Дальневосточный математический журнал. 2013. Том 13. № 1. С. 107–115

УДК 510.67:512.56
MSC2010 08B10

© Д. О. Птахов, А. А. Степанова[1]

Решетки конгруэнций полигонов

В данной работе приведены критерии модулярности и дистрибутивности решетки конгруэнций несвязных полигонов.

Ключевые слова: *решетка, модулярная решетка, дистрибутивная решетка, решетка конгруэнций алгебры, полигон.*

Структура решетки конгруэнций алгебры частично определяет строение самой алгебры. В работе описаны несвязные полигоны, решетки конгруэнций которых модулярны и дистрибутивны. Полигон является унарной алгеброй, т.е. алгеброй, в сигнатуру которой входят только унарные операции. В [1] Д. Егоровой и Л. Скорняковым описаны унары, решетки конгруэнций которых являются решетками с дополнениями, модулярными решетками с дополнениями и булевыми алгебрами. В [2] Д. Егоровой описаны унары, решетки конгруэнций которых являются модулярными, дистрибутивными и линейными решетками. В [3] Д. Птаховым изучены решетки слабых конгруэнций унарных алгебр.

1. Предварительные сведения

Напомним некоторые определения, которые можно найти в [4, 5].

Пусть S – моноид. Левым *S-полигоном* (или просто *полигоном*) ${}_SA$ называется непустое множество A, на котором определено действие моноида S, причем единица S действует на A тождественно.

Элементы $a, b \in A$ называются *связанными* в полигоне ${}_SA$, если существуют $n \in \omega, c_i \in A$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ и $s_j, t_j \in S$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ такие, что $a = c_0$, $b = c_n$ и $s_i c_{i-1} = t_i c_i$ для любого $i, 1 \leqslant i \leqslant n$. Полигон ${}_SA$ называется *связным*, если любые два элемента в нем связаны. Наибольший по включению связный подполигон полигона ${}_SA$ называется *компонентой связности* полигона ${}_SA$. *Копроизведением* $\bigsqcup_{i \in I} A_i$ полигонов ${}_SA_i$ $(i \in I)$ называется их дизъюнктное объединение. Ясно, что любой полигон представим в виде копроизведения своих компонент связности.

Конгруэнцией θ полигона ${}_SA$ называется отношение эквивалентности на множестве A такое, что

$$\langle a, b \rangle \in \theta \Rightarrow \langle sa, sb \rangle \in \theta$$

[1]Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8. Электронная почта: `ptaxov@mail.ru, stepltd@mail.ru`

для любых $a, b \in A, s \in S$. Пусть ${}_SB$ – подполигон полигона ${}_SA$ и θ – конгруэнция полигона ${}_SA$. Через $\theta \restriction B$ обозначим конгруэнцию $\theta \cap (B \times B)$ полигона ${}_SB$, через 0_A – нулевую конгруэнцию полигона ${}_SA$, через $\rho(B)$ – конгруэнцию Риса полигона ${}_SA$, т.е.

$$\langle a, b\rangle \in \rho(B) \Leftrightarrow (a, b \in B \text{ или } a = b.)$$

Вместо записи $\langle a, b\rangle \in \theta$ иногда будем использовать запись $a\theta b$. Классом конгруэнции θ с представителем $a \in A$ назовем множество $\theta(a) = \{b \in A \mid a\theta b\}$.

Заметим, что совокупность всех конгруэнций полигона ${}_SA$ образует решетку относительно следующих операций:

$$\theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_1 \cap \theta_2,$$

$$\theta_1 \vee \theta_2 \text{ – наименьшая конгруэнция, содержащая } \theta_1 \cup \theta_2,$$

где θ_1, θ_2 – конгруэнции полигона ${}_SA$. Эту решетку будем обозначать $\mathrm{Con}({}_SA)$.

Факт 1.1. *[5] Пусть ${}_SA$ – полигон, $a, b \in A$, $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con}({}_SA)$. Тогда $a\,(\theta_1 \vee \theta_2)\,b$ в том и только в том случае, когда существует цепочка $x_0, x_1, \ldots, x_{2n}$ элементов из A такая, что $a = x_0$, $x_{2n} = b$, $x_{2k}\,\theta_1\,x_{2k+1}$ и $x_{2k+1}\,\theta_2\,x_{2k+2}$ для любого $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.*

Решетка $(L, \wedge, \vee)$ называется *модулярной*, если для любых $a, b, c \in L$, где $a \leqslant c$, справедлив модулярный закон

$$(a \vee b) \wedge c = a \vee (b \wedge c).$$

Решетка $(L, \wedge, \vee)$ называется *дистрибутивной*, если для любых $a, b, c \in L$ справедлив дистрибутивный закон

$$(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c).$$

Ясно, что модулярная решетка является дистрибутивной.

Факт 1.2. *[4] Следующие свойства решетки L эквивалентны:*

1) L модулярна;

2) если $a, b \in L, a \leqslant b$, и для некоторого $c \in L$ справедливо $a \vee c = b \vee c$, $a \wedge c = b \wedge c$, то $a = b$.

Факт 1.3. *[4] Следующие свойства решетки L эквивалентны:*

1) L дистрибутивна;

2) если $a, b \in L$ и для некоторого $c \in L$ справедливо $a \vee c = b \vee c$, $a \wedge c = b \wedge c$, то $a = b$.

2. Предварительные результаты

В этом параграфе приводятся леммы, которые будут использованы для доказательства основного результата работы.

Лемма 2.1. *Если в полигоне $_SA$ есть три попарно непересекающихся подполигона, то решетка $\mathrm{Con}(_SA)$ конгруэнций этого полигона не является дистрибутивной.*

Доказательство. Пусть $_SA_i$ $(i \in \{1, 2, 3\})$ – попарно непересекающиеся подполигоны полигона $_SA$. Введем обозначения:

$$\theta_1 = \rho(A_1) \vee \rho(A_2 \sqcup A_3),$$

$$\theta_2 = \rho(A_2) \vee \rho(A_1 \sqcup A_3),$$

$$\theta_3 = \rho(A_3) \vee \rho(A_1 \sqcup A_2).$$

Очевидно, что $\theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \vee \theta_3 = \rho(\bigsqcup_{i=1}^{3} A_i)$, $\theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_1 \wedge \theta_3 = \rho(A_1) \vee \rho(A_2) \vee \rho(A_3)$ и $\theta_2 \neq \theta_3$. Тогда по факту 1.3 решетка $\mathrm{Con}(_SA)$ не является дистрибутивной. □

Конгруэнцию θ полигона $_SA$ назовем *сквозной конгруэнцией*, если существуют полигоны $_SB, {_SC}$ и элементы $b_1, b_2 \in B$ и $c_1, c_2 \in C$ такие, что

$$_SA = {_SB} \sqcup {_SC},\ \langle b_1, b_2\rangle \notin \theta,\ \langle c_1, c_2\rangle \notin \theta,\ \langle b_1, c_1\rangle \in \theta,\ \langle b_2, c_2\rangle \in \theta.$$

Представление $_SA = {_SB} \sqcup {_SC}$ полигона $_SA$ назовем соответствующим сквозной конгруэнции θ.

Следующее замечание сводит условие существования сквозной конгруэнции в решетке конгруэнций полигона $_SA$ к структурной характеризации полигона $_SA$.

Замечание 2.2. *Для полигона $_SA$ следующие условия эквивалентны:*

1) в решетке конгруэнций полигона $_SA$ существует сквозная конгруэнция;

2) существуют представление $_SA = {_SB} \sqcup {_SC}$ полигона $_SA$ и изоморфные неодноэлементные подполигоны некоторых факторполигонов $_SB$ и $_SC$.

Лемма 2.3. *Если в полигоне $_SA$ есть более трех компонент связности, то в решетке конгруэнций этого полигона есть сквозная конгруэнция.*

Доказательство. Предположим, что в полигоне $_SA$ есть четыре или более компоненты связности, т.е. его можно представить в виде копроизведения четырех его подполигонов: $_SA = \bigsqcup_{i=1}^{4} {_SA_i}$. Тогда конгруэнция $\theta = \rho(A_1 \sqcup A_3) \vee \rho(A_2 \sqcup A_4)$ является сквозной конгруэнцией полигона $_SA$ и соответствующее представление полигона $_SA$ имеет вид $_SA = {_S(A_1 \cup A_2)} \cup {_S(A_3 \cup A_4)}$. □

Пусть $_SA = \bigsqcup_{i=1}^{n} {_SA_i}$, $\theta \in \mathrm{Con}(_SA)$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$. Введем обозначения:

$$\theta^i = (\theta \restriction A_i) \vee 0_A,$$

$$A_{i\theta} = \{a \in A_i \mid \exists b \in A \backslash A_i\, (a\theta b)\}.$$

Заметим, что θ^i – конгруэнция полигона $_SA$, а $_SA_{i\theta}$ – подполигон полигона $_SA$.

Лемма 2.4. *Если в полигоне $_SA$ существует сквозная конгруэнция, то решетка $\mathrm{Con}(_SA)$ конгруэнций этого полигона не является модулярной.*

Доказательство. Пусть θ – сквозная конгруэнция полигона ${}_SA$, ${}_SA = {}_SA_1 \sqcup {}_SA_2$ – соответствующее представление полигона ${}_SA$, $\eta = \theta^1 \vee \theta^2$, $\theta_1 = \rho(A_{1\theta}) \vee \rho(A_{2\theta}) \vee \eta$, $\theta_2 = \rho(A_{1\theta}) \vee \eta$. Ясно, что $\theta_2 \subseteq \theta_1$. Из определения сквозной конгруэнции следует, что существуют $b, b' \in A_{2\theta}$ такие, что $\langle b, b' \rangle \notin \theta$, т.е. $\langle b, b' \rangle \notin \eta$. Тогда $\theta_1 \neq \theta_2$. Очевидно, что

$$\theta \vee \theta_1 = \theta \vee \theta_2 = \rho(A_{1\theta} \sqcup A_{2\theta}) \vee \eta, \ \theta \wedge \theta_1 = \theta \wedge \theta_2 = \eta.$$

Тогда по факту 1.2 решетка $\mathrm{Con}({}_SA)$ не является модулярной. $\square$

Из лемм 2.3 и 2.4 получаем следствие.

Следствие 2.5. *Если в полигоне ${}_SA$ есть четыре попарно непересекающихся подполигона, то решетка $\mathrm{Con}({}_SA)$ конгруэнций этого полигона не является модулярной.*

Лемма 2.6. *Пусть полигон ${}_SA$ не имеет сквозных конгруэнций, ${}_SA = \bigsqcup_{i=1}^k {}_SA_i$ и $\theta \in \mathrm{Con}({}_SA)$, где ${}_SA_i$ – компоненты связности полигона ${}_SA$. Тогда выполняется следующее:*

(i) $A_{i\theta} = \theta^i(a)$ для любых $i \leqslant k$ и $a \in A_{i\theta}$*;*

(ii) $\theta = \bigcup_{i=1}^k \theta^i \cup \rho\big(\bigsqcup_{i=1}^k A_{i\theta}\big)$.

Доказательство. Пусть условия леммы выполняются.

Предположим, что $\theta \in \mathrm{Con}({}_SA), i \leqslant k, A_{i\theta} \neq \varnothing$ и $a, b \in A_{i\theta}$. Покажем, что $\langle a, b \rangle \in \theta$. Предположим противное. По определению $A_{i\theta}$ существуют $c, d \in A \backslash A_i$ такие, что $\langle a, c \rangle, \langle b, d \rangle \in \theta$. Так как $\langle a, b \rangle \notin \theta$, то $\langle c, d \rangle \notin \theta$. Следовательно, θ – сквозная конгруэнция, что противоречит условию. Таким образом, (i) доказано. Так как в ${}_SA$ нет сквозных конгруэнций, то выполняется включение $\rho\left(\bigsqcup_{i=1}^k A_{i\theta}\right) \subseteq \theta$.

Докажем (ii). Пусть $\langle a, b \rangle \in \theta$. Если существует $i \leqslant k$ такое, что $a, b \in A_i$, то $\langle a, b \rangle \in \theta^i$. Если $a \in A_i, b \in A_j, i \neq j$ $(i \leqslant k, j \leqslant k)$, то $a \in A_{i\theta}, b \in A_{j\theta}$ по определению $A_{i\theta}$ и $A_{j\theta}$, следовательно $\langle a, b \rangle \in \rho\big(\bigsqcup_{i=1}^3 A_{i\theta}\big)$, т.е. $\theta \subseteq \bigcup_{i=1}^k \theta^i \cup \rho\left(\bigsqcup_{i=1}^k A_{i\theta}\right)$. Доказательство обратного включения – очевидно. $\square$

Лемма 2.7. *Пусть для полигона ${}_SA$ выполняются следующие условия:*

a) ${}_SA = {}_SA_1 \sqcup {}_SA_2$*;*

b) в решетке конгруэнций $\mathrm{Con}({}_SA)$ *полигона* ${}_SA$ *нет сквозных конгруэнций.*

c) в ${}_SA_1$ *нет двух непересекающихся подполигонов;*

Тогда для любых конгруэнций $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con}({}_SA)$ *выполняются равенства:*

1) $(\theta_1 \wedge \theta_2)^1 = \theta_1^1 \wedge \theta_2^1$*;*

2) $(\theta_1 \vee \theta_2)^1 = \theta_1^1 \vee \theta_2^1$.

Если дополнительно выполняется условие

d) в ${}_SA_2$ *нет двух непересекающихся подполигонов,*

то верны равенства:

3) $A_{1(\theta_1 \wedge \theta_2)} = A_{1\theta_1} \cap A_{1\theta_2}$*;*

4) $A_{1(\theta_1 \vee \theta_2)} = \begin{cases} (\theta_1^1 \vee \theta_2^1)(a) \ \textit{для любого } a \in A_{1\theta_1} \cup A_{1\theta_2}, & \textit{если } A_{1\theta_1} \cup A_{1\theta_2} \neq \varnothing; \\ \varnothing, & \textit{в противном случае.} \end{cases}$

Доказательство. Пусть условия леммы выполняются, $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con}({}_SA)$ и $i \in \{1,2\}$.

Покажем 1). Пусть $a, b \in A$ и $a \neq b$. Из определения конгруэнций $(\theta_1 \wedge \theta_2)^1, \theta_1^1, \theta_2^1$ получаем

$$a(\theta_1 \wedge \theta_2)^1 b \Leftrightarrow a, b \in A_1 \text{ и } a(\theta_1 \wedge \theta_2)b \Leftrightarrow a, b \in A_1 \text{ и } a\theta_1 b \text{ и } a\theta_2 b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\theta_1^1 b \text{ и } a\theta_2^1 b \Leftrightarrow a(\theta_1^1 \wedge \theta_2^1)b.$$

Покажем 2). Включение $\theta_1^1 \vee \theta_2^1 \subseteq (\theta_1 \vee \theta_2)^1$ очевидно. Пусть $a(\theta_1 \vee \theta_2)^1 b$. Тогда $a, b \in A_1$ и $a(\theta_1 \vee \theta_2)b$. По факту 1.1 существуют минимальное $k < \omega$ и элементы $x_0, \ldots, x_k \in A$ такие, что $a = x_0$, $b = x_k$ и $(x_i, x_{i+1}) \in \theta_1 \cup \theta_2$ для любого $i < k$. Если $x_j \in A_1$ для любого $j \leqslant k$, то по факту 1.1 $a(\theta_1^1 \vee \theta_2^1)b$. Предположим, что существуют l, $p \leqslant k$ такие, что $0 < l < p < k$ и

$$x_l,\ x_p \in A_1; \quad x_{l+1},\ x_{p-1} \in A_2.$$

Тогда x_l, $x_p \in A_{1\theta_1} \cup A_{1\theta_2}$. Если $A_{1\theta_1} = \varnothing$, то (x_l, x_{l+1}), $(x_{p-1}, x_p) \in \theta_2$. В силу существования минимального k получаем $(x_{l+1}, x_p) \notin \theta_2$. Поскольку конгруэнция θ_2 не может быть сквозной, получаем, что $(x_l, x_p) \in \theta_2^1$. Поэтому можем считать, что $A_{1\theta_1} \neq \varnothing$ и аналогично $A_{1\theta_2} \neq \varnothing$. По условию c) леммы $A_{1\theta_1} \cap A_{1\theta_2} \neq \varnothing$, и пусть $y \in A_{1\theta_1} \cap A_{1\theta_2}$. По лемме 2.6 $x_l(\theta_1^1 \vee \theta_2^1)y(\theta_1^1 \vee \theta_2^1)x_p$, т.е. $x_l(\theta_1^1 \vee \theta_2^1)x_p$. Таким образом, $(\theta_1 \vee \theta_2)^1 \subseteq \theta_1^1 \vee \theta_2^1$.

Пусть условие d) выполняется.

Покажем 3). Включение $A_{1(\theta_1 \wedge \theta_2)} \subseteq A_{1\theta_1} \cap A_{1\theta_2}$ очевидно. Покажем обратное включение.

Пусть $a \in A_{1\theta_1} \cap A_{1\theta_2}$. Тогда существуют $b, c \in A_2$ такие, что $a\theta_1 b, a\theta_2 c$. Следовательно, $b \in A_{2\theta_1}$ и $c \in A_{2\theta_2}$. По условию d) леммы $A_{2\theta_1} \cap A_{2\theta_2} \neq \varnothing$, т.е. существует $d \in A_{2\theta_1} \cap A_{2\theta_2}$. По лемме 2.6 $d\theta_1 b$ и $d\theta_2 c$. Отсюда получаем $a\theta_1 d, a\theta_2 d$, т.е. $a \in A_{1(\theta_1 \wedge \theta_2)}$. Таким образом, $A_{1(\theta_1 \wedge \theta_2)} \supseteq A_{1\theta_1} \cap A_{1\theta_2}$.

Покажем 4). Если $A_{1\theta_1} \cup A_{1\theta_2} = \varnothing$, то $A_{1(\theta_1 \vee \theta_2)} = \varnothing$. Если $A_{1\theta_1} \cup A_{1\theta_2} \neq \varnothing$, то равенство $A_{1(\theta_1 \vee \theta_2)} = (\theta_1^1 \vee \theta_2^1)(a)$, где $a \in A_{1\theta_1} \cup A_{1\theta_2}$, следует из леммы 2.6 и равенства $(\theta_1 \vee \theta_2)^1 = \theta_1^1 \vee \theta_2^1$. □

Заметим, что равенство 1) справедливо и без предположений b)-c), а равенство 4) – без предположения d), но в дальнейшем это не используется.

Из доказательства леммы 2.7 получаем следствие.

Следствие 2.8. *Пусть для полигона ${}_SA$ выполняются условия a)-b) леммы 2.7 и пусть θ_1, $\theta_2 \in \mathrm{Con}({}_SA)$ таковы, что выполняется одно из следующих условий:*

(i) $A_{1\theta_1} \cap A_{1\theta_2} \neq \varnothing$;

(ii) $A_{1\theta_1} = \varnothing$ или $A_{1\theta_2} = \varnothing$.

Тогда справедливы равенства 1)–2) *леммы 2.7.*

3. Решетки конгруэнций полигонов

Следующие две теоремы сводят рассмотрение полигонов с модулярными и дистрибутивными решетками конгруэнций к случаю связных полигонов. Задача описания связных полигонов с модулярной и дистрибутивной решетками конгруэнций остается открытой. Для унаров, т.е. полигонов над свободным моноидом с одноэлементным множеством порождающих, такое описание можно найти в [2].

Теорема 3.1. *Решетка конгруэнций* $\mathrm{Con}({}_SA)$ *полигона* ${}_SA$ *модулярна тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) в полигоне ${}_SA$ *нет четырех попарно непересекающихся подполигонов;*

2) решетки конгруэнций компонент связности полигона ${}_SA$ *модулярны;*

3) в решетке конгруэнций $\mathrm{Con}({}_SA)$ *полигона* ${}_SA$ *нет сквозных конгруэнций.*

Доказательство. Докажем необходимые условия. Условие 1) следует из следствия 2.5, условие 2) очевидно, условие 3) следует из леммы 2.4.

Докажем достаточное условие. Пусть $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathrm{Con}({}_SA)$, $\theta_3 \subseteq \theta_2$ и выполняются равенства:

$$\theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_1 \wedge \theta_3 \text{ и } \theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \vee \theta_3. \tag{1}$$

По факту 1.2 достаточно показать, что $\theta_2 = \theta_3$.

Из условия 1) следует, что в полигоне ${}_SA$ не более трех компонент связности. Если ${}_SA$ – связный полигон, то модулярность решетки конгруэнций $\mathrm{Con}({}_SA)$ следует из условия 2).

Пусть ${}_SA = {}_SA_1 \sqcup {}_SA_2$, где ${}_SA_1, {}_SA_2$ – компоненты связности полигона ${}_SA$. Из условия 1) следует, что либо в ${}_SA_1$, либо в ${}_SA_2$ нет двух непересекающихся подполигонов. Пусть, для определенности, в ${}_SA_1$ нет двух непересекающихся подполигонов.

Из условия 3) и леммы 2.7(1-2) вытекает, что

$$\theta_1^1 \vee \theta_2^1 = \theta_1^1 \vee \theta_3^1 \text{ и } \theta_1^i \wedge \theta_2^i = \theta_1^i \wedge \theta_3^i \text{ для любого } i \in \{1, 2\}.$$

Из условия 2) и факта 1.2 следует, что $\theta_2^1 = \theta_3^1$. Из включения $\theta_3 \subseteq \theta_2$ следует, что $A_{i\theta_3} \subseteq A_{i\theta_2}$ для любого $i \in \{1, 2\}$. Поэтому $A_{1\theta_3} = A_{1\theta_2}$ по лемме 2.6(i). Возможны следующие случаи.

Случай 1: $A_{2\theta_1} \cap A_{2\theta_3} \neq \varnothing$.
В этом случае $A_{2\theta_1} \cap A_{2\theta_2} \neq \varnothing$. По следствию 2.8 получаем, что $\theta_1^2 \vee \theta_2^2 = \theta_1^2 \vee \theta_3^2$.

Случай 2: $A_{2\theta_1} \cap A_{2\theta_3} = \varnothing$.
Покажем, что в этом случае также выполняется равенство $\theta_1^2 \vee \theta_2^2 = \theta_1^2 \vee \theta_3^2$. Для этого достаточно показать включение $\theta_1^2 \vee \theta_2^2 \subseteq \theta_1^2 \vee \theta_3^2$. Предположим, что $a \neq b$ и $(a, b) \in \theta_1^2 \vee \theta_2^2$. Тогда $a, b \in A_2$ и $(a, b) \in \theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \vee \theta_3$. Выберем минимальное $n < \omega$ с условием: существуют $a_0, \ldots, a_n \in A$ такие, что $a = a_0$, $b = a_n$ и $(a_i, a_{i+1}) \in \theta_1 \cup \theta_3$ для всех $i < n$. Для доказательства включения $\theta_1^2 \vee \theta_2^2 \subseteq \theta_1^2 \vee \theta_3^2$ достаточно проверить, что $a_i \in A_2$ для всех $i \leqslant n$.

Предположим противное. Тогда найдутся $k, l < \omega$ такие, что $0 < k < l < n$ и

$$a_0, \ldots, a_{k-1}, a_{l+1}, \ldots, a_n \in A_2 \quad \text{и} \quad a_k, a_l \in A_1.$$

В этом случае a_{k-1}, $a_{l+1} \in A_{2\theta_3} \cup A_{2\theta_3}$. Если a_{k-1}, $a_{l+1} \in A_{2\theta_1}$ или a_{k-1}, $a_{l+1} \in A_{2\theta_3}$, то по лемме 2.6(i) $(a_{k-1}, a_{l+1}) \in \theta_1^2$ или $(a_{k-1}, a_{l+1}) \in \theta_3^2$, что противоречит минимальности n. Поэтому либо $a_{k-1} \in A_{2\theta_1}$, $a_{l+1} \in A_{2\theta_3}$, либо $a_{k-1} \in A_{2\theta_3}$, $a_{l+1} \in A_{2\theta_1}$. Рассмотрим лишь первый случай, поскольку второй рассматривается аналогично первому. Так как $a_0, \dots, a_{k-1}, a_{l+1}, \dots, a_n \in A_2$, то

$$(a_{k-1}, a) \in \theta_1^2 \vee \theta_3^2; \quad (a, b) \in \theta_1^2 \vee \theta_2^2; \quad (b, a_{l+1}) \in \theta_1^2 \vee \theta_3^2.$$

Отсюда следует, что $(a_{k-1}, a_{l+1}) \in \theta_1^2 \vee \theta_2^2$. Выберем минимальное $m < \omega$ с условием: существуют $b_0, \dots, b_m \in A_2$ такие, что $a_{k-1} = b_0$, $a_{l+1} = b_m$ и $(b_i, b_{i+1}) \in \theta_1^2 \cup \theta_2^2$ для всех $i < m$. Возможно несколько подслучаев.

Случай 2.1: $m = 0$.
Этот случай невозможен, поскольку равенство $a_{k-1} = b_0 = a_{l+1}$ противоречит минимальности n.

Случай 2.2: $m = 1$.
В этом случае $(a_{k-1}, a_{l+1}) \in \theta_1^2 \cup \theta_2^2$. Включение $(a_{k-1}, a_{l+1}) \in \theta_1^2$ противоречит минимальности n. Если же $(a_{k-1}, a_{l+1}) \in \theta_2^2$, то $a_{k-1} \in A_{2\theta_1} \cap A_{2\theta_2}$.

Случай 2.3: $m > 1$.
Рассмотрим максимальное $m_1 \leqslant m$ с условием, что $b_{m_1} \in A_{2\theta_1}$. Такое m_1 существует, так как $b_0 = a_{k-1} \in A_{2\theta_1}$; при этом $m_1 < m$, поскольку в противном случае $b_m = a_{l+1} \in A_{2\theta_1} \cap A_{2\theta_3} = \varnothing$. Обозначим через ${}_SB$ подполигон, порожденный элементом b_{m_1+1}. Так как по условию 1) в ${}_SA_2$ нет трех попарно непересекающихся непустых полигонов и $A_{2\theta_1} \cap A_{2\theta_3} = \varnothing$, получаем, что ${}_SB \cap A_{2\theta_1} \neq \varnothing$ или ${}_SB \cap A_{2\theta_3} \neq \varnothing$.

Предположим, что ${}_SB \cap A_{2\theta_1} \neq \varnothing$. Тогда $sb_{m_1+1} \in A_{2\theta_1}$ для некоторого $s \in S$. Если $(b_{m_1}, b_{m_1+1}) \in \theta_1$, то $b_{m_1+1} \in A_{2\theta_1}$ согласно лемме 2.6(i), что невозможно в силу выбора m_1. Поэтому $b_{m_1}\theta_2 b_{m_1+1}\theta_1 b_{m_1+2}$ и $sb_{m_1+1}\theta_1 sb_{m_1+2}$, если $m_1 + 2 \leqslant m$. Так как $sb_{m_1+1} \in A_{2\theta_1}$, получаем $sb_{m_1+2} \in A_{2\theta_1}$ согласно лемме 2.6(i). Рассуждая подобным образом, мы придем к заключению, что $sb_i \in A_{2\theta_1}$ для любого $i \in \{m_1, \dots, m\}$; в частности, $sb_m \in A_{2\theta_1}$. Поскольку ${}_SA_{2\theta_3}$ является подполигоном в ${}_SA_2$ и $b_m \in A_{2\theta_3}$, то $sb_m \in A_{2\theta_1} \cap A_{2\theta_3} = \varnothing$, что невозможно. Таким образом, ${}_SB \cap A_{2\theta_1} = \varnothing$, и поэтому ${}_SB \cap A_{2\theta_3} \neq \varnothing$.

Для некоторого $s \in S$ выполняется соотношение $sb_{m_1+1} \in A_{2\theta_3} \subseteq A_{2\theta_2}$. Если $(b_{m_1}, b_{m_1+1}) \in \theta_1$, то $(sb_{m_1}, sb_{m_1+1}) \in \theta_1$, и поэтому $sb_{m_1+1} \in A_{2\theta_1} \cap A_{2\theta_3}$ согласно лемме 2.6(i), что невозможно. Таким образом, $(b_{m_1}, b_{m_1+1}) \in \theta_2$ и $(sb_{m_1}, sb_{m_1+1}) \in \theta_2$. Поэтому $sb_{m_1} \in A_{2\theta_2}$ согласно лемме 2.6(i). Поскольку ${}_SA_{2\theta_1}$ является подполигоном в ${}_SA$, получаем $sb_{m_1} \in A_{2\theta_1} \cap A_{2\theta_2}$.

Таким образом, в случае 2 получаем $A_{2\theta_1} \cap A_{2\theta_2} \neq \varnothing$. Это означает, что $A_{2\theta_1} \neq \varnothing$ и $A_{2\theta_2} \neq \varnothing$. Поэтому $A_{1\theta_1} \neq \varnothing$ и $A_{1\theta_2} \neq \varnothing$. Так как в ${}_SA_1$ нет непустых непересекающихся полигонов, то $A_{1\theta_1} \cap A_{1\theta_2} \neq \varnothing$.

Пусть $a \in A_{1\theta_1} \cap A_{1\theta_2}$ и $b \in A_{2\theta_1} \cap A_{2\theta_2}$. Тогда $(a, b) \in \theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_1 \wedge \theta_3$. Поэтому $b \in A_{2\theta_1} \cap A_{2\theta_3}$, что невозможно. Таким образом, наше предположение о том, что не все элементы a_i, $i \leqslant n$, лежат в A_2, неверно, и $\theta_1^2 \vee \theta_2^2 \subseteq \theta_1^2 \vee \theta_3^2$.

Поэтому в любом случае $\theta_1^2 \vee \theta_2^2 = \theta_1^2 \vee \theta_3^2$. Из условия 2) и факта 1.2 следует, что

$\theta_2^2 = \theta_3^2$. Из включения $A_{2\theta_3} \subseteq A_{2\theta_2}$ по лемме 2.6(i) получаем равенство $A_{2\theta_3} = A_{2\theta_2}$. Применяя лемму 2.6(ii), получаем $\theta_2 = \theta_3$.

Пусть ${}_SA = {}_SA_1 \sqcup {}_SA_2 \sqcup {}_SA_3$, где ${}_SA_1$, ${}_SA_2$, ${}_SA_3$ — компоненты связности полигона ${}_SA$. Из условия 1) следует, что для любого $i \in \{1,2,3\}$ в ${}_SA_i$ нет двух непустых непересекающихся полигонов. Из условия 3) и леммы 2.7 следует, что

$$\theta_1^i \vee \theta_2^i = \theta_1^i \vee \theta_3^i \text{ и } \theta_1^i \wedge \theta_2^i = \theta_1^i \wedge \theta_3^i \text{ для любого } i \in \{1,2,3\}.$$

Из условия 2) и факта 1.2 следует, что $\theta_2^i = \theta_3^i$ для любого $i \in \{1,2,3\}$. Для любого $i \in \{1,2,3\}$ из включения $\theta_3^i \subseteq \theta_2^i$ получаем включение $A_{i\theta_3} \subseteq A_{i\theta_2}$. По лемме 2.6(i) из равенства $\theta_2^i = \theta_3^i$ следует $A_{i\theta_3} = A_{i\theta_2}$. Применяя лемму 2.6(ii), получаем равенство $\theta_2 = \theta_3$. □

Теорема 3.2. *Решетка конгруэнций* $\mathrm{Con}({}_SA)$ *полигона* ${}_SA$ *дистрибутивна тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) в полигоне ${}_SA$ *нет трех попарно непересекающихся подполигонов;*

2) решетки конгруэнций компонент связности полигона ${}_SA$ *дистрибутивны;*

3) в решетке конгруэнций $\mathrm{Con}({}_SA)$ *полигона* ${}_SA$ *нет сквозных конгруэнций.*

Доказательство. Докажем необходимые условия. Условие 1) следует из леммы 2.1, условие 2) очевидно, условие 3) следует из леммы 2.4.

Докажем достаточное условие. Из условия 1) следует, что в полигоне ${}_SA$ не более двух компонент связности. Если ${}_SA$ – связный полигон, то дистрибутивность решетки конгруэнций $\mathrm{Con}({}_SA)$ следует из условия 2).

Пусть ${}_SA = {}_SA_1 \sqcup {}_SA_2$, где ${}_SA_1, {}_SA_2$ – компоненты связности полигона ${}_SA$. Из условия 1) следует, что в ${}_SA_i$ ($i \in \{1,2\}$) нет двух непересекающихся подполигонов. Пусть $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathrm{Con}({}_SA)$ и выполняются равенства:

$$\theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_1 \wedge \theta_3 \text{ и } \theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \vee \theta_3. \tag{2}$$

По факту 1.3 достаточно показать, что $\theta_2 = \theta_3$.

Пусть $i \in \{1,2\}$. Из леммы 2.7 и (2) следует, что $\theta_1^i \wedge \theta_2^i = \theta_1^i \wedge \theta_3^i$ и $\theta_1^i \vee \theta_2^i = \theta_1^i \vee \theta_3^i$. Из условия 2) и факта 1.3 следует, что $\theta_2^i = \theta_3^i$ для любого $i \in \{1,2\}$. Предположим, что $A_{i\theta_2} \neq \varnothing$ для некоторого $i \in \{1,2\}$. Тогда $A_{i\theta_2} \neq \varnothing$ для любого $i \in \{1,2\}$. Так как $\theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \vee \theta_3$, то отсюда следует, что $A_{i\theta_1} \neq \varnothing$ для любого $i \in \{1,2\}$. Подполигоны $A_{i\theta_1}$, $A_{i\theta_2}$ полигона ${}_SA_i$ непусты, поэтому $A_{i\theta_1} \cap A_{i\theta_2} \neq \varnothing$ для любого $i \in \{1,2\}$. Если $a \in A_{1\theta_1} \cap A_{1\theta_2}$, $b \in A_{2\theta_1} \cap A_{2\theta_2}$, то $(a,b) \in \theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_1 \wedge \theta_3$; в частности, $(a,b) \in \theta_3$. Поэтому $A_{i\theta_3} \neq \varnothing$ для любого $i \in \{1,2\}$. Непустота $A_{i\theta_3}$ для некоторого $i \in \{1,2\}$ влечет непустоту $A_{i\theta_2}$ для любого $i \in \{1,2\}$. Так как полигон ${}_SA_i$ не содержит непустых непересекающихся подполигонов, то в этом случае $A_{i\theta_2} \cap A_{i\theta_3} \neq \varnothing$ для любого $i \in \{1,2\}$. По лемме 2.6(i) из равенства $\theta_2^i = \theta_3^i$ получаем равенство $A_{i\theta_2} = A_{i\theta_3}$ для любого $i \in \{1,2\}$. Таким образом, $\theta_2 = \theta_3$ по лемме 2.6(ii). □

Список литературы

[1] Д. П. Егорова, Л. А. Скорняков, “О структуре конгруэнций унарной алгебры”, *Упорядоченные множества и решетки*, Межвузовский научный сборник, 1977, 28–40.

[2] Д. П. Егорова, “Структура конгруэнций унарной алгебры”, *Упорядоченные множества и решетки*, Межвузовский научный сборник, 1978, 11–44.

[3] Д. О. Птахов, “Решетки слабых конгруэнций унарных алгебр”, *Синтаксис и семантик логических систем*, 2010, 83–85.

[4] Л. А. Скорняков, *Элементы общей алгебры*, Наука, М., 1983.

[5] M. Kilp, U. Knauer, A. V. Mikhalev, *Acts and Categories*, Walter de Gruyet, Berlin, 2000.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 29 ноября 2011 г.

Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00336-а).

Ptahov D. O., Stepanova A. A. Congruence lattice of S-acts. Far Eastern Mathematical Journal. 2013. V. 13. № 1. P. 107–115.

ABSTRACT

In this work we give the necessary and sufficient conditions for modularity and distributivity of the congruence lattice of disconnected S-acts.
Key words: *lattice, modular lattice, distributive lattice, congruence lattice of algebra, S-act.*