестве определим так:

$$\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5} = J_T(u).$$

2. Через E_T^5 обозначим пространство, состоящее из топологического произведения

$$B_{2,T}^5 \times C[0,T].$$

Норма элемента $z=\{u,a\}$ определяется формулой

$$\|z\|_{E_T^5} = \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5} + \|a(t)\|_{C[0,T]}.$$

Известно, что $B_{2,T}^5$ и E_T^5 являются банаховыми пространствами.

Теперь рассмотрим в пространстве E_T^5 оператор

$$\Phi(u,a)=\left\{\Phi_1(u,a),\Phi_2(u,a)\right\},$$

где

$$\Phi_1(u,a)=\tilde{u}(x,t)\equiv\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{u}_k(t)\sin\lambda_k x, \tag{55}$$

$$\Phi_2(u,a)=\tilde{a}(t), \tag{56}$$

а $\tilde{u}_k(t)\quad(k=1,2,...)$ и $\tilde{a}(t)$ равны правым частям (44) и (54) соответственно.

Нетрудно увидеть, что

$$\frac{\operatorname{ch}(\lambda_k(T-t))}{\operatorname{ch}(\lambda_k T)}\le 1,\quad \frac{\operatorname{sh}(\lambda_k t)}{\operatorname{ch}(\lambda_k T)}<1\quad(0\le t\le T),$$

$$\frac{\operatorname{ch}(\lambda_k(T+t-\tau))}{\operatorname{ch}(\lambda_k T)}\le 1,\quad \frac{\operatorname{ch}(\lambda_k(T-t-\tau))}{\operatorname{ch}(\lambda_k T)}<1\quad(0\le t\le\tau\le T),$$

$$\frac{\operatorname{sh}(\lambda_k(T+t-\tau))}{\operatorname{ch}(\lambda_k T)}<1,\quad \frac{\operatorname{sh}(\lambda_k(T-t-\tau))}{\operatorname{ch}(\lambda_k T)}<1\quad(0\le t\le\tau\le T),$$

$$\frac{\operatorname{ch}(\lambda_k(T-(t-\tau)))}{\operatorname{ch}(\lambda_k T)}\le 1,\quad \frac{\operatorname{ch}(\lambda_k(T-t-\tau))}{\operatorname{ch}(\lambda_k T)}<1\quad(0\le\tau\le t\le T),$$

$$\frac{\operatorname{sh}(\lambda_k(T-(t-\tau)))}{\operatorname{ch}(\lambda_k T)}<1,\quad \frac{\operatorname{sh}(\lambda_k(T-t-\tau))}{\operatorname{ch}(\lambda_k T)}<1\quad(0\le\tau\le t\le T).$$

Учитывая эти соотношения, получаем

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^5\left\|\tilde{u}_k(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\sqrt{6}(1+T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^6\left|\varphi_{0k}\right|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{6}(\frac{3}{2}+T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^5\left|\varphi_{1k}\right|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\sqrt{6}T\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^4\left|\varphi_{2k}\right|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{6}(\frac{1}{2}+T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\left|\varphi_{3k}\right|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+(3+T)\sqrt{6T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\left|f_k(\tau)\right|\right)^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+(3+T)\sqrt{6}T\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^5\left\|u_k(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{57}$$

$$\left\|\tilde{a}(t)\right\|_{C[0,T]}\le\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\left\{\left\|h^{(4)}(t)-f(1,t)\right\|_{C[0,T]}+\right.$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[(5+T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^6\,|\varphi_{0k}|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+(\frac{1}{2}+T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\,|\varphi_{1k}|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\right.$$

$$+(4+T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^4\,|\varphi_{2k}|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+(\frac{9}{2}+T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\,|\varphi_{3k}|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+(1+3T)\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\,|f_k(\tau)|)^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\left.\left.+\ (1+3T)T\,\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\,\|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}. \qquad (58)$$

Предположим, что данные задачи (1)–(3), (16) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi_0(x)\in C^5[0,1],\varphi_0^{(6)}(x)\in L_2(0,1)$,
 $\varphi_0(0)=\varphi_0'(1)=\varphi_0''(1)=\varphi_0^{(3)}(1)=\varphi_0^{(4)}(0)=\varphi_0^{(5)}(1)=0$;
2. $\varphi_1(x)\in C^4[0,1],\varphi_1^{(5)}(x)\in L_2(0,1),\varphi_1(0)=\varphi_1'(1)=\varphi_1''(0)=\varphi_1^{(3)}(1)=\varphi_1^{(4)}(0)=0$;
3. $\varphi_2(x)\in C^3[0,1],\varphi_2^{(4)}(x)\in L_2(0,1),\varphi_2(0)=\varphi_2'(1)=\varphi_2''(0)=\varphi_2^{(3)}(1)=0$;
4. $\varphi_3(x)\in C^2[0,1],\varphi_3^{(3)}(x)\in L_2(0,1),\varphi_3(0)=\varphi_3'(1)=\varphi_3''(0)=0$;
5. $f(x,t),f_x(x,t),f_{xx}(x,t)\in C(D_T),f_{xxx}(x,t)\in L_2(D_T)$,
 $f(0,t)=f_x(1,t)=f_{xx}(0,t)=0\ (0\le t\le T)$;
6. $h(t)\in C^4[0,T],h(t)\neq 0\ (0\le t\le T)$.

Тогда из (57) и (58) получаем

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^5}\le A_1(T)+B_1(T)\,\|a(t)\|_{C[0,T]}\,\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5}\,, \qquad (59)$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]}\le A_2(T)+B_2(T)\,\|a(t)\|_{C[0,T]}\,\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5}\,, \qquad (60)$$

где

$$A_1(T)=\sqrt{6}(1+T)\left\|\varphi_0^{(6)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+\sqrt{6}(\frac{3}{2}+T)\left\|\varphi_1^{(5)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\sqrt{6}T\left\|\varphi_2^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+\sqrt{6}(\frac{1}{2}+T)\left\|\varphi_3^{(3)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+(1+3T)\sqrt{6}T\,\|f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}\,,$$

$$B_1(T)=(1+3T)\sqrt{6}T,$$

$$A_2(T)=\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\left\{\left\|h^{(4)}(t)-f(1,t)\right\|_{C[0,T]}+\right.$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{1/2}\left[(5+T)\left\|\varphi_0^{(6)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+(\frac{11}{2}+T)\left\|\varphi_1^{(5)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\right.$$

$$+(4+T)\left\|\varphi_2^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$

$$\left.\left.+(\frac{9}{2}+T)\left\|\varphi_3^{(3)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+(1+3T)\sqrt{T}\left\|f_{xxx}(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}\right]\right\},$$

$$B_2(T)=\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}(1+3T)T.$$

Из неравенств (59) и (60) заключаем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B^5_{2,T}}+\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]}\leq A(T)+B(T)\,\|a(t)\|_{C[0,T]}\,\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}}\,, \tag{61}$$

где

$$A(T)=A_1(T)+A_2(T),\quad B(T)=B_1(T)+B_2(T).$$

Итак, можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1–5 и*

$$(A(T)+2)^2B(T)T<1. \tag{62}$$

Тогда задача (1)–(3), (16) *имеет в шаре* $K=K_R(\|z\|_{E^5_T}\leq R=A(T)+2)$ *пространства* E^5_T *единственное решение.*

Доказательство. В пространстве E^5_T рассмотрим уравнение

$$z=\Phi z, \tag{63}$$

где $z=\{u,a\}$, компоненты $\Phi_i(u,a)(i=1,2)$ оператора $\Phi(u,a)$ определены правыми частями уравнений (45) и (54).

Рассмотрим оператор $\Phi(u,a)$ в шаре $K=K_R$ из E^5_T . Аналогично (61) получаем, что для любых $z,z_1,z_2\in K_R$ справедливы оценки

$$\|\Phi z\|_{E^5_T}\leq A(T)+B(T)\,\|a(t)\|_{C[0,T]}\,\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}}\,, \tag{64}$$

$$\|\Phi z_1-\Phi z_2\|_{E^5_T}\leq B(T)TR(\|a_1(t)-a_2(t)\|_{C[0,T]}+\|u(x,t)-\overline{u}(x,t)\|_{B^5_{2,T}}\,. \tag{65}$$

Тогда из оценок (64) и (65), с учётом (62), следует, что оператор $\Phi(u,a)$ действует в шаре $K=K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K=K_R$ оператор $\Phi(u,a)$ имеет единственную неподвижную точку $\{u,a\}$, которая является единственным в шаре $K=K_R$ решением уравнения (63), то есть является единственным в шаре $K=K_R$ решением системы (45), (54).

Функция $u(x,t)$ как элемент пространства $B^5_{2,T}$ непрерывна и имеет непрерывные производные $u_x(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$, $u_{xxx}(x,t)$, $u_{xxxx}(x,t)$ в D_T .

Теперь из (48) ясно, что

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\left\|u_k''(t)\right\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{6}(3+T)\left\{\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^6\left|\varphi_{0k}\right|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\right.$$
$$+\sqrt{6}(\tfrac{7}{2}+T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\left|\varphi_{1k}\right|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{6}(2+T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^4\left|\varphi_{2k}\right|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$
$$+\sqrt{6}(\tfrac{5}{2}+T)\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\left|\varphi_{3k}\right|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+(1+3T)\sqrt{6T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\left|f_k(\tau)\right|)^2\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+$$
$$+(1+3T)\sqrt{6}T\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^5\left\|u_k(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

С учётом условий 1–5, получаем

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\left\|u_k''(t)\right\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{6}(3+T)\left\|\varphi_0^{(6)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$
$$+\sqrt{6}(\tfrac{7}{2}+T)\left\|\varphi_1^{(5)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\sqrt{6}(2+T)\left\|\varphi_2^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$
$$+\sqrt{6}(\tfrac{5}{2}+T)\left\|\varphi^{(3)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+(1+3T)\sqrt{6T}\left\|f_{xxx}(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}+$$
$$+(1+3T)\sqrt{6}T\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}\left\|u(x,t)\right\|_{B_{2,T}^5}.$$

Отсюда следует, что $u_{ttxx}(x,t)$ непрерывна в D_T .

Далее из (24) нетрудно увидеть, что

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\left\|u_k^{(4)}(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le 2\left(2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^3\left\|u_k''(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\right.$$
$$\left.+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^5\left\|u_k(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left\|\left\|f_x(x,t)\right\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)}+\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}\left\|u(x,t)\right\|_{B_{2,T}^5}\right).$$

Из последнего соотношения ясно, что $u_{tttt}(x,t)$ непрерывна в D_T .

Легко проверить, что уравнение (1) и условия (2), (3) и (16) удовлетворяются в обычном смысле. Следовательно, $\{u(x,t),a(t)\}$ является решением задачи (1)–(3), (16) в шаре $K=K_R$. В силу следствия леммы 3, это решение единственно в шаре $K=K_R$. Теорема доказана. □

С помощью леммы 2 доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполняются все условия теоремы 1,*

$$\frac{5}{12}(A(T)+2)T^4<1$$

и выполнены условия согласования

$$\int_0^1\varphi_0(x)\,dx=h(0),\quad \int_0^1\varphi_1(x)\,dx=h'(T),$$
$$\int_0^1\varphi_2(x)\,dx=h''(0),\quad \int_0^1\varphi_3(x)\,dx=h'''(T).$$

Тогда задача (1)–(4) *имеет в шаре* $K=K_R(\|z\|_{E_T^5}\le R=A(T)+2)$ *пространства* E_T^5 *единственное классическое решение.*

Список литературы

[1] А. И. Тихонов, "Об устойчивости обратных задач", *Докл. АН СССР*, **39**:5 (1943), 195–198.

[2] М. М. Лаврентьев, "Об одной обратной задаче для волнового уравнения", *Докл. АН СССР*, **157**:3 (1964), 520–521.

[3] М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. Т. Шишатский, *Некорректные задачи математической физики и анализа*, Наука, М, 1988.

[4] В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танина, *Теория линейных некорректных задач и ее приложения*, Наука, М, 1978.

[5] А. М. Денисов, *Введение в теорию обратных задач*, МГУ, М, 1994.

[6] В. В. Соловьев, "Обратные задачи определения источника для уравнения Пуассона на плоскости", *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **44**:5 (2004), 862–871.

[7] В. В. Соловьев, "Обратные задачи для эллиптических уравнений на плоскости", *Дифференциальные уравнения*, **42**:8 (2006), 1106–1114.

[8] Я. Т. Мегралиев, "Обратная краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка с дополнительными интегральным условием", *Вестник Удмуртского Университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **23** (20012), 32–40.

[9] Я. Т. Мегралиев, "О разрешимости одной обратной краевой задаче для эллиптического уравнения второго порядка", *Вестник Тверского Государственного Университета. Серия: Прикладная математика*, **23** (2011), 25–38.

[10] Ю. Н. Работонов, *Механика деформируемого твердого тела*, Наука, М, 1988.

[11] Ю. А. Амензаде, *Теория упругости*, Высшая школа, М, 1971.

[12] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М, 1969.

[13] К. И. Худавердиев, А. А. Велиев, *Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью*, Чашыоглы, Баку, 2010.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 20 сентября 2012 г.

Mehraliyev Y. T. Inverse boundary problem for the thin plates bending equation with the additional integral condition. Far Eastern Mathematical Journal. 2013. V. 13. № 1. P. 83–101.

ABSTRACT

In the paper an inverse boundary value problem for the thin plates bending equation with the additional integral condition of the first kind is investigated. First, the initial problem is reduced to the equivalent problem, for which the theorem of existence and uniqueness of solutions is proved. Then, using these facts, the existence and uniqueness of the classical solution of initial problem is proved.

Key words: *inverse boundary problem, equations of a bend of thin plates, method Fourier, classic solution.*