Дальневосточный математический журнал. 2013. Том 13. № 1. С. 127–147

УДК 514.133, 514.112.3
MSC2010 51F05

© Л. Н. Ромакина[1]

Теорема о площади прямоугольного трехреберника гиперболической плоскости положительной кривизны

На гиперболической плоскости $\widehat{H}$ положительной кривизны введена ортогональная гиперциклическая система координат. Получены формулы для вычисления площадей прямоугольного трехреберника, в частности, для трехреберника с параболической гипотенузой, дважды прямоугольного трехреберника и простого 4-контура, являющегося ячейкой в простых разбиениях плоскости $\widehat{H}$.

Ключевые слова: *гиперболическая плоскость $\widehat{H}$ положительной кривизны, гиперцикл плоскости $\widehat{H}$, ортогональная гиперциклическая система координат, основная теорема о площади прямоугольного трехреберника плоскости $\widehat{H}$.*

1. Введение

1.1. Актуальность исследования

В проективной схеме Кэли – Клейна *гиперболическая плоскость $\widehat{H}$ положительной кривизны* является внешней относительно овальной линии γ, называемой *абсолютом* плоскости, областью *расширенной гиперболической плоскости* H^2, т. е. проективной плоскости P_2 с фиксированной линией γ. В качестве прямых плоскости $\widehat{H}$ приняты объекты трех типов: *гиперболические* (*эллиптические*) прямые, пересекающие линию γ в двух действительных (мнимо сопряженных) точках, и *параболические* прямые, касательные к линии γ. На внутренней относительно γ области плоскости H^2 реализуется полная плоскость Лобачевского. Плоскость $\widehat{H}$ гомеоморфна листу Мебиуса без границ и имеет общую с плоскостью Лобачевского фундаментальную группу G, являющуюся группой проективных автоморфизмов линии γ [1], [2].

[1]Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, 410412, г. Саратов, ул. Астраханская, 83. Электронная почта: romakinaln@mail.ru

В настоящее время интерес к геометрии плоскости $\widehat{H}$ обусловлен в первую очередь тем, что она является проективной моделью плоскости де Ситтера [3], введенной в работе [4] и привлекающей на протяжении почти века внимание физиков и математиков. Значение и перспективные направления исследований пространства де Ситтера были отмечены на проводившемся в сентябре 2012 года семинаре «The Physics of de Sitter Spacetime» (Albert Einstein Institute) (http://hep.physics.uoc.gr/deSitter/content/schedule.php). Различные вопросы геометрии этого пространства решены, например, в работах [5]–[17]; в работах [12], [14] предприняты попытки построения тригонометрии плоскости де Ситтера.

Исследование плоскости де Ситтера в ее проективной модели $\widehat{H}$ позволяет формулировать и решать принципиально новые задачи. В ряде работ автора (см., например, [18]–[25]) изучены различные объекты плоскости $\widehat{H}$, а также построены особого вида изотропные разбиения этой плоскости. Инварианты указанных разбиений выражены через инварианты Δ простых 4-контуров [18], составляющих разбиения.

В данной работе представлены первые теоремы о площадях фигур плоскости $\widehat{H}$. Доказана основная теорема о площади прямоугольного трехреберника, на основании которой элементарными методами удается получить формулы для вычисления площадей различных фигур. В работу включены лишь некоторые примеры применения основной теоремы, в частности, получена формула вычисления площади простого 4-контура, являющегося ячейкой моноэдральных изотропных разбиений, построенных в работах [20]–[23], установлена связь между инвариантом Δ простого 4-контура и его площадью.

1.2. Плоскость $\widehat{H}$ как модель двумерного пространства де Ситтера

Пусть $\bar{R}^3_1$ — псевдоевклидово векторное пространство с заданной квадратичной формой $\varphi = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$. Форма φ позволяет ввести на $\bar{R}^3_1$ норму, или длину векторов. Полярная к φ билинейная форма $\bar{\varphi}$ определяет на $\bar{R}^3_1$ скалярное произведение векторов.

Каждой паре векторов $\mathbf{x}\,(x_1; x_2; x_3)$, $\mathbf{y}\,(y_1; y_2; y_3)$ поставим в соответствие число

$$\mathbf{xy} = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3,$$

которое назовем *скалярным произведением* этих векторов.

Число $\mathbf{x}^2 = \mathbf{xx}$ назовем *скалярным квадратом* вектора $\mathbf{x}$.

Длиной вектора $\mathbf{x}$ назовем число $|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}^2}$.

Ненулевой вектор пространства $\bar{R}^3_1$ назовем *изотропным*, если его длина равна нулю. Неизотропный вектор пространства $\bar{R}^3_1$ назовем *евклидовым* (*псевдоевклидовым*), если его длина является действительным (мнимым) числом.

Выберем некоторый *ортонормированный базис* $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ пространства $\bar{R}^3_1$:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = -\mathbf{k}^2 = 1, \qquad \mathbf{ij} = \mathbf{jk} = \mathbf{ik} = 0.$$

Каждый ненулевой вектор пространства $\bar{R}^3_1$ — как векторного пространства — порождает точку проективной плоскости P_2. Каждые два коллинеарных вектора порождают одну точку этой плоскости.

Пусть векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{e}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ порождают соответственно точки A_1, A_2, A_3, E на P_2. Никакие три из точек A_1, A_2, A_3, E не лежат на одной прямой, так как никакие три из векторов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{e}$ не являются компланарными. Построим проективный репер $R^*=\{A_1,A_2,A_3,E\}$ плоскости P_2, *порожденный* базисом $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$.

Все изотропные векторы пространства $\bar{R}^3_1$ порождают на P_2 овальную линию γ, заданную в репере R^* уравнением

$$x_1^2+x_2^2-x_3^2=0.$$

Пусть $R^+(\mathbf{x})$ $(R^-(\mathbf{x}))$ — одномерное подпространство пространства $\bar{R}^3_1$, натянутое на евклидов (псевдоевклидов) вектор $\mathbf{x}$. Каждая внешняя (внутренняя) относительно линии γ точка плоскости P_2 порождена векторами одного из подпространств $R^+(\mathbf{x})$ $(R^-(\mathbf{x}))$. Все подпространства $R^+(\mathbf{x})$ $(R^-(\mathbf{x}))$ порождают внешнюю (внутреннюю) относительно линии γ область плоскости P_2.

Итак, гиперболическая плоскость $\widehat{H}$ положительной кривизны порождается множеством всех подпространств $R^+(\mathbf{x})$ евклидовых векторов пространства $\bar{R}^3_1$.

Рассмотрим теперь точечно-векторное псевдоевклидово пространство R^3_1 с базовым векторным пространством $\bar{R}^3_1$. В пространстве R^3_1 между множеством всех одномерных подпространств $R^+(\mathbf{x})$ и множеством всех пар диаметрально противоположных точек сферы действительного радиуса существует взаимно однозначное соответствие.

Таким образом, плоскость $\widehat{H}$ может быть реализована на сфере действительного радиуса ρ со склеенными диаметрально противоположными точками в пространстве R^3_1 и, следовательно, является проективной моделью двумерного пространства де Ситтера. Число ρ, $\rho\in\mathbb{R}_+$, называют *радиусом кривизны*, число $1/\rho^2$ — *кривизной* плоскости $\widehat{H}$ [1], [2].

С каждой точкой пространства R^3_1 можно связать *изотропный*, или *световой*, конус, образованный всеми прямыми, проходящими через данную точку и направленными по изотропным векторам. Каждая плоскость пространства R^3_1 может быть отнесена к одному из трех типов. Пусть M — произвольная точка плоскости α в пространстве R^3_1. Плоскость α назовем *евклидовой*, *псевдоевклидовой*, или *флаговой*, если она пересекает изотропный конус с вершиной в точке M по двум мнимо сопряженным, действительным различным, или действительным совпадающим образующим соответственно. Введенное определение, очевидно, не зависит от выбора точки M.

Эллиптическим, гиперболическим и параболическим прямым плоскости $\widehat{H}$ в двумерном пространстве де Ситтера соответствуют сечения сферы действительного радиуса в пространстве R^3_1 евклидовыми, псевдоевклидовыми и флаговыми плоскостями, проходящими через центр сферы.

1.3. Собственные координаты точек на плоскости $\widehat{H}$

Каноническим репером первого типа плоскости H^2 назовем проективный репер $R^* = \{A_1, A_2, A_3, E\}$, трехвершинник $A_1A_2A_3$ которого является автополярным трехвершинником первого рода относительно абсолюта: вершины A_1, A_2, A_3 попарно сопряжены относительно γ, вершина A_3 — внутренняя относительно абсолюта точка. Единичная точка E репера R^* является пересечением касательных к абсолюту, проведенных из вершин A_1, A_2.

Уравнение абсолюта γ в каждом каноническом репере R^* имеет вид

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0. \tag{1}$$

Координаты (x_i), $i = 1, 2, 3$, собственной (несобственной) точки плоскости $\widehat{H}$ удовлетворяют условию

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 > 0 \qquad \left(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 < 0\right). \tag{2}$$

В однородных тангенциальных координатах (X_i) уравнение абсолюта в репере R^* имеет вид

$$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 0. \tag{3}$$

Координаты (X_i) гиперболической (эллиптической) прямой плоскости $\widehat{H}$ удовлетворяют условию

$$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 > 0 \qquad \left(X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 < 0\right). \tag{4}$$

Проективные координаты (x_i) точки плоскости H^2 определены с точностью до общего ненулевого множителя и, следовательно, не обеспечивают однозначного вычисления метрической квадратичной формы плоскости $\widehat{H}$, $\widehat{H} \subset H^2$. Проведем инвариантную относительно преобразований группы G нормировку координат точек плоскости H^2 в репере R^*.

Пусть (x_i) — вещественные однородные координаты точки M, $M \in H^2$, в репере R^*. *Собственными* координатами точки M на плоскости $\widehat{H}$ в репере R^* назовем определенную с точностью до знака упорядоченную тройку чисел:

$$\bar{x}_i = \pm\frac{\rho x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2}}. \tag{5}$$

Введенная нормировка устанавливает взаимно однозначное соответствие между собственными точками плоскости $\widehat{H}$ и определенными с точностью до знака упорядоченными тройками действительных чисел. Координаты точек абсолюта в нормировке (5) бесконечно велики, а каждой несобственной для $\widehat{H}$ точке соответствует тройка мнимых чисел. Для собственных координат $(\bar{x}_i)$ собственной точки плоскости $\widehat{H}$ выполняется равенство

$$\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - \bar{x}_3^2 = \rho^2. \tag{6}$$

1.4. Измерение отрезков плоскости $\widehat{H}$

Эллиптическая прямая является замкнутой, каждая пара точек на ней определяет два смежных отрезка. На гиперболической (параболической) прямой пара собственных для $\widehat{H}$ точек определяет отрезок и пару лучей, собственная и несобственная точка гиперболической прямой определяют два квазиотрезка [26], [27].

Отрезки непараболических прямых являются измеримыми на $\widehat{H}$. В силу наличия двух абсолютных точек гиперболические прямые плоскости $\widehat{H}$, как и прямые плоскости Лобачевского, являются направленными.

Если собственные для $\widehat{H}$ точки A, B принадлежат гиперболической (эллиптической) прямой, то прямая AB содержит две действительные (мнимо сопряженные) точки абсолютной линии γ, обозначим их K_1, K_2. Сложное отношение (ABK_1K_2) четверки точек прямой является инвариантом группы G. Пусть для гиперболической (эллиптической) прямой AB плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны ρ, $\rho \in \mathbb{R}_+$,

$$\sigma = \frac{\rho}{2\tau}\ln(ABK_1K_2), \quad \tau^2 = 1 \quad \left(\tau^2 = -1\right),$$

где $\ln(ABK_1K_2)$ — главное значение логарифмической функции $w = Lnz$ комплексного переменного $z = (ABK_1K_2)$:

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z, \ -\pi < \arg z \leq \pi. \tag{7}$$

Если прямая AB является гиперболической, то $(ABK_1K_2) \in \mathbb{R}$. Для собственных точек A, B гиперболической прямой $(ABK_1K_2) > 0$. Следовательно, $\sigma \in \mathbb{R}$. Число $|\sigma|$ назовем *расстоянием* между точками A, B и *длиной* отрезка AB гиперболической прямой.

Если одна из точек A, B гиперболической прямой является несобственной для $\widehat{H}$, но не принадлежит абсолюту, то $(ABK_1K_2) < 0$. В данном случае $\sigma \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(\sigma) = \pi\rho/2$. Числа $[i\pi\rho \pm \rho\ln|(ABK_1K_2)|]/2$ назовем *длинами* квазиотрезков между точками A, B.

Если прямая AB является эллиптической, то $(ABK_1K_2) \in \mathbb{C}$. В силу сопряженности точек K_1, K_2 $|(ABK_1K_2)| = 1$. Следовательно, $|\sigma| \in [0; \pi\rho/2]$. Число $|\sigma|$ назовем *расстоянием* между точками A, B эллиптической прямой.

Точки A, B, гармонически разделяющие на эллиптической прямой пару точек K_1, K_2, разбивают прямую на два смежных конгруэнтных отрезка. В этом случае $(ABK_1K_2) = -1$, и, следовательно, $\sigma = \pi\rho/2$. Таким образом, полной эллиптической прямой можно поставить в соответствие число $\pi\rho$, которое назовем *длиной* эллиптической прямой.

Для любых действительных точек A, B эллиптической прямой числа $|\sigma|$, $\pi\rho - |\sigma|$ назовем *длинами* отрезков, образованных точками A, B.

Если точки A, B гиперболической (эллиптической) прямой в репере R^* заданы координатами (a_i), (b_i), то расстояние $|AB|$ между ними можно вычислить по формуле

$$\operatorname{ch}\frac{|AB|}{\rho} = \pm\frac{a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 - b_3^2}}$$

$$\left(\cos\frac{|AB|}{\rho} = \pm\frac{a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 - b_3^2}}\right). \tag{8}$$

Точки A, B плоскости $\widehat{H}$ назовем *ортогональными*, если они сопряжены относительно абсолюта, т. е. если $(ABK_1K_2) = -1$. Условие ортогональности точек A, B в координатах (a_i), (b_i) репера R^* имеет вид

$$\bar{\varphi}(A,B) = a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3 = 0. \tag{9}$$

1.5. Типы углов плоскости $\widehat{H}$

Пучок прямых плоскости $\widehat{H}$ назовем *гиперболическим* (*эллиптическим*), если его центр — внешняя (внутренняя) относительно абсолюта точка. *Параболическим* пучком назовем пучок с центром на абсолюте. Прямые, принадлежащие гиперболическому (эллиптическому) пучку, назовем *пересекающимися* (*расходящимися*) на $\widehat{H}$. Прямые параболического пучка назовем *параллельными*.

В зависимости от типа прямых и типа содержащего эти прямые пучка пара прямых плоскости $\widehat{H}$ может определять 15 различных объектов, 15 типов углов плоскости $\widehat{H}$. Углы шести типов измеримы на $\widehat{H}$, углы трех типов имеют действительные меры. Определим типы углов, используемых в работе.

Пусть a и b — гиперболические расходящиеся прямые, $K = a \cap b$. Плоскость $\widehat{H}$ разделена прямыми a и b на две связные части, каждая из которых принадлежит одному углу плоскости P^2, $\widehat{H} \subset P^2$, между прямыми a и b. Назовем эти части *полуплоскостями* плоскости $\widehat{H}$ между прямыми a, b, *смежными* по отношению друг к другу. Отрезок эллиптической прямой k, поляры точки K относительно абсолюта, принадлежащий полуплоскости между прямыми a и b (на рис. 1, *а* отрезок AB), назовем *основанием* данной полуплоскости.

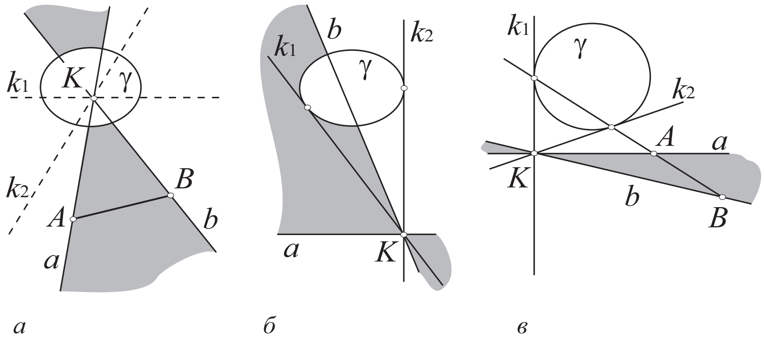

Рис. 1. Полуплоскости (*а*); квазиуглы (*б*); эллиптический угол (*в*) плоскости $\widehat{H}$ между прямыми a, b

Гиперболическая a и эллиптическая b (рис. 1, *б*) прямые разбивают $\widehat{H}$ на две связные части. Каждую из них назовем *квазиуглом* между прямыми a, b.

Пара эллиптических прямых a, b разбивает плоскость $\widehat{H}$ на две связные части, одна из которых не содержит точек абсолюта, назовем эту часть *эллиптическим* *углом* плоскости $\widehat{H}$ между прямыми a, b. Отрезок гиперболической прямой k, поляры точки K относительно абсолюта, принадлежащий эллиптическому углу между прямыми a и b (на рис. 1, *в* отрезок AB), назовем *основанием* эллиптического угла.

На рис. 1 серой заливкой выделены: одна из полуплоскостей (*а*), один из квазиуглов (*б*), эллиптический угол между прямыми a, b (*в*).

Доказательства существования полуплоскости, квазиугла и эллиптического угла следуют по принципу двойственности проективной плоскости из доказательств существования отрезка эллиптической прямой, квазиотрезка и отрезка гиперболической прямой соответственно (см. [26], [27]).

1.6. Измерение в пучках прямых

Пусть a и b — непараболические прямые эллиптического (гиперболического) пучка с центром в точке $K = a \cap b$. Через точку K проходят две мнимо сопряженные (действительные) абсолютные касательные k_1, k_2. С помощью числа (abk_1k_2), сложного отношения четырех прямых пучка, инвариантного во всех преобразованиях группы G, на $\widehat{H}$ можно ввести измерение в непараболических пучках для непараболических прямых. Таким образом, полуплоскости, квазиуглы и эллиптические углы являются измеримыми на $\widehat{H}$. Определим меры данных объектов.

1. Мера полуплоскости. Пусть расходящиеся гиперболические прямые a, b образуют смежные полуплоскости ν_1, ν_2. Абсолютные касательные k_1, k_2, проходящие через внутреннюю относительно абсолюта точку K, мнимо сопряженные. Следовательно, $(abk_1k_2) \in \mathbb{C}$, $|(abk_1k_2)| = 1$. Тогда для функции $w = \ln z$ (7)

$$\upsilon = \left| \frac{1}{2i} \ln(abk_1k_2) \right| \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right].$$

Число υ $(\pi - \upsilon)$ назовем *мерой*, или *величиной*, полуплоскости ν_1 (ν_2). Всю плоскость $\widehat{H}$ можно рассматривать как *развернутую* полуплоскость мерой π.

2. Мера квазиугла. Пусть гиперболическая a и эллиптическая b прямые образуют смежные квазиуглы ν_1, ν_2. Пара прямых a, b в пучке с центром во внешней относительно абсолюта точке K разделяет пару действительных абсолютных касательных k_1, k_2. Следовательно, $(abk_1k_2) \in \mathbb{R}_-$. Тогда для функции $w = \ln z$ (7)

$$\ln(abk_1k_2) = \pi i + \ln|(abk_1k_2)|, \quad \ln(bak_1k_2) = \pi i - \ln|(abk_1k_2)|.$$

Числа $[\pi i \pm \ln|(abk_1k_2)|]/2$, где $\ln|(abk_1k_2)| \in \mathbb{R}$, назовем *мерами*, или *величинами*, квазиуглов ν_1, ν_2.

Если прямые a, b *ортогональны*, т. е. гармонически разделяют пару k_1, k_2: $(abk_1k_2) = -1$, то мера квазиугла между ними равна $\pi i/2$.

3. Мера эллиптического угла. Пусть эллиптические прямые a, b образуют эллиптический угол ν. В гиперболическом пучке с центром K пара a, b не разделяет пару абсолютных касательных k_1, k_2, т. е. $(abk_1k_2) \in \mathbb{R}_+$. Число

$$\upsilon = \left| \frac{1}{2} \ln(abk_1k_2) \right|, \ \upsilon \in \mathbb{R}_+,$$

назовем *мерой*, или *величиной*, эллиптического угла ν.

Формы φ, $\bar{\varphi}$ определяют метрику в пучках прямых плоскости $\widehat{H}$ в репере R^*. Если неизотропные пересекающиеся (расходящиеся) прямые a, b имеют координаты (a_i), (b_i), $i = 1, 2, 3$, то меру $\widehat{ab}$ угла между ними в репере R^* можно выразить формулой

$$\operatorname{ch}\widehat{ab} = \pm\frac{a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 - b_3^2}}$$

$$\left(\cos\widehat{ab} = \pm\frac{a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 - b_3^2}}\right). \tag{10}$$

Условие ортогональности прямых a, b в координатах (a_i), (b_i) репера R^* имеет вид

$$\bar{\varphi}(a, b) = a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3 = 0. \tag{11}$$

Докажем две леммы.

Лемма 1. *Величина полуплоскости равна отношению длины ее основания к радиусу кривизны ρ плоскости $\widehat{H}$.*

Доказательство. Пусть полуплоскость ν величиной v с основанием AB определена расходящимися гиперболическими прямыми a, b, где $A \in a$, $B \in b$. Вершину A_3 репера R^* поместим в точку пересечения прямых a, b. Тогда по определению основания полуплоскости и свойству канонического репера R^* координатная прямая A_1A_2 совпадет с прямой AB. Вершину A_1 совместим с точкой A, вершине B присвоим координаты $(t : 1 : 0)$, $t \in \mathbb{R}$. По формуле (8)

$$\cos^2\frac{|AB|}{\rho} = \left(\frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}\right)^2. \tag{12}$$

Прямые $a = AA_3$, $b = BA_3$ имеют в R^* координаты: $a\,(0 : 1 : 0)$, $b\,(1 : -t : 0)$. По формуле (10)

$$\cos^2 v = \left(\frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}\right)^2. \tag{13}$$

По определению основание AB принадлежит полуплоскости ν, следовательно, если $|AB| < \frac{\pi\rho}{2}$, то $v < \frac{\pi}{2}$. Поэтому в силу равенств (12), (13) получаем: $v = \frac{|AB|}{\rho}$. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Величина эллиптического угла равна отношению длины его основания к радиусу кривизны ρ плоскости $\widehat{H}$.*

Доказательство. Пусть эллиптический угол ν величиной v с основанием AB определен эллиптическими прямыми a, b, $A \in a$, $B \in b$. Вершину A_1 репера R^* поместим в точку пересечения прямых a, b. Тогда по определению основания эллиптического угла и свойству канонического репера R^* $A_2A_3 = AB$. Вершину A_2 совместим с точкой A, вершине B присвоим координаты $(0 : t : 1)$, $t > 1$. По формуле (8)

$$\operatorname{ch}\frac{|AB|}{\rho} = \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}}. \tag{14}$$

Прямые $a = A_1A$, $b = A_1B$ имеют в R^* координаты: $a\,(0:0:1)$, $b\,(0:1:-t)$. По формуле (10)

$$\operatorname{ch} v = \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}. \tag{15}$$

В силу равенств (14), (15) получаем: $v = \frac{|AB|}{\rho}$. Лемма доказана. □

2. Гиперцикл плоскости $\widehat{H}$

При сдвигах вдоль эллиптических прямых точки плоскости $\widehat{H}$ движутся по гиперциклам [23], [24]. Определим гиперцикл метрически.

Множество всех точек плоскости $\widehat{H}$, удаленных от заданной эллиптической прямой l на данное действительное расстояние h, назовем *гиперциклом* плоскости $\widehat{H}$ с *базой* l и *высотой* h. Обозначение: $\omega(l,h)$ — гиперцикл с базой l и высотой h.

Полюс прямой l относительно абсолюта, несобственную точку плоскости $\widehat{H}$, обозначим S. Гиперцикл $\omega(l,h)$ является множеством всех точек плоскости $\widehat{H}$, удаленных от точки S на расстояние $r = i\pi\rho/2 - h$. Точку S назовем *центром* гиперцикла $\omega(l,h)$, число r — его *радиусом*. Каждую прямую, проходящую через центр гиперцикла, назовем *осью* гиперцикла. Полуплоскость между двумя осями гиперцикла назовем *центральным углом* гиперцикла, определенным данными осями.

Гиперцикл — собственная на $\widehat{H}$ овальная линия, пересекающая абсолют в двух мнимо сопряженных точках. Через центр гиперцикла проходят две общие с абсолютом мнимо сопряженные касательные.

В пространстве Минковского гиперциклу с базой l плоскости $\widehat{H}$ соответствует сечение сферы действительного радиуса евклидовой плоскостью, параллельной плоскости, соответствующей эллиптической прямой l.

Докажем теорему о касательной гиперцикла.

Теорема 1. *В каждой точке гиперцикла плоскости $\widehat{H}$ существует эллиптическая касательная к гиперциклу, ортогональная оси гиперцикла, проведенной через точку касания.*

Доказательство. Гиперцикл плоскости $\widehat{H}$, как овальная линия, имеет в каждой своей точке касательную. Покажем, что каждая касательная гиперцикла является эллиптической прямой. Применяя формулу (8), найдем уравнение гиперцикла ω $(S;h)$ в репере $R^* = \{A_1, A_2, S, E\}$:

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \operatorname{cth}^2 \frac{h}{\rho} = 0. \tag{16}$$

Касательная m в каждой точке $M(m_1 : m_2 : m_3)$ гиперцикла ω (16) задана в репере R^* уравнением

$$x_1m_1 + x_2m_2 - x_3m_3 \operatorname{cth}^2 \frac{h}{\rho} = 0. \tag{17}$$

Точка M принадлежит гиперциклу ω (16), поэтому

$$m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 \operatorname{cth}^2 \frac{h}{\rho} = 0. \tag{18}$$

Координаты $\left(m_1 : m_2 : -m_3 \operatorname{cth}^2 \frac{h}{\rho}\right)$ прямой m (17) согласно равенству (18) удовлетворяют второму неравенству из (4), следовательно, m — эллиптическая прямая.

Прямая MA_3, ось гиперцикла, проходящая через точку M, имеет координаты $(-m_2 : m_1 : 0)$ и в силу условия (11) ортогональна прямой m.

Что и требовалось доказать. $\square$

3. Линейные элементы плоскости $\widehat{H}$

Рассмотрим на плоскости $\widehat{H}$ конечную гладкую линию ξ, заданную гладкими функциями

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i(t), \quad i = 1, 2, 3, \quad t \in I, \quad I \in \mathbb{R}, \tag{19}$$

касательная в каждой точке которой принадлежит одному непараболическому типу. Линию ξ назовем *гиперболической* (*эллиптической*), если каждая касательная к ней является гиперболической (эллиптической) прямой.

В параметрических уравнениях (19) $(\bar{x}_i)$ — собственные координаты (5) текущей точки M линии ξ в репере R^*, удовлетворяющие равенству (6).

Дифференцируя равенство (6), получим

$$\bar{x}_1 \frac{d\bar{x}_1}{dt} + \bar{x}_2 \frac{d\bar{x}_2}{dt} - \bar{x}_3 \frac{d\bar{x}_3}{dt} = 0. \tag{20}$$

Равенство (20) в силу условия (9) означает, что точка $dM\left(\frac{d\bar{x}_i}{dt}\right)$, принадлежащая касательной к линии ξ в точке M, ортогональна M, и, следовательно, принадлежит поляре точки M относительно абсолюта. Координаты $\left(\frac{d\bar{x}_i}{dt}\right)$ точки dM не являются собственными в смысле (5), но определены однозначно собственными координатами (19) точки M.

По условию касательная MdM — непараболическая прямая, она является гиперболической (эллиптической) тогда и только тогда, когда точка dM является несобственной (собственной) для плоскости $\widehat{H}$, т. е. тогда и только тогда, когда в репере R^* для координат $\left(\frac{d\bar{x}_i}{dt}\right)$ точки dM выполняется второе (первое) неравенство из (2):

$$\left(\frac{d\bar{x}_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{x}_2}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d\bar{x}_3}{dt}\right)^2 < 0 \quad \left(\left(\frac{d\bar{x}_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{x}_2}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d\bar{x}_3}{dt}\right)^2 > 0\right).$$

Пусть точки A, B на линии ξ определены параметрами t_1, t_2, где $[t_1, t_2] \subset I$. *Длиной дуги AB* гиперболической (эллиптической) линии ξ назовем число

$$l_{\mathtt{h}}(AB) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{-\varphi(dM)}dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{-\left(\frac{d\bar{x}_1}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d\bar{x}_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{x}_3}{dt}\right)^2}dt$$

$$\left(l_{\mathtt{e}}(AB) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\varphi(dM)}dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{d\bar{x}_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{x}_2}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d\bar{x}_3}{dt}\right)^2} dt\right). \qquad (21)$$

Линейный гиперболический (*эллиптический*) *элемент* $dl_{\mathtt{h}}$ ($dl_{\mathtt{e}}$) плоскости $\widehat{H}$ определен равенством

$$(dl_{\mathtt{h}})^2 = -(d\bar{x}_1)^2 - (d\bar{x}_2)^2 + (d\bar{x}_3)^2 \quad \left((dl_{\mathtt{e}})^2 = (d\bar{x}_1)^2 + (d\bar{x}_2)^2 - (d\bar{x}_3)^2\right). \qquad (22)$$

В случае, когда линия ξ принадлежит гиперболической (эллиптической) прямой, длина $l_{\mathtt{h}}(AB)$ ($l_{\mathtt{e}}(AB)$) ее дуги, вычисленная по формуле (21), равна вычисленной по формуле (8) длине отрезка AB.

4. Гиперциклическая система координат плоскости $\widehat{H}$

4.1. Построение

Выберем на плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны ρ, $\rho \in \mathbb{R}_+$, ортогональные пересекающиеся в точке O прямые, эллиптическую Ou и гиперболическую Ov, и собственную точку E плоскости $\widehat{H}$: $E \notin Ou$, $E \notin Ov$ (рис. 2). Поскольку $Ou \perp Ov$, точка U (V), полюс прямой Ou (Ov) относительно абсолюта, принадлежит прямой Ov (Ou). Проекцию точки E из U (V) на прямую Ou (Ov) обозначим E_1 (E_2); отрезок между точками O, V, содержащий точку E_1, — $\bar{e}_1$; квазиотрезок между точками O, U, содержащий точку E_2, — $\bar{e}_2$. Квазиугол между прямыми Ou, Ov, содержащий точку E, обозначим α. Положительным направлением на прямой Ov будем считать направление луча этой прямой, принадлежащего квазиотрезку $\bar{e}_2$.

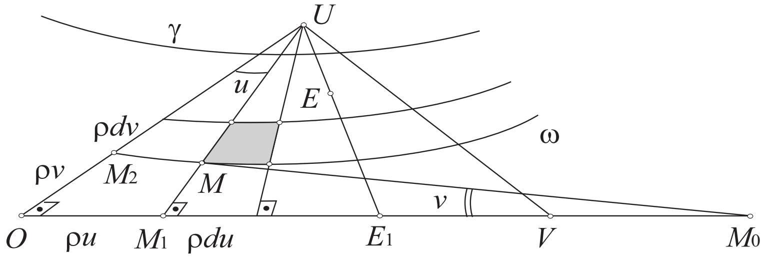

Рис. 2. Гиперциклическая система координат

Каждой точке M плоскости $\widehat{H}$ поставим в соответствие пару чисел (u, v) следующим образом. Пусть M_1 — проекция точки M на прямую Ou из точки U, $\bar{a}$ — отрезок между точками O, M_1, который либо полностью, либо большей своей частью принадлежит отрезку $\bar{e}$, a (b) — длина отрезка $\bar{a}$ (MM_1). Обозначим

$$u = \frac{a}{\rho}, \qquad v = \delta\frac{b}{\rho}, \qquad (23)$$

где $\delta = 1$ при $M \in \alpha$, $\delta = -1$ при $M \notin \alpha$.

Равенства (23) устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками плоскости $\widehat{H}$ и парами чисел (u, v), $u \in [0, \pi)$, $v \in \mathbb{R}$. Систему элементов $C_{\mathtt{h}} = \{Ou, Ov, E\}$ назовем *гиперциклической системой координат* плоскости $\widehat{H}$. Прямую Ou (Ov) назовем *эллиптической* (*гиперболической*) *координатной осью*, а точку E — *направляющей точкой* системы $C_{\mathtt{h}}$. Очевидно, что каждые две направляющие точки, принадлежащие одному квазиуглу α и одной полуплоскости между прямыми Ov, UV, определяют одну систему гиперциклических координат с осями Ou, Ov. Для определенности точку E условимся выбирать на пересечении параболических прямых, проходящих через точки O, V. Пару чисел (u, v), $u \in [0, \pi)$, $v \in \mathbb{R}$, определенную равенствами (23), назовем *гиперциклическими координатами* точки M.

Выясним геометрический смысл гиперциклических координат точки на $\widehat{H}$.

Полуплоскость между прямыми Ov, MU, основанием которой является отрезок $\bar{a}$, назовем *опорной полуплоскостью* точки M в системе $C_{\mathtt{h}}$. По лемме 1 u — мера опорной полуплоскости точки $M(u, v)$.

Пусть M_0 — полюс прямой MU относительно абсолюта, тогда $M_0 \in Ou$. Прямая MM_0 ортогональна гиперболической прямой MU и пересекает ее в собственной на $\widehat{H}$ точке M, следовательно, является эллиптической прямой. Эллиптический угол M_1M_0M с основанием M_1M назовем *опорным углом* точки M в системе $C_{\mathtt{h}}$. Гиперцикл ω с базой Ou и касательной MM_0 в своей точке M пересекает ось Ov дважды, в точках, принадлежащих различным лучам прямой Ov с началом в точке O. Ту из точек пересечения, которая принадлежит квазиотрезку $\bar{e}_2$, обозначим M_2. Длина отрезка OM_2 равна b, длине отрезка M_1M. Следовательно, эллиптический угол с основанием OM_2 между прямыми Ou, VM_2 равен опорному углу точки M в системе $C_{\mathtt{h}}$. По лемме 2 $|v|$ — величина опорного угла точки $M(u, v)$.

4.2. Связь гиперциклических и собственных проективных координат точки

Зададим на плоскости $\widehat{H}$ гиперциклическую систему координат $C_{\mathtt{h}} = \{Ou, Ov, E\}$ так, чтобы прямые OE, VE были параболическими. Канонический репер $R^* = \{O, V, U, E\}$ первого типа назовем *присоединенным* к системе $C_{\mathtt{h}}$. Определим зависимость между гиперциклическими координатами (u, v) точки M в $C_{\mathtt{h}}$ и ее собственными проективными координатами $(\bar{x}_i)$ в присоединенном к $C_{\mathtt{h}}$ репере R^*.

Пусть (x_i) — вещественные проективные координаты точки M в R^*. Тогда точка M_1 имеет в R^* координаты $(x_1 : x_2 : 0)$. По формулам (8) с учетом введенных обозначений (23) получаем

$$\cos\frac{a}{\rho} = \cos u = \pm\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \operatorname{ch}\frac{b}{\rho} = \operatorname{ch} v = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2}},$$

следовательно,

$$\operatorname{tg}^2 u = \frac{x_2^2}{x_1^2}, \qquad \operatorname{cth}^2 v = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_3^2}. \tag{24}$$

Применяя равенства (24), собственные координаты собственной точки M плоскости $\widehat{H}$ в репере R^* запишем в виде

$$\bar{x}_1 = \rho \cos u \operatorname{ch} v, \quad \bar{x}_2 = \rho \sin u \operatorname{ch} v, \quad \bar{x}_3 = \rho \operatorname{sh} v, \quad 0 \le u < \pi, \ v \in \mathbb{R}. \tag{25}$$

Параметризацию плоскости $\widehat{H}$, заданную формулами (25), назовем *гиперциклической.*

4.3. Линейные элементы плоскости $\widehat{H}$ в гиперциклических координатах

Пусть собственная точка M плоскости $\widehat{H}$ задана координатами (25). Точки $M_u = \frac{\partial M}{\partial u}$, $M_v = \frac{\partial M}{\partial v}$, принадлежащие касательным в точке M к координатным линиям u, v, имеют в репере R^* координаты

$$M_u(-\rho \sin u \operatorname{ch} v; \rho \cos u \operatorname{ch} v; 0), \quad M_v(\rho \cos u \operatorname{sh} v; \rho \sin u \operatorname{sh} v; \rho \operatorname{ch} v). \tag{26}$$

Отметим, что координаты (26) точек M_u, M_v собственными в смысле (5) не являются, но определены однозначно как производные от собственных координат (25) точки M по параметру u, v соответственно.

В силу того, что $\bar{\varphi}(M, M_u) = 0$, $\bar{\varphi}(M, M_v) = 0$, $\bar{\varphi}(M_u, M_v) = 0$, трехвершинник MM_uM_v является автополярным первого рода: точки M_u, M_v сопряжены относительно абсолюта и принадлежат поляре m точки M относительно абсолюта. Следовательно, прямой m принадлежит и точка $dM = M_u du + M_v dv$. В координатах (25), (26) получаем

$$\begin{gathered} \varphi(dM) = \gamma_{uu}(du)^2 + 2\gamma_{uv} du \; dv + \gamma_{vv}(dv)^2, \\ \gamma_{uu} = \varphi(M_u) = \rho^2 \operatorname{ch}^2 v, \quad \gamma_{uv} = \bar{\varphi}(M_u, M_v) = 0, \quad \gamma_{vv} = \varphi(M_v) = -\rho^2. \end{gathered} \tag{27}$$

Итак, гиперциклическая параметризация (25) — ортогональная ($\gamma_{uv} = 0$), квадрат линейного элемента $dl_{\mathtt{h}}$ ($dl_{\mathtt{e}}$) (22) в гиперциклических координатах равен

$$(dl_{\mathtt{h}})^2 = -\rho^2 \operatorname{ch}^2 v (du)^2 + \rho^2 (dv)^2 \qquad \left((dl_{\mathtt{e}})^2 = \rho^2 \operatorname{ch}^2 v (du)^2 - \rho^2 (dv)^2\right).$$

Рассмотрим на плоскости $\widehat{H}$ гладкую гиперболическую (эллиптическую) линию ξ, заданную уравнениями

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad t \in I, \quad I \in \mathbb{R}, \quad 0 \le u(t) < \pi, \quad v(t) \in \mathbb{R}.$$

Согласно формуле (21) длина $l_{\mathtt{h}}(AB)$ ($l_{\mathtt{e}}(AB)$) дуги гиперболической (эллиптической) линии ξ, заключенной между точками $A(t_1)$, $B(t_2)$, $[t_1, t_2] \in I$, равна

$$l_{\mathtt{h}}(AB) = \rho \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{-\operatorname{ch}^2 v \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt$$

$$\left(l_{\mathtt{e}}(AB) = \rho \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\operatorname{ch}^2 v \left(\frac{du}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt \right). \tag{28}$$

4.4. Координатные линии в гиперциклической параметризации

Для фиксированного значения $u = u_0$ из равенств (25) находим:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \operatorname{ctg} u_0 = 0. \tag{29}$$

Уравнение (29) определяет на $\widehat{H}$ гиперболическую прямую, проходящую через точку U. Следовательно, координатные линии v в гиперциклической параметризации плоскости $\widehat{H}$ — гиперболические расходящиеся прямые пучка с центром в точке U. *Положительным направлением* координатных линий v будем называть направление их лучей, принадлежащих квазиуглу α. Метрика на линиях v определена в п. 1.4.

Множество всех точек плоскости $\widehat{H}$, удаленных от прямой Ou на заданное расстояние $b = |v_0|\rho$, является гиперциклом с базой Ou высоты b, заданным в репере R^* уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 - \operatorname{cth}^2 v_0 x_3^2 = 0.$$

Следовательно, координатными линиями u в гиперциклической параметризации плоскости $\widehat{H}$ являются концентрические, с центром U, гиперциклы. Прямые пучка с центром в точке U, представляющие координатные линии v, являются осями каждого координатного гиперцикла.

Линии u являются замкнутыми. Пусть линия u ($v = v_0 = const$) пересекает положительно направленный луч Ov в точке A. *Положительным направлением обхода* линии u от точки A назовем ее обход, начинающийся с той дуги линии, которая принадлежит полуплоскости между прямыми Ov, UV, содержащей E.

Касательная к гиперциклу в каждой его точке по теореме 1 является эллиптической прямой, следовательно, дуга гиперцикла является гладкой эллиптической линией. По формуле (28) найдем длину l_{e} дуги координатной линии u ($v = v_0 = const$) с концами в точках $A(u_1)$, $B(u_2)$, $u_1 < u_2$:

$$l_{\mathsf{e}}(AB) = \int_{u_1}^{u_2} \rho \operatorname{ch} v_0 \, du = \rho(u_2 - u_1) \operatorname{ch} v_0. \tag{30}$$

Согласно равенствам (23), (30) справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *На плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны ρ длина l дуги гиперцикла высоты h, соответствующая центральному углу величиной β, может быть вычислена по формуле*

$$l = \rho\beta \operatorname{ch} \frac{h}{\rho}.$$

4.5. Элемент площади в гиперциклических координатах

В силу условий (27) элемент площади dS в гиперциклических координатах (25) плоскости $\widehat{H}$ имеет вид

$$dS = \sqrt{|\gamma_{uu}\gamma_{vv} - \gamma_{uv}^2|} = \rho^2 \operatorname{ch} v \, du \, dv. \tag{31}$$

Заметим, что dS является произведением длин сторон криволинейного координатного прямоугольника, исходящих из точки плоскости и соответствующих бесконечно малым приращениям параметров u, v в данной точке.

Пусть F — поверхность с краем η, $F \subset \widehat{H}$, η — кусочно-гладкая простая двусторонняя линия, D — область изменения параметров u, v, соответствующая поверхности F. *Площадь* S поверхности F согласно (31) определена равенством

$$S = \rho^2 \int\int_D \operatorname{ch} v \; du \; dv. \tag{32}$$

5. Площади фигур плоскости $\widehat{H}$

5.1. Основная теорема о площади прямоугольного трехреберника

Трехвершинником плоскости $\widehat{H}$ назовем совокупность трех не лежащих на одной прямой точек и трех отрезков, циклически соединяющих эти точки. Данные точки назовем *вершинами*, отрезки — *ребрами*, а прямые, содержащие отрезки, — *сторонами* трехвершинника. Каждые две стороны трехвершинника разбивают плоскость $\widehat{H}$ на две или три части, ту из этих частей, которая содержит не принадлежащее данным сторонам ребро трехвершинника, будем называть *углом* трехвершинника, *противолежащим* указанному ребру, уточняя при необходимости тип угла. Справедлива следующая теорема: *На плоскости $\widehat{H}$ положение на абсолюте несобственных точек сторон и типы сторон и углов определяют 22 инвариантных относительно группы G типа трехвершинников* [25].

Точку M плоскости $\widehat{H}$, не принадлежащую трехвершиннику F, назовем *внутренней* относительно F, если каждая проходящая через M прямая имеет с F две общие точки. Непустое множество всех внутренних относительно F точек плоскости $\widehat{H}$ назовем *внутренностью* F. Трехвершинник плоскости $\widehat{H}$, обладающий внутренностью, назовем *трехреберником. Площадью* трехреберника назовем площадь его внутренности. Имеет место следующий критерий принадлежности трехвершинника классу трехреберников: *Трехвершинник плоскости $\widehat{H}$ является трехреберником тогда и только тогда, когда существует прямая, не проходящая через вершины трехвершинника и имеющая с ним две и только две общие точки* [25].

Трехреберник плоскости $\widehat{H}$ назовем *прямоугольным*, если он имеет пару ортогональных сторон.

Ребро, противолежащее прямому углу прямоугольного трехреберника, назовем *гипотенузой*, два других ребра — *катетами* прямоугольного трехреберника. Если две прямые плоскости $\widehat{H}$ ортогональны и пересекаются в собственной на $\widehat{H}$ точке, то одна из них гиперболическая, другая эллиптическая. Следовательно, катеты прямоугольного трехреберника принадлежат непараболическим прямым разных типов. Гипотенуза прямоугольного трехреберника может принадлежать каждому из трех типов прямых плоскости $\widehat{H}$.

Теорема 3. *На плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны ρ площадь S прямоугольного трехреберника с гиперболическим (эллиптическим) катетом длиной b (a) может быть вычислена по формуле*

$$S = -\rho^2 \ln \frac{\sin\frac{a}{\rho} + \cos\frac{a}{\rho}\operatorname{sh}\frac{b}{\rho}}{\operatorname{sh}\frac{b}{\rho} + \operatorname{ch}\frac{b}{\rho}\sin\frac{a}{\rho}}. \tag{33}$$

Доказательство. Пусть в трехребернике ABC квазиугол при вершине C равен $i\pi/2$, а вершине A (B) противолежит катет длиной a (b) на эллиптической (гиперболической) прямой. Совместим с трехреберником ABC гиперциклическую систему координат $C_{\mathtt{h}} = \{Ou, Ov, E\}$ и присоединенный к ней репер R^* так, чтобы точка B совпала с началом координат, а точка C лежала на эллиптической оси Ou. Тогда точка A попадет на координатную линию v, проходящую через вершину C. В репере R^* вершинам A, B, C можно присвоить координаты: $A(a_1 : 1 : a_3)$, $a_1 a_3 \neq 0$, $B(1 : 0 : 0)$, $C(a_1 : 1 : 0)$. По условию $|BC| = a$, $|AC| = b$. Применяя формулы (8), получаем

$$\cos^2\frac{a}{\rho} = \frac{a_1^2}{a_1^2+1}, \qquad \operatorname{ch}^2\frac{b}{\rho} = \frac{a_1^2+1}{a_1^2+1-a_3^2}. \tag{34}$$

Первое равенство из (34) дает $a_1^2 = \operatorname{ctg}^2\frac{a}{\rho}$. Полагая, что катет BC отложен в положительном направлении обхода оси Ou, т. е. точка C при $\frac{a}{\rho} < \frac{\pi}{2}$ ($\frac{a}{\rho} > \frac{\pi}{2}$) принадлежит полуплоскости между прямыми Ov, UV, содержащей (не содержащей) точку E, примем $a_1 = \operatorname{ctg}\frac{a}{\rho}$. Тогда согласно второму равенству из (34)

$$a_3^2 = \frac{\operatorname{th}^2\frac{b}{\rho}}{\sin^2\frac{a}{\rho}}.$$

Полагая, что катет CA отложен в положительном направлении координатной прямой CU, примем $a_3 = \operatorname{th}\frac{b}{\rho}/\sin\frac{a}{\rho}$. Окончательно получаем

$$A\left(\cos\frac{a}{\rho} : \sin\frac{a}{\rho} : \operatorname{th}\frac{b}{\rho}\right), \qquad C\left(\cos\frac{a}{\rho} : \sin\frac{a}{\rho} : 0\right). \tag{35}$$

Прямая AB в репере R^* имеет координаты

$$\left(0 : \operatorname{th}\frac{b}{\rho} : -\sin\frac{a}{\rho}\right). \tag{36}$$

В собственных координатах $(\bar{x}_i)$ (5) текущей точки уравнение прямой AB можно записать в виде

$$AB: \quad \bar{x}_2 \operatorname{th}\frac{b}{\rho} - \bar{x}_3 \sin\frac{a}{\rho} = 0. \tag{37}$$

В гиперциклических координатах (25) уравнение (37) имеет вид

$$AB: \quad \operatorname{th} v = \theta \sin u, \qquad \theta = \frac{\operatorname{th}\frac{b}{\rho}}{\sin\frac{a}{\rho}}. \tag{38}$$

Учитывая уравнение (38), находим область D изменения параметров (u, v), соответствующую трехребернику ABC,

$$D: \quad 0 \le u \le u_0 = \frac{a}{\rho}, \quad 0 \le v \le v_0 = \operatorname{th}^{-1}(\theta \sin u), \tag{39}$$

где $y = \operatorname{th}^{-1} x$ — функция, обратная к функции $y = \operatorname{th} x$.

Применяя формулу (32) и условия (39), вычислим площадь S трехреберника ABC:

$$S = \rho^2 \int\int_D \operatorname{ch} v \; du \; dv = \rho^2 \int_0^{u_0} du \int_0^{v_0} \operatorname{ch} \; dv =$$

$$= \rho^2 \int_0^{u_0} \operatorname{sh} \operatorname{th}^{-1}(\theta \sin u) \; du = -\rho^2 \ln \frac{\theta \cos \frac{a}{\rho} + \sqrt{1 - \theta^2 \sin^2 \frac{a}{\rho}}}{\theta + 1}.$$

Подставляя в последнее выражение значение θ из (38), после соответствующих преобразований получим равенство (33).

Что и требовалось доказать. □

В следующих пунктах получим ряд следствий теоремы 3.

5.2. Площадь дважды прямоугольного трехреберника

Трехреберник плоскости $\widehat{H}$ назовем *дважды прямоугольным*, если он имеет две пары ортогональных сторон.

Ребро, противолежащее непрямому углу дважды прямоугольного трехреберника, назовем *основанием*, два других ребра — *боковыми ребрами* трехреберника. Предположим, что основание дважды прямоугольного трехреберника принадлежит эллиптической прямой l. Тогда ортогональные к основанию прямые, содержащие боковые ребра трехреберника, являются гиперболическими и проходят через полюс L прямой l относительно абсолюта. Но L является несобственной для $\widehat{H}$ точкой, следовательно, боковые ребра, исходящие из вершины L, являются квазиотрезками плоскости $\widehat{H}$, что противоречит определению трехреберника. Таким образом, основание дважды прямоугольного трехреберника принадлежит гиперболической прямой.

Эллиптические прямые, содержащие боковые ребра дважды прямоугольного трехреберника, пересекаются в полюсе прямой, содержащей основание трехреберника, следовательно, в дважды прямоугольном трехребернике боковые ребра равны $\pi\rho/2$, половине эллиптической прямой.

Для дважды прямоугольного трехреберника ABC сохраним обозначения доказательства теоремы 3. По лемме 2 основание AC дважды прямоугольного трехреберника ABC равно произведению радиуса кривизны плоскости $\widehat{H}$ на величину B эллиптического угла ABC: $b = \rho B$. В рассматриваемом случае $a = \pi\rho/2$, следовательно, по формуле (33) площадь S трехреберника ABC равна

$$S = -\rho^2 \ln \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{b}{\rho} + \operatorname{ch} \frac{b}{\rho}} = -\rho^2 \ln e^{-\frac{b}{\rho}} = b\rho = B\rho^2.$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 4. *На плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны ρ для площади S дважды прямоугольного трехреберника с основанием длиной b и эллиптическим углом величиной B справедливы равенства*

$$S = b\rho, \qquad S = B\rho^2.$$

5.3. Площадь прямоугольного трехреберника с параболической гипотенузой

Теорема 5. *На плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны ρ для площади S прямоугольного трехреберника с параболической гипотенузой и гиперболическим (эллиптическим) катетом длиной b (a) справедливо равенство*

$$S = \rho^2 \ln \operatorname{ch} \frac{b}{\rho} \qquad \left(S = -\rho^2 \ln \cos \frac{a}{\rho} \right). \tag{40}$$

Доказательство. К прямоугольному трехребернику ABC присоединим репер R^* тем же способом, что и при доказательстве теоремы 3. Тогда координаты прямой AB в репере R^* можно записать в виде (36). Если прямая AB касается абсолюта, то ее координаты удовлетворяют уравнению (3). Следовательно, $\operatorname{th}^2 \frac{b}{\rho} = \sin^2 \frac{a}{\rho}$, откуда получаем соотношение

$$\cos \frac{a}{\rho} \operatorname{ch} \frac{b}{\rho} = 1, \tag{41}$$

являющееся аналогом теоремы Пифагора для прямоугольного трехреберника с параболической гипотенузой на плоскости $\widehat{H}$.

Подставляя в формулу (33) значение $\cos \frac{a}{\rho}$ $\left(\operatorname{ch} \frac{b}{\rho}\right)$ из соотношения (41), получим первую (вторую) формулу из (40).

Что и требовалось доказать. □

5.4. Площадь простого 4-контура

В работах [20]–[23] построены моноэдральные разбиения плоскости $\widehat{H}$, ячейкой которых является простой 4-контур. Доказано [18, утверждение 2 теоремы 2], что диагонали простого 4-контура ортогональны, а точка их пересечения является серединой каждой из них. Таким образом, простой 4-контур своими диагоналями разделен на четыре равных прямоугольных трехреберника с параболической гипотенузой. Из теоремы 5 вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 6. *На плоскости $\widehat{H}$ радиуса кривизны ρ для площади S простого 4-контура, длина гиперболической (эллиптической) диагонали которого равна $2b$ $(2a)$, имеет место равенство*

$$S = 4\rho^2 \ln \operatorname{ch} \frac{b}{\rho} \qquad \left(S = -4\rho^2 \ln \cos \frac{a}{\rho} \right). \tag{42}$$

В работах [20]–[23] инварианты построенных разбиений выражены через инварианты Δ простых 4-контуров, составляющих разбиения. Поэтому представляет особый интерес формула связи между площадью простого 4-контура и его инвариантом Δ. Установим эту связь, используя геометрический смысл инварианта Δ: Δ — есть простое отношение, в котором точка пересечения противоположных сторон простого 4-контура делит его ребро. Для простого 4-контура $\Delta \in (-1; 0)$.

Теорема 7. *На плоскости $\widehat{H}$ действительного радиуса кривизны ρ для площади S простого 4-контура с инвариантом Δ справедливо равенство*

$$S = -2\rho^2 \ln(-\Delta). \tag{43}$$

Доказательство. Рассмотрим прямоугольный трехреберник ABC с параболической гипотенузой AB и построенный при доказательстве теоремы 3 присоединенный к нему репер R^*. Достроим трехреберник ABC до простого 4-контура $ABA'B'$, объединяя с симметричными ему относительно катетов AC, BC и вершины C трехреберниками (рис. 3). Для прямоугольного трехреберника ABC с параболической гипотенузой имеет место соотношение (41), следовательно, точка A (35) имеет в репере R^* координаты $\left(\operatorname{ctg}\frac{a}{\rho} : 1 : 1\right)$. Тогда точка A', симметричная точке A относительно прямой $BC = A_1A_2(0 : 0 : 1)$, задана в репере R^* координатами $\left(\operatorname{ctg}\frac{a}{\rho} : 1 : -1\right)$.

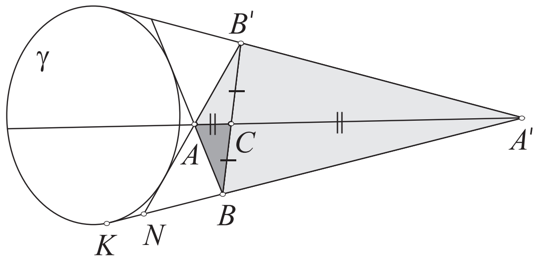

Рис. 3. Простой 4-контур плоскости $\widehat{H}$

Параболическая прямая $A'B$ имеет координаты $(0 : 1 : 1)$ и пересекает абсолютную линию γ (1) в точке $K(0 : 1 : -1)$. Параболическая прямая n, проходящая через точку A и отличная от прямой AB, задана координатами

$$\left(-2\operatorname{ctg}\frac{a}{\rho} : \operatorname{ctg}^2\frac{a}{\rho} - 1 : 1 + \operatorname{ctg}^2\frac{a}{\rho}\right)$$

и пересекает прямую $A'B$ в точке $N\left(\operatorname{tg}\frac{a}{\rho} : -1 : 1\right)$.

По определению инварианта Δ

$$\Delta = (BA', N) = -(BA'NK) = -\cos^2\frac{a}{\rho}. \tag{44}$$

Согласно второму равенству из (42) и равенству (44) справедлива формула (43). Что и требовалось доказать. $\square$

Список литературы

[1] Б. А. Розенфельд, М. П. Замаховский, *Геометрия групп Ли. Симметрические, параболические и периодические пространства*, МЦНМО, М., 2003.

[2] Б. А. Розенфельд, *Неевклидовы пространства*, Наука, М., 1969.

[3] H. S. M. Coxeter, “A Geometrical Background for De Sitter's World”, *The American Mathematical Monthly, Volume 50, No. 4*, (April 1943), 217–228.

[4] de Sitter W, “On the Relativity of Inertia. Remarks Concerning Einstein's Latest Hypothesis”, *Proc. Royal Acad. Amsterdam [KNAW], Volume 19, Issue 2*, 1917, 1217–1225.

[5] K. Akutagawa, “On space-like hypersurfaces with constant mean curvature in the de Sitter space”, *Math. Z., 196*, (1987), 13—19.

[6] S. Montiel, “An integral inequality for compact space-like hypersurfaces in a de Sitter space and application to the case of constant mean curvature”, *Indiana Univ. Math. J., 37*, (1988), 909—917.

[7] Q. M. Cheng, “Complete space-like submanifolds in a de Sitter space with parallel mean curvature vector”, *Math. Z., 206*, (1991), 333—339.

[8] Q. M. Cheng, “Hypersurfaces of a Lorentz space form”, *Arch. Math., 63*, (1994), 271—281.

[9] Huili Liu, Guili Liu, “Weingarten rotation surfaces in 3-dimensional de Sitter space”, *Journal of Geometry, Volume 79, Issue 1–2*, (April 2004), 156–168.

[10] Takesi Fusho, Shyuichi Izumiya, “Lightlike surfaces of spacelike curves in de Sitter 3-space”, *Journal of Geometry, Volume 88, Issue 1–2*, (March 2008), 19–29.

[11] Roland Hefer, “Metric and Periodic Lines in de Sitter's World”, *Journal of Geometry, Volume 90, Issue 1–2*, (December 2008), 66–82.

[12] Yunhi Cho, “Trigonometry in extended hyperbolic space and extended de Sitter space”, *Bull. Korean Math. Soc. 46, No. 6, DOI 10.4134/BKMS.2009.46.6.1099*, (2009), 1099—1133.

[13] Masaki Kasedou, “Singularities of lightcone Gauss images of spacelike hypersurfaces in de Sitter space”, *Journal of Geometry, Volume 94, Issue 1–2*, (September 2009), 107–121.

[14] Immanuel Asmus, “Duality between hyperbolic and de Sitter geometry”, *Journal of Geometry, Volume 96, Issue 1-2*, (December 2009), 11–40.

[15] Oscar M. Perdomo, “Algebraic zero mean curvature hypersurfaces in de Sitter and anti de Sitter spaces”, *Geometriae Dedicata, Volume 152, Issue 1*, (June 2011), 183–196.

[16] Dan Yang, Zhonghua Hou, “Linear Weingarten spacelike submanifolds in de Sitter space”, *Journal of Geometry, Volume 103, Issue 1*, (April 2012), 177–190.

[17] Takami Sato, “Pseudo-spherical evolutes of curves on a spacelike surface in three dimensional Lorentz-Minkowski space”, *Journal of Geometry, Volume 103, Issue 2*, (August 2012), 319–331.

[18] Л. Н. Ромакина, “Конечные замкнутые 3(4)-контуры расширенной гиперболической плоскости”, *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, **10**:3 (2010), 14–26.

[19] Л. Н. Ромакина, “Конечные замкнутые 5-контуры расширенной гиперболической плоскости”, *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, **11**:1 (2011), 38–49.

[20] Л. Н. Ромакина, “Разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны, порожденные правильным n-контуром”, Теория относительности, гравитация и геометрия: Межд. конф. "Petrov 2010 Anniversary Sympozium on General Relativity and Gravitation". Труды. Казань, 1–6 ноября 2010 г., Казань: Казан. ун-т, 2010, 227–232.

[21] Л. Н. Ромакина, “Простые разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны, порожденные h-ломаной”, Современные проблемы математики и механики. Том 6, выпуск 3, Изд-во Московского университета, М., 2011, 131–138.

[22] Л. Н. Ромакина, “Аналог мозаики на гиперболической плоскости положительной

кривизны", *Сб. науч. тр. Механика. Математика*, Изд-во Сарат. ун-та, Саратов, 2010, 69–72.

[23] Л. Н. Ромакина, "Простые разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны", *Матем. сб.*, **203**:9 (2012), 83–116; *Sb. Math.*, **203**:9 (2012), 1310–1341.

[24] Л. Н. Ромакина, "Овальные линии гиперболической плоскости положительной кривизны", *Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, **12**:3 (2012), 37–44.

[25] Л. Н. Ромакина, *Тригонометрия гиперболической плоскости положительной кривизны*, СГУ им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, 2012.

[26] Л. Н. Ромакина, *Геометрии коевклидовой и копсевдоевклидовой плоскостей*, ООО Изд-во "Научная книга", Саратов, 2008.

[27] Л. Н. Ромакина, "Определение лучей, отрезков и квазиотрезков различного типа прямых при построении классических неевклидовых геометрий на моделях Кэли-Клейна", *Междун. конференция «62-е Герценовские чтения»: Сб. науч. тр.*, Изд-во РГПУ им.А.И. Герцена, Санкт-Петербург, 2009, 103–109.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 27 июля 2012 г.

Romakina L. N. The theorem of the area of a rectangular trihedral of the hyperbolic plane of positive curvature. Far Eastern Mathematical Journal. 2013. V. 13. № 1. P. 127–147.

ABSTRACT

On the hyperbolic plane $\widehat{H}$ of positive curvature the orthogonal hypercyclic coordinates system is introduced. Formulas for calculation of the areas of a rectangular trihedral, in particular with a parabolic hypotenuse, double rectangular trihedral and the simple 4-contours, being a cell in simple partitions of the plane $\widehat{H}$ are received.

Key words: *hyperbolic plane $\widehat{H}$ of positive curvature, hypercycle, orthogonal hypercyclic coordinate system, main theorem of the area of a rectangular trihedral of the plane $\widehat{H}$.*