Дальневосточный математический журнал. 2013. Том 13. № 1. С. 116–126

УДК 539.3
MSC2010 74B20, 74J40, 74J30, 74H10

© В. Е. Рагозина, Ю. Е. Иванова[1]

Эволюционное уравнение поперечных ударных волн в твердом теле

Для одноволновых процессов в несжимаемых нелинейно упругих средах проводится решение ряда краевых задач на основе метода сращиваемых асимптотических разложений. Прифронтовая область волны в главном определяется на основе нелинейного эволюционного уравнения, отличного от уравнения Коула – Хопфа, что свидетельствует о принципиальных различиях в механизмах образования и последующего движения объемных и сдвиговых ударных волн. Для определения поля перемещений и деформаций среды авторами предлагается включение частных решений эволюционного уравнения в дополнительный параметрический метод.

Ключевые слова: *нелинейная упругость, несжимаемость, ударная волна, метод возмущений, эволюционное уравнение.*

Введение

Задача описания динамических нестационарных волновых процессов в твердом теле на сегодняшний день не является полностью решенной. Нелинейная взаимосвязь процессов изменения объема и формы, зависимость скоростей ударных волн и геометрии волновых поверхностей от состояния среды в окрестности волнового фронта [1, 2] приводят к невозможности построения точных аналитических решений, за исключением простейших случаев. Это обстоятельство приводит к возрастанию роли приближенных аналитических методов как основе для качественного анализа динамических задач. Метод лучевых рядов [3, 4], метод сращиваемых асимптотических разложений [5] оказались здесь наиболее эффективными. Действительно, для прифронтовой области продольной волны, движущейся в твердом теле, применение метода малого параметра позволяет получить уравнение Коула – Хопфа [6]. Это свойство волнового процесса находится в полной аналогии с газовой динамикой. Включение модельной вязкости переводит данное уравнение в уравнение Бюргерса [7], а учет структуры среды отражается уравнением Кортвега – де

[1]Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, 690041, г. Владивосток, ул. Радио, 5. Электронная почта: `ragozina@vlc.ru, ivanova@iacp.dvo.ru`

Вриза [7]. Для описания чисто сдвиговых процессов без влияния на них объемного деформирования остановимся на модели несжимаемой изотропной нелинейно упругой среды. В работе изучается возникающее при этом новое эволюционное уравнение и математические вопросы, связанные с возможностью включения его частных решений в решения конкретных краевых задач. Полученные решения имеют дополнительное значение как основа для оценки коэффициентов лучевых рядов. Как известно, в случае возникновения ударной волны уравнения лучевого метода в его классическом варианте теряют рекуррентность, что требует изменений в самом методе. Поскольку и лучевой метод, и метод сращиваемых асимптотических рядов в прифронтовой области исходят из общих уравнений движения и краевых условий на ударной волне, решения эволюционного уравнения могут применяться к анализу основного уравнения затухания лучевого метода.

1. Общие модельные соотношения и рассматриваемая краевая задача

Система уравнений, задающая движение нелинейно упругой изотропной несжимаемой среды в пространственной декартовой системе координат Эйлера x_1, x_2, x_3 имеет вид

$$\begin{gathered} v_i = \dot{u}_i + u_{i,j}v_j, \quad 2\alpha_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}, \\ \sigma_{ij,j} = \rho(\dot{v}_i + v_{i,j}v_j), \quad \sigma_{ij} = -p_0\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}}(\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), \\ W = (a-\mu)I_1 + aI_2 + bI_1^2 - \kappa I_1 I_2 - \theta I_1^3 + cI_1^4 + dI_2^2 + kI_1^2 I_2 + \ldots \\ I_1 = \alpha_{ii}, \quad I_2 = \alpha_{ij}\alpha_{ji}, \quad \dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь u_i и v_i — компоненты вектора перемещений и вектора скорости, α_{ij} — компоненты тензора деформаций Альманси, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений Эйлера–Коши, $\rho = const$ — плотность среды, p_0 — добавочное гидростатическое давление, W — функция упругого потенциала, μ, a, b, κ, θ, c, d, k — упругие модули среды, δ_{ij} — символ Кронекера. По повторяющемуся индексу в формулах (1) и далее проводим суммирование, многоточием обозначаем невыписанные слагаемые с более высоким порядком малости.

Если результатом краевого воздействия на среду становится образование ударных волн, то на них должны выполняться геометрические, кинематические и динамические условия совместности [8, 9]:

$$\begin{gathered} [f_{,i}] = \left[\frac{df}{dn}\right] n_i + a^{\alpha\beta}[f]_{,\alpha} x_{i,\beta}, \quad [\dot{f}] = -G\left[\frac{df}{dn}\right] + \frac{\delta[f]}{\delta t}, \quad [\rho(v_i n_i - G)] = 0, \\ [\sigma_{ij}]n_j = \rho^+(v_j^+ n_j - G)[v_i], \quad \sigma_{ij}^+[v_i]n_j = \rho^+(v_j^+ n_j - G)\left\{\frac{[v_i][v_i]}{2} + [e]\right\} - [q_j]n_j, \quad (2) \\ \frac{df}{dn} = f_{,i}n_i, \quad x_{i,\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial y^\alpha}, \quad a_{\alpha\beta} = x_{i,\alpha}x_{i,\beta}, \quad a^{\alpha\beta}a_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma, \quad [f] = f^+ - f^-, \quad \frac{\delta f}{\delta t} = \dot{f} + f_{,i}Gn_i, \end{gathered}$$

где n_i — компоненты единичной внешней нормали к ударной волне Σ, направленной в сторону распространения волны, G — скорость движения волны в направлении нормали, $y^\alpha (\alpha = 1, 2)$ — поверхностные координаты, e — плотность внутренней энергии, q_j — компоненты вектора теплового потока. Обозначения f^+ и f^- приняты для предельных значений величины f перед волновой поверхностью Σ и сразу за ней. Под обозначением «f» понимаются компоненты любого тензорного поля в пространстве.

Рассмотрим полупространство $x_1 \geq 0$. В момент $t = 0$ на его граничной плоскости L $(x_1 = 0)$ проводится динамическое сдвиговое нагружение, результатом которого считаем поле перемещений $u = u_2(x_1, t)$, $u_1 = u_3 = 0$. Нагружение сразу приводит к возникновению ударной волны либо впоследствии. До момента $t = 0$ деформации в среде отсутствуют. Перемещения на границе — известные функции, так что

$$u|_{x_1=0} = g(t). \tag{3}$$

Для мгновенного возникновения ударной волны необходимо, чтобы для функции краевого условия (3) выполнялось требование $g'(0) \neq 0$. В остальных случаях необходим дополнительный анализ. Следствием систем (1), (2) будут условия

$$\begin{gathered} G = C(1 + \beta(\gamma^2 - 3u^+_{,1}\gamma + 3(u^+_{,1})^2) + \ldots)^{1/2}, \quad \gamma = [u_{,1}], \\ [u]\Big|_\Sigma = 0, \quad [\sigma_{11}]\Big|_\Sigma = 0, \quad \beta = \frac{a + b + \kappa + d}{\mu}, C^2 = \mu\rho^{-1}. \end{gathered} \tag{4}$$

Для расматриваемой задачи из общей системы уравнений (1) получим следующую систему уравнений движения:

$$\begin{gathered} u_{,11}(1 + 3\beta u^2_{,1}) + \ldots = \ddot{u}C^{-2} + \ldots \\ \mu^{-1}p_{,1} = 2\alpha u_{,1}u_{,11} + \ldots, \quad \alpha = \frac{a - b - \kappa/4}{\mu} - 1. \end{gathered} \tag{5}$$

Отметим, что основной интерес при решении связан с определением поля перемещений, так как определить по найденным перемещениям функцию p не представляет труда. Интегрирование нелинейного дифференциального уравнения второго порядка проведем на основе метода сращиваемых асимптотических разложений.

2. Метод сращиваемых асимптотических разложений для одномерного сдвигового деформирования

С целью применения метода возмущений определим новые безразмерные переменные

$$s = \frac{x_1}{CT}, \quad m = \frac{t}{T}, \quad w(s, m) = \frac{u(x_1, t)}{CT}\varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon \ll 1, \tag{6}$$

где T — характерное время задачи. Считаем, что за такое время возникающие на границе перемещения много меньше, чем проходимое волной в линейном приближении расстояние, что и определяет появление малого параметра задачи. Если $g'(0) \neq 0$, то таким параметром может быть величина $\varepsilon = g'(0)C^{-1}$. В новых переменных из системы (5) для поля перемещений получим

$$w_{,ss}(1 + 3\beta\varepsilon^2 w_{,s}^2) + \ldots = w_{,mm} + \ldots$$

От условия (3) перейдем к условию $w|_{s=0} = f(m)$. Искомую функцию $w(s,m)$ представим асимптотическим рядом по четным степеням малого параметра:

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} w_{2k}(s,m)\varepsilon^{2k} \approx w_0(s,m) + \varepsilon^2 w_2(s,m) + \varepsilon^4 w_4(s,m) + \ldots$$

Относительно неизвестных функций w_0, w_2, $w_4, \ldots$ получаем краевую задачу, не учитывающую условия (4). Ее решение назовем внешним разложением [10], оно определяется методом последовательных линейных приближений:

$$w(s,m) = f(\xi) + \varepsilon^2 \frac{\beta}{2}(f'(\xi))^3 s + \varepsilon^4\beta^2 \left\{ \frac{9}{8}(f'(\xi))^4 f''(\xi)(s^2 + s\xi - s) - \right. \tag{7}$$
$$\left. - \frac{39}{40}(f'(\xi))^5 s \right\} + \ldots, \quad \xi = m - s.$$

Отметим, что при определении ряда (7) можно формально учесть условия (4), записанные в переменных s, m, что приведет к такому же результату. В любом случае, если есть ударная волна, то ее скорость G больше C, поэтому в прифронтовой области, где $m - s < 0$, решение (7) неприменимо, т.к. f определена для неотрицательного аргумента.

Построение дополнительного, внутреннего [10] решения в прифронтовой области необходимо провести для переменной $s \sim \varepsilon^{-2}$, тогда ряд (8) теряет равномерность. Задавая внутренние переменные формулами $n = \varepsilon^2 s, \quad p = s - m, \quad w = w(n,p)$,уравнение (6) преобразуем к уравнению

$$(w_{,pp} + 2\varepsilon^2 w_{,pn} + \varepsilon^4 w_{,nn})\{1 + 3\beta\varepsilon^2(w_{,p} + \varepsilon^2 w_{,n})^2\} + \ldots = w_{,pp}, \tag{8}$$

из формулы (4) и уравнения эйконала $t = \int\limits_{x_1^0}^{x_1} G(\zeta)\, d\zeta$ (x_1^0 — начальная координата образования ударной волны) следует

$$(1 - \varepsilon^2 p'(n))^2\{1 + \beta\varepsilon^2(w_{,p}^+ + \varepsilon^2 w_{,n}^+)^2 + (w_{,p}^+ + \varepsilon^2 w_{,n}^+)(w_{,p}^- + \varepsilon^2 w_{,n}^-) + \tag{9}$$
$$+ (w_{,p}^- + \varepsilon^2 w_{,n}^-)^2 + \ldots\} = 1,$$

где $p(n)$ — неизвестная функция, определяющая положение переднего фронта ударной волны. Предварительные деформации считаем величинами одного порядка малости с решением за волной. Новую неизвестную функцию $w(n,p)$, как и функцию

$p(n)$, представим асимптотическими рядами вида

$$w(n,p)=\sum_{k=0}^{\infty} w_{2k}\varepsilon^{2k} \approx w_0(n,p)+\ldots, \tag{10}$$
$$p(n)=\sum_{k=0}^{\infty} p_{2k}\varepsilon^{2k} \approx p_0(n)+\ldots$$

В результате подстановки ряда для $w(n,p)$ в уравнение (8) на нулевом шаге метода получим

$$v_{0,n}+\frac{3\beta}{2}v_0^2 v_{0,p}=0, \quad v_0=w_{0,p}. \tag{11}$$

Это уравнение определяет основное поведение решения уравнения (8) в прифронтовой области волнового процесса. По своему типу уравнение (11) должно быть отнесено к эволюционным уравнениям, поскольку отражает нелинейную зависимость характеристик волнового процесса от строящегося решения, тем самым давая возможность описать опрокидывание исходного непрерывного решения с формированием ударной волны. Отличием этого уравнения от уравнения Хопфа является зависимость угла наклона характеристик от квадрата функции v_0, а не от ее первой степени. Такое простое математическое обстоятельство указывает на различия в появлении и движении объемных и сдвиговых ударных волн. Вдальнейшем покажем, что на основе уравнения (11) и его решений можно рассматривать различные вопросы, от кинематики ударной волны до определения поля перемещений в области деформирования.

3. Эволюционное уравнение и его решения при определении напряженно-деформированного состояния за фронтом ударной сдвиговой волны

Ранее [11] решения эволюционных уравнений для задач ударного деформирования в твердом теле рассматривались в пределах квадратичных либо линейных функций времени $g(t)$ в формуле (3) для перемещений u на нагружаемой поверхности. Рассмотрим подход, позволяющий применить метод сращиваемых асимптотических разложений с включением решения уравнения (11) для произвольных функций времени $g(t)$, задающих краевые условия. С этой целью заметим, что уравнение (11) имеет общее решение вдоль характеристик вида

$$v_0=F\left(p-\frac{3\beta}{2}nv_0^2\right), \tag{12}$$

где F — произвольная функция, определяемая краевыми условиями. На уравнение (12) также можно смотреть как на соотношение

$$w_{0,p}=F\left(p-\frac{3\beta}{2}nw_{0,p}^2\right), \tag{13}$$

которое по типу может быть отнесено к обыкновенным дифференциальным уравнениям, не содержащим искомой функции $w_0(n,p)$ (т.к. переменная n играет здесь роль параметра). Для таких уравнений задача интегрирования распадается на два варианта. В первом необходимо, чтобы функция F допускала явное представление производной $w_{0,p}(n,p)$ с последующим интегрированием полученного уравнения. Это возможно, если функция F имеет вид некоторых алгебраических либо рациональных уравнений. Второй способ более универсален и связан с параметрическим представлением решения. Остановимся на нем более подробно. Предположим, что $w_{0,p} = \psi(\delta)$, $p = \varphi(\delta, n)$, где δ — новый параметр, выбор которого достаточно произволен и связан с удобством представления краевых условий. Функции $\psi(\delta)$ и $\varphi(\delta, n)$ связаны между собой, как следует из уравнения (13). Тогда для определения функции $w_0(n,p)$ получим уравнение

$$dw_0 = \psi(\delta, n)\frac{\partial\varphi(\delta, n)}{\partial\delta}d\delta,$$

интегрирование которого дает параметрическое решение

$$\begin{cases} w_0(n,p) = w_0(n, p(\delta, n)) = W_0(\delta, n) \\ p = p(\delta, n) \end{cases}$$

В качестве примера параметрического подхода представления перемещений рассмотрим краевое условие

$$u(t)|_{x_1=0} = -\frac{A}{\beta_0}\left(1 - e^{\beta_0 t}\right), \quad A > 0, \quad \beta_0 < 0,$$

ему соответствует экспоненциальное затухание начального импульса A до 0. В переменных (6) внешней области переходим к краевому условию

$$w(s,m)|_{s=0} = B^{-1}\left(1 - e^{-Bm}\right), \quad B = -\beta_0 T, \quad \varepsilon = \frac{A}{C}.$$

Предположим, что $v_0 = \psi(\delta), -\infty < \delta \leq 0$. Тогда $p = \varphi(\delta) = \dfrac{\delta}{B} + \dfrac{3\beta}{2}ne^{2\delta}$, поэтому

$$\begin{cases} W_0(n,\delta) = -\dfrac{e^{\delta}}{B} - \beta n e^{3\delta} + K_0(n) \\ p = p(\delta, n) = \dfrac{\delta}{B} + \dfrac{3\beta}{2}ne^{2\delta}, \end{cases} \tag{14}$$

где $K_0(n)$ — неизвестная функция, вид которой устанавливается из краевого условия на переднем фронте ударной волны:

$$w(n,p)|_{\Sigma} = 0. \tag{15}$$

Положение ударной волны на нулевом шаге метода определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dp}{dn} = \frac{\beta}{2}v_0^2(n, p(n)), \tag{16}$$

но $\dfrac{dp}{dn} = \dfrac{\partial\varphi(n,\delta)}{\partial n} + \dfrac{\partial\varphi(n,\delta)}{\partial\delta}\dfrac{d\delta}{dn}$, поэтому теперь ищем не функцию $p(n)$, а функцию $\delta(n)$ или обратную к ней. При этом получаем уравнение

$$\frac{dn(\delta)}{d\delta} = -3n - \frac{1}{\beta B}e^{-2\delta} \tag{17}$$

и на основе его решения с учетом начальных условий $n(0) = 0$ записываем для ударной волны

$$\begin{cases} n(\delta) = \dfrac{1}{\beta B}\left\{e^{-3\delta} - e^{-2\delta}\right\} \\ p(\delta) = \dfrac{\delta}{B} + \dfrac{3}{2B}\left\{e^{-\delta} - 1\right\}. \end{cases} \tag{18}$$

Полученные формулы позволяют определить неизвестную функцию $K_0(n) \equiv 0$. При сращивании с внешним рядом (7) в пограничной области метода получаем, что построенное решение (14) отвечает двум шагам внешнего ряда. Этим и заканчивается решение для нулевого шага. Описанный выше параметрический прием легко переносится на другие краевые условия типа логарифмических или тригонометрических функций.

Возвращаясь к эволюционному уравнению (11) и его решениям (13), рассмотрим еще несколько примеров, позволяющих оценить влияние нелинейности (даже слабой) на искомое решение. Остановимся на краевых условиях, позволяющих строить решение в координатах n, p. Для начала рассмотрим функцию $g(t) = v_0 t + at^2/2$, $v_0 \neq 0$. Для нее краевое условие в переменных m, s принимает вид

$$w|_{s=0} = m + \frac{Am^2}{2}, \quad A = \frac{aT}{v_0}, \quad \varepsilon = \frac{v_0}{C}. \tag{19}$$

Внешнее решение определяется подстановкой условия (17) в ряд (7) и поэтому подробно не рассматривается. Для внутреннего решения примем

$$v_0(n,p) = B_1 + B_2\left(p - \frac{3\beta}{2}v_0^2 n\right), \tag{20}$$

где B_1, B_2 — неопределенные константы, которые вычисляются при сопоставлении внутреннего и внешнего решений. Из формулы (18) получаем

$$v_0(n,p) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(B_1 + B_2 p)B_2\gamma_0 n}}{2\gamma_0 B_2 n}, \quad \gamma_0 = \frac{3\beta}{2} \tag{21}$$
$$w_0(n,p) = \frac{-6B_2^2\gamma_0 np + (1 + 4(B_1 + B_2 p)B_2\gamma_0 n)^{3/2}}{12\gamma_0^2 B_2^3 n^2} + \varphi_0(n),$$

где $\varphi_0(n)$ — неизвестная функция, определяемая из условия (15). Из формул (19) следует, что нелинейность задачи приводит к искажению исходного воздействия, так что зависимость от времени изменяется от квадратичной до содержащей степени 3/2 и 1. Отметим, что сходное краевое условие для задачи объемного деформирования приводит к прифронтовому решению для функции $w_0(n,p)$, в котором полностью сохраняется тип зависимости от времени координаты, диктуемой формулой (19). Дополнительно нелинейность приводит к слабому затуханию решения по координате n. Этот эффект указывает как на влияние нелинейности, так и на отличие сдвиговой волны от объемной. Отметим, что применение правила Лопиталя к формуле (19) приводит к предельным результатам

$$\lim_{n\to 0} v_0(n,p) = B_1 + B_2 p, \quad \lim_{n\to 0} w_0(n,p) = B_1 p + \frac{B_2 p^2}{2}, \tag{22}$$

которыми можно по непрерывности доопределить решение в нуле. Видно, что исходное воздействие передается по среде неискаженным только при $n \sim 0$. Из сравнения формул (20) с внешним решением краевой задачи следует $B_1 = -1$, $B_2 = A$. Положение волнового фронта определяется на основе уравнения (16) и может быть представлено неявной зависимостью

$$\left(\sqrt{1+4A\gamma_0 n(-1+Ap)} - 1\right)\sqrt{2\sqrt{1+4A\gamma_0 n(-1+Ap)}+1} = -2\sqrt{3}\gamma_0 A n,$$

которая после ряда алгебраических преобразований дает кубическое уравнение для функции $p(n)$. Приведем формулу для корня этого уравнения, отвечающего поставленной задаче:

$$p(n) = \begin{cases} \dfrac{\left(\cos^2\dfrac{\varphi}{3} - \dfrac{3}{4}\right)\left(\cos^2\dfrac{\varphi}{3} + \dfrac{1}{4}\right) + A\gamma_0 n}{A^2\gamma_0 n}, & \cos\varphi = -2\sqrt{3}\gamma_0 A n, \quad \dfrac{\pi}{2} < \varphi < \dfrac{3\pi}{2} \\ 0, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{2} \quad (n = 0) \end{cases}$$

Отсюда легко определяется функция $\varphi_0(n)$, что и заканчивает решение данного шага.

Теперь рассмотрим краевое условие

$$u(x_1,t)|_{x_1=0} = \sqrt{at+b} - \sqrt{b}, \quad a > 0, \quad b > 0. \tag{23}$$

От него в переменных s, m, $w(s,m)$ переходим к условию

$$w|_{s=0} = \frac{m}{\sqrt{Am+1}+1}, \quad A = \frac{aT}{b}, \quad \varepsilon = \frac{a}{C\sqrt{b}}. \tag{24}$$

Для такого условия и внешнего решения в уравнении (12) достаточно выбрать

$$v_0(n,p) = -\frac{1}{2\sqrt{1 - D(p - \gamma_0 v_0^2(n,p)n)}},$$

где D — неопределенная константа. Отсюда следует явное решение

$$v_0(n,p) = -\sqrt{\frac{-1+Dp+\sqrt{(1-Dp)^2+D\gamma_0 n}}{2D\gamma_0 n}},$$

$$w_0(n,p) = -\frac{1}{3D\sqrt{2D\gamma_0 n}}\left(\sqrt{-1+Dp+\sqrt{(1-Dp)^2+D\gamma_0 n}}\right)^3 +$$
$$+\sqrt{\frac{\gamma_0 n}{2D}}\frac{1}{\sqrt{-1+Dp+\sqrt{(1-Dp)^2+D\gamma_0 n}}} + \varphi_0(n),$$

которое также показывает искажение исходного воздействия (меняется тип зависимости от времени по-отношению к краевому условию (23)). Для определения положения ударной волны необходимо проинтегрировать уравнение Дарбу

$$\frac{dg}{dn}=\frac{g}{3n}\left(1+\frac{2D\gamma_0 n}{g^2+D\gamma_0 n}\right),\quad g=-1+Dp+\sqrt{(1-Dp)^2+D\gamma_0 n}.$$

Его решение с учетом краевого условия $\lim\limits_{n\to 0}p(n)=0$ имеет вид неявной зависимости

$$-1+Dp+\sqrt{(1-Dp)^2+D\gamma_0 n}=\ln\left\{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{-1+Dp+\sqrt{(1-Dp)^2+D\gamma_0 n}}}\right\}+$$
$$+\frac{3D\gamma_0}{2}\frac{n}{-1+Dp+\sqrt{(1-Dp)^2+D\gamma_0 n}}-3-\ln\sqrt{\frac{2}{D\gamma_0}}.$$

На основании этого уравнения функция $\varphi_0(n)$ может быть определена каким-либо численным методом. Эта задача показывает, что решения в явном виде имеют, наряду с достоинствами, и ряд отрицательных свойств. В частности, нет гарантии, что на каждом этапе вычислений мы будем получать результаты в необходимой удобной для нас форме.

Рассмотрим также еще один вариант краевого условия

$$u|_{x_1=0}=\frac{4A}{5}t^{5/4}, \tag{25}$$

интересный тем, что функция $(g'(t))^2$ имеет вертикальную касательную при $t=0$, что приводит к возникновению ударной волны мгновенно, но при этом интенсивность волны изменяется от нуля. Условие (20) в безразмерных переменных имеет вид

$$w(s,m)|_{s=0}=\frac{4}{5}m^{5/4},\quad \varepsilon=\frac{AT^{1/4}}{C},$$

поэтому во внутреннем решении рассматриваемой краевой задачи выберем $v_0=-\left(-p+\gamma_0 n v_0^2\right)^{1/4}$, откуда получаем

$$v_0(n,p)=-\sqrt{\frac{\gamma_0 n}{2}+\sqrt{-p+\frac{\gamma_0^2 n^2}{4}}}, \tag{26}$$

$$w_0(n,p)=\frac{4}{5}\left(\frac{\gamma_0 n}{2}+\sqrt{-p+\frac{\gamma_0^2 n^2}{4}}\right)^{5/2}-\frac{2\gamma_0 n}{3}\left(\sqrt{\frac{\gamma_0 n}{2}+\sqrt{-p+\frac{\gamma_0^2 n^2}{4}}}\right)^3+\varphi_0(n),$$

где $\varphi_0(n)$ — как и раньше, неопределенная функция. Это решение для поля перемещений показывает как исходную зависимость от t в степени $5/4$, так и дополнительную зависимость от степени $3/4$, которая начинает влиять на решение, когда

$n \sim 1$, т.е. на больших расстояниях. Для определения положения переднего фронта ударной волны решаем уравнение

$$\frac{dg}{dn} = \frac{\gamma_0^2 n}{6g} - \frac{\gamma_0}{6}, \quad g = \sqrt{-p + \frac{\gamma_0^2 n^2}{4}},$$

которое также является вариантом уравнения Дарбу. Интересно, что в этом случае решение задачи Коши $g(0) = 0$ совпадает с одним из особых решений. При этом получаем параболическую зависимость $p = \dfrac{5}{36}\gamma_0^2 n^2$, ее подстановка в решение (22) приводит к простому результату $\varphi_0(n) = 0$.

Заключение

Рассмотренные задачи показывают высокую эффективность описания ударных волновых процессов в твердом теле на основе решений эволюционного уравнения. Оба метода решения: и параметрический, и явный могут быть без труда перенесены на определение приближений высших порядков. Отметим, что эти приближения вычисляются как решения уравнения вида

$$w_{i,np} + \frac{3\beta}{2} w_{0,p}^2 w_{2,pp} + 3\beta w_{0,pp} w_{0,p} w_{i,p} + \Phi_i(w_0, w_{0,p}, \ldots) = 0,$$

где Φ_i — функция, определяемая предыдущими шагами. Очевидно, что это уравнение имеет такие же характеристические направления, как и исходное уравнение. Это позволяет строить решение в параметрическом виде с сохранением того же параметра δ, что и в нулевом шаге. Явное решение также может строиться, единственной проблемой здесь можно считать большой объем вычислений, хотя в практических целях обычно достаточно ограничиться одним или двумя слагаемыми ряда. Обобщение работы на случай одномерных процессов деформирования с ненулевой кривизной волнового фронта также не представляет проблем и приводит к уточненному эволюционному уравнению [11]. Рассмотренный метод имеет большое значение для понимания сути решений многомерных задач ударного деформирования. В прифронтовой области ударной волны наибольшие изменения решения происходят в направлении лучевой координаты, поэтому следует ожидать, что в лучевых координатах окрестность волнового фронта определяется эволюционным уравнением, для которого координата эйконала играет роль параметра. Практическая значимость построенных решений связана с разработкой методов численного счета для ударных волн в твердом теле [12, 13].Эти методы основаны на конечно-разностных расчетах в основной области деформирования и на применении приближенных аналитических решений в прифронтовой области ударной волны.

Список литературы

[1] А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова, *Нелинейные волны в упругих средах*, Московский лицей, Москва, 1998, 412 с.

[2] А. А. Буренин, А. Д. Чернышов, “Ударные волны в изотропном упругом пространстве”, *Прикл. математика и механика*, **42**:4 (1978), 711–717.

[3] J. D. Achenbach, D. P. Reddy, “Note of wave propogation in lineary viscoelastic media”, *ZAMP*, **18**:1 (1967), 141–144.

[4] Л. А. Бабичева, Г. И. Быковцев, Н. Д. Вервейко, “Лучевой метод решения динамических задач в упруговязкопластических средах”, *Прикл. математика и механика*, **37**:1 (1973), 145–155.

[5] М. Ван-Дайк, *Методы возмущений в механике жидкости*, Мир, Москва, 1967, 239 с.

[6] А. А. Буренин, Ю. А. Россихин, “К решению одномерной задачи нелинейной динамической теории упругости со структурной ударной волной”, *Прикл. механика*, **26**:1 (1990), 103–108.

[7] Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, Москва, 1977, 622 с.

[8] Л. И. Седов, *Механика сплошной среды. Т. 1,2. Изд-ие 2-ое испр. и дополн.*, Наука, Москва, 1973, Т.1. 536 Т.2. 584 с.

[9] Т. Томас, *Пластическое течение и разрушение в твердых телах*, Мир, Москва, 1964, 308 с.

[10] Дж. Коул, *Методы возмущений в прикладной математике*, Мир, Москва, 1972, 275 с.

[11] В. Е. Рагозина, Ю. Е. Иванова, “Об ударных осесимметрических движениях несжимаемой упругой среды при ударных воздействиях”, *ПМТФ*, **47**:6 (2006), 144–151.

[12] В. Е. Рагозина, И. И. Воронин, Е. Л. Вековшинин, “Об использовании прифронтовой асимптотики в численных решениях динамических задач теории упругости с ударными волнами”, *Проблемы естествознания и производства*, 1995, № 115, 25–27.

[13] А. А. Буренин, П. В. Зиновьев, “К проблеме выделения поверхностей разрывов в численных методах динамики деформируемых сред”, *Проблемы механики. Сборник статей к 90-летию А.Ю. Ишлинского*, 2003, 146–155.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 7 февраля 2013 г.

Ragozina V. E., Ivanova Yu. E. The evolution equation of transverse shock waves in solids. Far Eastern Mathematical Journal. 2013. V. 13. № 1. P. 116–126.

ABSTRACT

Solution of a number of boundary value problems by the method of matched asymptotic expansions for single-wave processes in incompressible nonlinear elastic media is carried out. The frontal area of the wave is defined by the nonlinear evolution equation, which is different from the Cole – Hopf equation. This demonstrates the fundamental differences in the mechanisms of formation and subsequent movement of volume and shear shock waves. The authors propose the inclusion of particular solutions of the evolution equation in the additional parametric method for the determination of the displacement field and medium strains.

Key words: *nonlinear elasticity, incompressibility, shock wave, perturbation method, evolution equation*