Дальневосточный математический журнал. 2013. Том 13. № 2. С. 179–191

УДК 517.983.8
MSC2010 46B70

© А. А. Дмитриев[1]

Об оценке константы $\mathscr{K}$-делимости в парах банаховых пространств

В статье приведены результаты решения задачи по оценке константы $\mathscr{K}$-делимости пар банаховых пространств. Установлено, что методом, использованным Ю.А. Брудным и Н.Я. Кругляком при доказательстве свойства $\mathscr{K}$-делимости, невозможно получить лучшую оценку, чем $3+2\sqrt{2}$ для любых пар банаховых пространств и 4 для пар банаховых решёток. Приведено доказательство теоремы Седаева–Семёнова для пары L_1^1, L_1 с мерой на полуоси, использующее лишь свойства вогнутых функций.

Ключевые слова: *пары банаховых пространств, интерполяция линейных операторов, $\mathscr{K}$-функционал, $\mathscr{K}$-метод, константа $\mathscr{K}$-делимости*

Введение

В работе изложены результаты решения задачи по оценке константы $\mathscr{K}$-делимости, играющей важную роль в хорошо известном в теории интерполяции линейных операторов $\mathscr{K}$-методе J. Peetre. $\mathscr{K}$-делимость произвольной банаховой пары была установлена Ю. А. Брудным и Н. Я. Кругляком в работе [1] с константой $\varkappa$=14.

Следует отметить, что теория интерполяции линейных операторов бурно развивалась в 60–80 годы прошлого столетия. На мой взгляд, наиболее важные для приложений результаты были получены именно в эти годы. К задачам, которые не были решены в это время, следует отнести задачу о точном значении константы $\mathscr{K}$-делимости. Несмотря на то, что задача не является актуальной, решение её представляется интересным, как и любое решение задачи о точном значении какой-либо величины.

В предлагаемой вниманию читателя работе приведена оценка константы $\mathscr{K}$-делимости сверху. Оценка $\varkappa = (1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}$ была получена мною фактически в 1981 году и основывалась на доказательстве свойства $\mathscr{K}$-делимости, сообщенного мне В.И. Дмитриевым в письме от 8 января 1981года. Это доказательство

[1]Институт прикладной математики ДВО РАН, 690013, Владивосток, ул. Радио, 7.
Электронная почта: dmitriev@iam.dvo.ru

не было опубликовано и я посчитал возможным привести его в данной работе. Константа $\varkappa$ была анонсирована в монографии В.И. Овчинникова [2], в которой изложено доказательство свойства $\mathscr{K}$-делимости, по существу, совпадающим с доказательством В.И. Дмитриева, но требующим существенных уточнений в оценках констант. В 1990 году в работе [3] M. Cwikel, B. Jawerth и M. Milman подтвердили оценку $\varkappa$. Отметим, что константа $\varkappa$ справедлива для любых пар банаховых пространств. В 2000 году для пар банаховых решёток мною установлено, что константа $\mathscr{K}$-делимости не превосходит $\lambda = 4$ ([4]). В работе [5] M. Cwikel получил эту же оценку. Из доказательства, приведенного здесь, следует, что константы $\varkappa$ и λ наилучшие, если при их оценке использовать «фундаментальную» лемму теории интерполяции J. Peetre.

Все результаты данной статьи хорошо известны, за исключением может быть леммы 3. Доказательство этой леммы в том виде, в котором оно приведено, получено в 2000 году и анонсировано в [4].

1. Обозначения и предварительные сведения

В работе используются терминология и результаты монографий [2, 6] и обзорной статьи [7].

Напомним основные определения. Конус вогнутых положительных на полуоси $\overline{\mathbb{R}}_+$ функций обозначим через Φ; через Φ_2 – конус гладких (дважды дифференцируемых) строго вогнутых, вторая производная которых почти всюду на $\mathbb{R}_+$ меньше нуля. Очевидно, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\varphi_\varepsilon \in \Phi_2$, для которой $\varphi_\varepsilon \leqslant \varphi \leqslant (1+\varepsilon)\varphi_\varepsilon$. Функцию $\varphi_\varepsilon \in \Phi_2$ будем называть *ε-эквивалентной φ*.

Отметим, что пространство непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций $\mathscr{C}([0,1])$ изометрически изоморфно $\mathscr{C}(\overline{\mathbb{R}}_+, \sigma)$ с весом $\sigma(t) \overset{\mathrm{def}}{=} \dfrac{1}{1+t}$. Изометрия задается оператором $J : f(t) \mapsto (1+t) f\Big(\dfrac{t}{1+t}\Big)$, причем вогнутые положительные функции на $(0,1)$ оператором J переводятся в вогнутые положительные функции на $\mathbb{R}_+$.

Если $\varphi \in \Phi$, то справедливо интегральное представление

$$\varphi(t) = \int_0^\infty \min\{t,s\}\, d\mu(s),$$

причём мера $\mu(s) = -\varphi'(s)$ при $s \in \mathbb{R}_+$ и $\mu(0) = \varphi(+0)$, $\mu(\infty) = \varphi'(+\infty)$.

Последовательность точек $\mathcal{T} = \{t_n\} \subset \mathbb{R}_+$ называют *разрежённой*, если пересечение $\mathcal{T}$ с любым сегментом из $\mathbb{R}_+$ содержит лишь конечное множество точек t_n. При этом считаем, что последовательность t_n – возрастающая, предельными точками её могут быть лишь 0 и $+\infty$, причём эти предельные точки принадлежат $\mathcal{T}$. $\mathcal{T}$ может быть конечной, ограниченной сверху или ограниченной снизу числом больше нуля. В таком случае будем говорить, что $\mathcal{T}$ *конечна или ограничена сверху (снизу)*.

Пусть μ – дискретная мера на $\mathcal{T}$ со значениями $\mu(t_n) = \mu_n$, тогда вогнутая функция принимает вид

$$\varphi(t) = \mu_- + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu_n \min\{t, t_n\} + \mu_+ t.$$

Так определенную функцию будем называть *дискретной вогнутой функцией, сосредоточенной на $\mathcal{T}$,* или просто *дискретной.* Отметим, что неравенство $\varphi(t) \leqslant \psi(t)$ в случае, когда φ – дискретная, а ψ – произвольная вогнутые функции, выполнено тогда и только тогда, когда $\varphi(t_n) \leqslant \psi(t_n)$. Вогнутую функцию $t\varphi\left(\frac{1}{t}\right)$ будем называть *мультипликативно сопряжённой* $\varphi \in \Phi$.

Пусть банахово пространство A (непрерывно) вложено в банахово пространство B. *Относительным пополнением* пространства A в B называют пространство $\widetilde{A}^B$, единичным шаром которого является замыкание единичного шара A в норме пространства B. Пространство A *относительно полно* в B, если единичный шар A замкнут в пространстве B. Через $\circ A$ и $\bar{\circ} A$ обозначим открытый и замкнутый единичный шар пространства A соответственно.

Если $\vec{A}$ – пара банаховых пространств и банахово пространство A вложено в $A_0{+}A_1$, то через $\widetilde{A}$ обозначается относительное пополнение A в $A_0 + A_1$. Если A_0 и A_1 относительно полны в $A_0{+}A_1$, то такую пару пространств называют *относительно полной.*

Пусть a – произвольный элемент пространства $A_0{+}A_1$, $\vec{B}$ – пара пространств, $(\vec{A}{\mapsto}\vec{B})$ – пространство допустимых операторов из $\vec{A}$ в $\vec{B}$. *Орбитой элемента* $a \in A_0{+}A_1$ называют пространство элементов $b \in B_0{+}B_1$, допускающих представление $b = Ta$, $T \in (\vec{A}{\mapsto}\vec{B})$. Орбиту элемента a в паре $\vec{B}$ будем обозначать $\mathscr{O}rb(a, \vec{A}, \vec{B})$. Орбита является *интерполяционным* пространством в паре $\vec{B}$.

$\mathscr{K}$-функционал элемента a пары $\vec{A}$ определён равенством

$$\mathscr{K}(t, a, A_0, A_1) = \mathscr{K}(t, a, \vec{A}) = \inf\{\|a_0\|_{A_0}{+}\, t\|a_1\|_{A_1}\colon\ a = a_0 + a_1,\ a_0 \in A_0, a_1 \in A_1\}$$

и является вогнутой функцией на полуоси $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Очевидно, что функции $\mathscr{K}(t, a, A_0, A_1)$ и $\mathscr{K}\big(t, a, A_1, A_0\big)$ мультипликативно сопряжены. Перечислим свойства $\mathscr{K}$-функционала, используемые далее (знак $\backsimeq$ означает изометрию соответствующих пространств).

I. $\mathscr{K}(t, a, A_0, A_1) = \mathscr{K}(t, a, \widetilde{A}_0, \widetilde{A}_1) \quad \forall a \in A_0{+}A_1$ и $t \in \mathbb{R}_+$.

II. $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathscr{K}(t, a, \vec{A}) = \sup\limits_{0<t} \mathscr{K}(t, a, \vec{A}) = \|a\|_{A_0} \quad \forall a \in A_0 \Leftrightarrow A_0 \backsimeq \widetilde{A}_0$.

III. $\mathscr{K}(t, a, \vec{A}) \leqslant \|a\|_{A_0}$, если $a \in A_0$; $\mathscr{K}(t, a, \vec{A}) \leqslant t\|a\|_{A_1}$, если $a \in A_1$ и $\mathscr{K}(t, a, \vec{A}) \leqslant \min\{\|a\|_{A_0}, t\|a\|_{A_1}\}$, если $a \in A_0{\cap}A_1$.

IV. (Свойство $\mathscr{K}$-делимости.) *Пусть $\varphi_n{\in}\Phi$ и $\mathscr{K}(t, a, \vec{A}){\leqslant} \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \varphi_n(t)$ на $\mathbb{R}_+$ (ряд сходится хотя бы в одной точке и, следовательно, всюду). Тогда найдется последовательность элементов $\{a_n\}$ из $A_0{+}A_1$ для которых ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n$ сходится к a в $A_0{+}A_1$ и $\mathscr{K}(t, a_n, \vec{A}) \leqslant \varkappa\varphi_n(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$.*

Константу $\varkappa$ в последнем неравенстве называют *константой $\mathscr{K}$-делимости.* Банахову пару $\vec{A}$ называют *$\mathscr{K}$-полной*, если для любой вогнутой функции $\varphi \in \Phi$ найдётся элемент $a \in A_0{+}A_1$, $\mathscr{K}$-функционал которого ε-эквивалентен φ.

Пространство $\mathscr{KO}(a,\vec{A},\vec{B}) \overset{\text{def}}{=} \big\{b \in B_0+B_1 : \mathscr{K}(t,b,\vec{B}) \leqslant \mathscr{K}(t,a,\vec{A}),\ a \in A_0+A_1\big\}$ называют *$\mathscr{K}$-орбитой элемента a в паре $\vec{B}$*. Как и в случае орбиты, $\mathscr{K}$-орбита также является интерполяционным пространством в паре $\vec{B}$. В этом определении основную роль играет вогнутая функция $\varphi=\mathscr{K}(\cdot,a,\vec{A})$, а не $\mathscr{K}$-функционал элемента a. Если $\mathscr{K}$-орбита любого элемента $a\in A_0+A_1$ совпадает с его орбитой, то говорят, что интерполяция из пары $\vec{A}$ в пару $\vec{B}$ *описывается $\mathscr{K}$-методом*, а соответствующую константу вложения $\mathscr{KO}(a)$ в $\mathscr{O}rb(a)$ называют *интерполяционной константой $\mathscr{K}$-метода*.

Пусть $\mathscr{T}$ – разрежённая последовательность ($0,\infty\in\mathscr{T}$), $\mathbf{l}_1^1(\mathscr{T})$ – пространство последовательностей со стандартным базисом $\{\mathbf{e}_-\}\cup\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и весом $\boldsymbol{\omega}=\{1\}\cup\{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, а $\mathbf{l}_1(\mathscr{T})$ – пространство с базисом $\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\cup\{\mathbf{e}_+\}$. Соответствующую этим пространствам пару будем обозначать $\vec{\mathbf{l}}_1(\mathscr{T})$. $\mathscr{K}$-функционал последовательности $\boldsymbol{\mu}=\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\in\mathbf{l}_1^1(\mathscr{T})+\mathbf{l}_1(\mathscr{T})$ совпадает с дискретной вогнутой функцией, сосредоточенной на $\mathscr{T}$. Так как мультипликатор Ω: $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\mapsto\{\omega_n\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ изометрично отображает $\mathbf{l}_1$ на $\mathbf{l}_1^{\boldsymbol{\omega}}$, то пара $\big(\mathbf{l}_1^{\boldsymbol{\omega}_0},\,\mathbf{l}_1^{\boldsymbol{\omega}_1}\big)\overset{\text{def}}{=}\vec{\mathbf{l}}_1^{\boldsymbol{\omega}}$ изометрична $\vec{\mathbf{l}}_1(\mathscr{T})$, другими словами, свойства, установленные для пары $\vec{\mathbf{l}}_1(\mathscr{T})$, справедливы и для пары пространств $\vec{\mathbf{l}}_1^{\boldsymbol{\omega}}$.

Если μ – мера на $\overline{\mathbb{R}}_+$, то $\vec{L}_1(\overline{\mathbb{R}}_+,\mu)$ – пара пространств $\big(L_1^1(\overline{\mathbb{R}}_+,\mu),L_1(\overline{\mathbb{R}}_+,\mu)\big)$ с $\mathscr{K}$-функционалом функции f из пространства $L_1^1(\overline{\mathbb{R}}_+,\mu)+L_1(\overline{\mathbb{R}}_+,\mu)$

$$\mathscr{K}\big(t,f,\vec{L}_1(\overline{\mathbb{R}}_+,\mu)\big)=\int_0^\infty \min\{t,s\}|f(s)|d\mu(s),$$

в частности, если μ – мера Лебега на $\overline{\mathbb{R}}_+$, то в обозначениях опускается μ, при этом считаем, что (дискретная) мера точек 0 и ∞ равна 1.

2. Оценка константы $\mathscr{K}$-делимости сверху

Лемма 1. *Единичный шар орбиты $\mathscr{O}rb(\boldsymbol{\lambda})$ вектора $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbf{l}_1^1(\mathscr{T})+\mathbf{l}_1(\mathscr{T})$ пары $\vec{\mathbf{l}}_1^1(\mathscr{T})$ в относительно полной банаховой паре $\vec{A}$ совпадает с множеством*

$$\begin{aligned}\mathsf{\bar{o}}A \overset{\text{def}}{=} \Big\{&a\in A_0+A_1 : a=a_-+\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n+a_+;\\ &\mathscr{K}(t,a_-,\vec{A})\leqslant\lambda_-,\ \mathscr{K}(t,a_n,\vec{A})\leqslant\lambda_n\min\{t_n,t\},\ \mathscr{K}(t,a_+,\vec{A})\leqslant\lambda_+t;\ t_n\in\mathscr{T}\Big\}.\end{aligned}\tag{1}$$

Доказательство. Действительно, если $\|a\|_{\mathscr{O}rb(\boldsymbol{\lambda})}<1$, то, по определению нормы в орбите, найдется оператор $T\in\big(\vec{\mathbf{l}}_1(\mathscr{T})\mapsto\vec{A}\big)$ такой, что $a=T\boldsymbol{\lambda}$ с нормой

$$\max\{\|T\|_{\mathbf{l}_1^1(\mathscr{T})\mapsto A_0},\|T\|_{\mathbf{l}_1(\mathscr{T})\mapsto A_1}\}\leqslant 1.$$

Так как $\boldsymbol{\lambda}=\lambda_-\mathbf{e}_-+\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda_n\mathbf{e}_n+\lambda_+\mathbf{e}_+$, то, учитывая линейность T, получим требуемое представление (1).

Установим противоположное включение. Пусть a удовлетворяет условиям (1). Относительная полнота пары $\vec{A}$ и свойство III $\mathscr{K}$-функционала обеспечивают неравенства

$$\|a_-\|_{A_0}\leqslant \lambda_-, \quad \|a_n\|_{A_0}\leqslant \lambda_n t_n, \quad \|a_n\|_{A_1}\leqslant \lambda_n, \quad \|a_+\|_{A_1}\leqslant \lambda_+. \tag{2}$$

Определим элементы $\boldsymbol{\lambda}_-, \boldsymbol{\lambda}_n, \boldsymbol{\lambda}_+$ равенствами $\boldsymbol{\lambda}_-=\dfrac{1}{\lambda_-}\mathbf{e}_-$, $\boldsymbol{\lambda}_n=\dfrac{1}{\lambda_n}\mathbf{e}_n$, $\boldsymbol{\lambda}_+=\dfrac{1}{\lambda_+}\mathbf{e}_+$, если $\lambda_-, \lambda_n, \lambda_+\neq 0$ и нуль в противном случае, и оператор T – равенством

$$T\boldsymbol{\mu}=\langle\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\lambda}_-\rangle a_-+\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\lambda}_n\rangle a_n+\langle\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\lambda}_+\rangle a_+$$

(через $\langle\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\lambda}\rangle$ обозначено скалярное произведение векторов $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\lambda}$). Очевидно, что $T\boldsymbol{\lambda}=a$. Если $\boldsymbol{\mu}$ из пространства $\mathbf{l}_1^1(\mathscr{T})$, то

$$\|T\boldsymbol{\mu}\|_{A_0}\leqslant |\langle\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\lambda}_-\rangle|\|a_-\|_{A_0}+\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\langle\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\lambda}_n\rangle|\|a_n\|_{A_0}\leqslant$$
$$\leqslant |\boldsymbol{\mu}_-|\frac{1}{\lambda_-}\|a_-\|_{A_0}+\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\boldsymbol{\mu}_n|\frac{1}{\lambda_n}\|a_n\|_{A_0}\leqslant |\boldsymbol{\mu}_-|+\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\boldsymbol{\mu}_n|t_n=\|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{l}_1(\mathscr{T})}.$$

Аналогично устанавливается, что $\|T\boldsymbol{\mu}\|_{A_1}\leqslant \|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{l}_1^1(\mathscr{T})}$. Следовательно,

$$\|a\|_{\mathscr{O}rb(\boldsymbol{\lambda})}\leqslant \max\{\|T\|_{\mathbf{l}_1(\mathscr{T})\mapsto A_0}, \|T\|_{\mathbf{l}_1^1(\mathscr{T})\mapsto A_1}\}\leqslant 1.$$

Таким образом, $\circ\mathscr{O}rb(\boldsymbol{\lambda})\Subset\bar{\circ}A\Subset\bar{\circ}\mathscr{O}rb(\boldsymbol{\lambda})$. Условие $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbf{l}_1(\mathscr{T})+\mathbf{l}_1^1(\mathscr{T})$ и неравенства (2) означают, что $\bar{\circ}A$ — единичный шар суммы пространств λ_-A_0, $\lambda_n\big(A_0\bigcap t_nA_1\big)$ и λ_+A_1, т. е. банахово пространство, что завершает доказательство леммы.

Лемма 2. *Для того чтобы интерполяция из пары $\vec{L}_1(\overline{\mathbb{R}}_+)$ в относительно полную пару $\vec{A}$ описывалась $\mathscr{K}$-методом, необходимо и достаточно, чтобы пара $\vec{A}$ была $\mathscr{K}$-делимой, при этом константа $\varkappa$ $\mathscr{K}$-делимости пары $\vec{A}$ равна интерполяционной константе γ $\mathscr{K}$-метода пары $\vec{A}$ относительно пары $\vec{L}_1(\overline{\mathbb{R}}_+)$.*

Доказательство. Сначала докажем необходимость. Пусть

$$\mathscr{K}(t,a,\vec{A})\leqslant \alpha+\sum_{n\in\mathbb{Z}}\phi_n(t)+\beta t\,(\phi_n\in\Phi_0).$$

Для каждой функции $\phi_n\in\Phi_0$ найдется ε-эквивалентная функция $\varphi_n\in\Phi_2$, являющаяся $\mathscr{K}$-функционалом некоторой функции $f_n\in L_1^1(\overline{\mathbb{R}}_+)+L_1(\overline{\mathbb{R}}_+)$. Следовательно, $\mathscr{K}(t,a,\vec{A})\leqslant \mathscr{K}(t,f,\vec{L}_1(\overline{\mathbb{R}}_+))$ при $f=f_-+\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}f_n+f_+$, и для оператора T, переводящего f в a, справедливы неравенства

$$\mathscr{K}(t,Tf_-,\vec{A})\leqslant\alpha,\ \mathscr{K}(t,Tf_n,\vec{A})\leqslant\gamma\mathscr{K}(t,f_n,\vec{L}_1(\overline{\mathbb{R}}_+))\leqslant(1+\varepsilon)\gamma\phi_n(t),\ \mathscr{K}(t,Tf_+,\vec{A})\leqslant\beta t,$$

т. е. пара $\vec{A}$ $\mathscr{K}$-делима с константой $\varkappa\leqslant\gamma$.

Теперь докажем достаточность. Пусть пара $\vec{A}$ $\mathscr{K}$-делима и

$$\mathscr{K}(t,a,\vec{A})\leqslant\mathscr{K}(t,f,\vec{L}_1(\overline{\mathbb{R}}_+))\stackrel{\text{def}}{=}\varphi(t).$$

Очевидно, что существует нижняя огибающая семейства касательных, а именно

$$\alpha_- + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \min\{\alpha_n,\, \beta_n t\} + \beta_+ t = \mathscr{K}(t, \mathbb{1}, \vec{\mathbf{l}}_1^{\boldsymbol{\omega}})$$

ε-эквивалентная функции φ. Из $\mathscr{K}$-делимости пары $\vec{A}$ вытекает, что

$$a = a_- + \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n + a_+,$$
$$\mathscr{K}(t, a_-, \vec{A}) \leqslant \varkappa\alpha_-, \quad \mathscr{K}(t, a_n, \vec{A}) \leqslant \varkappa \min\{\alpha_n, \beta_n t\}, \quad \mathscr{K}(t, a_+, \vec{A}) \leqslant \varkappa\beta_+ t.$$

По лемме 1 $a \in \mathscr{O}rb(\mathbb{1};\, \vec{\mathbf{l}}_1^{\boldsymbol{\omega}},\, \vec{A})$, т. е. $a = T\mathbb{1}$ и $\max\bigl\{\|T\|_{\mathbf{l}_1^{\omega_0}\mapsto A_0},\, \|T\|_{\mathbf{l}_1^{\omega_1}\mapsto A_1}\bigr\} \leqslant \varkappa$. По теореме Седаева–Семёнова найдётся оператор S с нормой

$$\max\bigl\{\|S\|_{L_1^1(\overline{\mathbb{R}}_+)\mapsto \mathbf{l}_1^{\omega_0}},\, \|S\|_{L_1(\overline{\mathbb{R}}_+)\mapsto \mathbf{l}_1^{\omega_1}}\bigr\} \leqslant 1+\varepsilon,$$

для которого $\mathbb{1} = Sf$. Оператор ST переводит f в a, и его норма не превосходит $(1+\varepsilon)\varkappa$. Таким образом, $\gamma \leqslant \varkappa$.

Замечание 1. Доказательство необходимости не использует относительную полноту пары $\vec{A}$. По свойству I $\mathscr{K}$-функционала $\mathscr{K}$-делимость не зависит от относительной полноты пары $\vec{A}$, поэтому интерполяция из пары $\vec{L}_1(\overline{\mathbb{R}}_+)$ и, более того, из любой пары $\vec{\mathbf{l}}_1(\mathscr{T})$ (вне зависимости конечна или бесконечна разрежённая последовательность $\mathscr{T}$) в любую ($\mathscr{K}$-делимую) банахову пару $\vec{A}$ описывается $\mathscr{K}$-методом.

Из леммы 2 непосредственно вытекает, что для доказательства $\mathscr{K}$-делимости и оценки соответствующей константы достаточно оценить константу вложения $\mathscr{K}$-орбиты в орбиту произвольной функции $f \in L_1^1(\overline{\mathbb{R}}_+) + L_1(\overline{\mathbb{R}}_+)$ в паре $\vec{A}$. Для этого достаточно представить элемент $a \in A_0 + A_1$ в виде суммы $a_- \in A_0$, $a_n \in A_0 \cap A_1$ $(n \in \mathbb{Z})$ и $a_+ \in A_1$. Построение такой системы элементов основывается на выборе нижней огибающей семейства касательных к $\mathscr{K}$-функционалу функции f и на одной из модификаций «фундаментальной» (или основной) леммы теории интерполяции.

Лемма 3. *Для любой функции $\varphi \in \Phi$ существует разрежённая последовательность $\mathscr{T}$ такая, что для функции $\psi(t)$, заданной равенством*

$$\psi(t) = \alpha(+0) + \sum_{t_n\in\mathscr{T}} \min\{\alpha(t_{n+1}) + \alpha(t_n),\, t[\beta(t_{n+1}) + \beta(t_n)]\} + \beta(+\infty)t, \tag{3}$$

справедливо неравенство $\psi(t) \leqslant \varkappa\varphi(t)$ с константой $\varkappa \leqslant (\sqrt{2}+1)^2$, где $\alpha(t) = \varphi(t) - t\varphi'(t)$ и $\beta(t) = \varphi'(t)$.

В случае, когда функция $\psi(t)$ задана равенством

$$\psi(t) = \alpha(+0) + \sum_{t_n\in\mathscr{T}} \min\{\alpha(t_{n+1}),\, t\beta(t_n)\} + \beta(+\infty)t, \tag{4}$$

справедливо неравенство $\psi(t) \leqslant \lambda\varphi(t)$ с константой $\lambda \leqslant 4$.

Константы $(\sqrt{2}+1)^2$ и 4 являются точными.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\varphi \in \Phi_2$ при условии

$$\lim_{t\to+0}\varphi(t) = \lim_{t\to+0}\frac{\varphi(t)}{t} = 0.$$

В общем случае доказательство аналогично, так как условие гладкости играет несущественную роль.

Разрежённую последовательность $\mathscr{T}$ определим из равенства

$$\max\Big\{\frac{\alpha(t_n)}{\alpha(t_{n+1})}, \frac{\beta(t_{n+1})}{\beta(t_n)}\Big\} = \vartheta < 1, \tag{5}$$

выбрав в качестве точки t_0, например, 1. При $n < 0$ точка t_{n+1} определяет t_n, а при $n > 0$ наоборот, t_n определяет t_{n+1}. Пусть t_{n+1} задана, т. е. прямая $\alpha(t_{n+1}) + t\beta(t_{n+1})$ является касательной к графику функции $\varphi(t)$ в точке t_{n+1}. Если прямая $\vartheta\alpha(t_{n+1})+t\frac{1}{\vartheta}\beta(t_{n+1})$ проходит выше графика $\varphi(t)$, то при некотором значении $t_n < t_{n+1}$ прямая $\alpha(t_n)+t\frac{1}{\vartheta}\beta(t_{n+1})$ станет касательной к $\varphi(t)$, при этом $\alpha(t_n) < \vartheta\alpha(t_{n+1})$; если же прямая $\vartheta\alpha(t_{n+1}) + t\frac{1}{\vartheta}\beta(t_{n+1})$ пересекает график $\varphi(t)$, то t_n выбирается из условия касания прямой $\vartheta\alpha(t_{n+1}) + t\beta(t_n)$, при этом $\vartheta\beta(t_n) > \beta(t_{n+1})$. Ясно, что при таком выборе точки t_n условие (5) выполнено. Аналогично, с очевидными изменениями, по t_n находится точка t_{n+1}.

В силу строгой выпуклости функции φ ни одна касательная к её графику не проходит через точку 0 и не параллельна координатной оси t, поэтому последовательность $\mathscr{T}$ не может быть ограниченной снизу или сверху.

Оценим функцию ψ в случае (3). Из (5) непосредственно вытекает, что

$$\begin{aligned}\psi(t) &\leqslant (1+\vartheta)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\min\{\alpha(t_{n+1}), t\beta(t_n)\} \leqslant \\ &\leqslant (1+\vartheta)\Big[\sum_{n\leqslant k-1}\alpha(t_{n+1}) + t\sum_{n\geqslant k}\beta(t_n)\Big] \leqslant \frac{1+\vartheta}{1-\vartheta}\big[\alpha(t_k) + t\beta(t_k)\big].\end{aligned}$$

Прямые в правой части неравенства касаются графика функции φ в точках t_k, следовательно, их точка пересечения s_k принадлежит интервалу (t_k, t_{k+1}). Если $\alpha(t_k) = \vartheta\alpha(t_{k+1})$, то

$$\alpha(t_{k+1})+s_k\beta(t_{k+1})\leqslant\frac{1}{\vartheta}\alpha(t_k)+s_k\beta(s_k)\leqslant\frac{1}{\vartheta}\big[\alpha(s_k)+s_k\beta(s_k)\big]=\frac{1}{\vartheta}\varphi(s_k),$$

если же $\beta(t_{k+1}) = \vartheta\beta(t_k)$, то

$$\alpha(t_k)+s_k\beta(t_k)\leqslant\alpha(t_k)+s_k\frac{1}{\vartheta}\beta(s_k)\leqslant\frac{1}{\vartheta}\big[\alpha(s_k)+s_k\beta(s_k)\big]=\frac{1}{\vartheta}\varphi(s_k).$$

Таким образом, справедливо неравенство $\psi(t) \leqslant \dfrac{1+\vartheta}{\vartheta(1-\vartheta)}\varphi(t)$. Несложно установить, что коэффициент при φ принимает наименьшее значение, если $\vartheta = \sqrt{2}-1$, и равен $(\sqrt{2}+1)^2$.

В случае (4), как легко видеть, будет отсутствовать сомножитель $1+\vartheta$, поэтому наименьшее значение коэффициент принимает при $\vartheta = \dfrac{1}{2}$ и равен 4.

Если $\alpha(+0) \neq 0$, а $\beta(+\infty) = 0$, то построим ограниченную снизу последовательность $\mathscr{T}$, выбрав за t_1 точку касания прямой $\dfrac{1}{\vartheta}\alpha(+0) + \beta(t_1)$ к графику $\varphi(t)$. Остальные точки строятся согласно описанной процедуре, причем $\mathscr{T}$ будет неограниченна сверху. Ясно,что при таком выборе точки t_1 оценка функции ψ не изменится. Случай $\alpha(+0) = 0$ и $\beta(+\infty) \neq 0$ сводится к предыдущему переходом к мультипликативно симметричной функции.

Наконец в случае $\alpha(+0) \neq 0$ и $\beta(+\infty) \neq 0$ тем же методом построим конечную последовательность, начиная, например, с точки касания прямой, параллельной $\alpha(+0) + t\beta(+\infty)$. Последовательность обрывается снизу, если $\vartheta\alpha(t_m) < \alpha(+0) \leqslant \alpha(t_m)$, и сверху, если $\vartheta\beta(t_n) < \beta(+\infty) \leqslant \beta(t_n)$. Соответствующие оценки получаются аналогично.

Докажем точность полученных оценок. Рассмотрим сначала случай (4) и функцию t^θ $(0 < \theta < 1)$. Для произвольной (неограниченной) разрежённой последовательности $\mathscr{T}$ соответствующая функция $\psi_\theta(t)$ равна $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \min\bigl\{(1-\theta)t_{n+1}^\theta, t\theta t_n^{-(1-\theta)}\bigr\}$.

Обозначим $\dfrac{t_{n+1}}{t_n}$ через ρ_n. Ясно, что оценка константы λ сводится к вычислению минимума отношения функции $\psi_\theta(t)$ к t^θ в точках $s_k{=}\dfrac{1-\theta}{\theta}\rho_k^\theta t_k$ по всевозможным $\mathscr{T}$, что приводит к неравенству

$$\varrho(s_k, \mathscr{T}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\psi_\theta(s_k)}{(1-\theta)^{1-\theta}\theta^\theta s_k^\theta} \leqslant \rho_k^{-\theta^2} \sum_{n\leqslant k+1} \left(\frac{t_n}{t_k}\right)^\theta + \rho_k^{\theta(1-\theta)} \sum_{n\geqslant k+1} \left(\frac{t_k}{t_n}\right)^{1-\theta} \leqslant \lambda.$$

Так как $\varrho(s_k, \mathscr{T}) > \rho_k^{\theta(1-\theta)}$ при всех k, то ρ_k ограничено, причем $\dfrac{t_n}{t_k}$ можно представить как произведение ρ_m^{-1} с соответствующими индексами m. Произведение ограниченных снизу положительных чисел принимает наименьшее значение, когда все они равны между собой, следовательно, функция $\varrho(s_k, \mathscr{T})$ будет принимать наименьшее значение, когда $\mathscr{T}_\rho = \bigl\{\rho^n\bigr\}_{n\in\mathbb{Z}}$ при $\rho > 1$.

Несложные вычисления показывают, что $\lambda(\rho,\theta) = \dfrac{(\rho-1)\rho^{\theta(1-\theta)}}{(\rho^\theta-1)(\rho^{1-\theta}-1)}$. Так как функция $\lambda(\rho,\theta)$ симметрична относительно точки $\theta = \dfrac{1}{2}$ и $\rho^\theta - 1 < \rho^{\theta^2}(\rho^\theta-1)^{1-\theta}$, $\rho^\theta(\rho^{1-\theta}-1) < \rho - 1$, то

$$\lambda(\rho,\theta) \geqslant \max\left\{ \left[\frac{\rho^{2\theta}}{\rho^\theta{-}1}\right]^{1-\theta}, \left[\frac{\rho^{2(1-\theta)}}{\rho^{1-\theta}{-}1}\right]^\theta \right\} \geqslant 4^{\max\{\theta.1-\theta\}},$$

что при $\theta{\to}0$ (или $\theta{\to}1$) даёт 4.

Аналогичные рассуждения для функции из равенства (3) приводят к выражению

$$\varkappa(\rho,\theta) = \rho^{\theta(1-\theta)} \frac{(\rho^{1-\theta}{+}1)^\theta(\rho^\theta{+}1)^{1-\theta}(\rho{-}1)}{(\rho^\theta{-}1)(\rho^{1-\theta}{-}1)} = \left[\frac{\rho^\theta(\rho^\theta{+}1)}{\rho^\theta{-}1}\right]^{1-\theta} \left[\frac{\rho^{1-\theta}{+}1}{\rho^\theta{-}1}\right]^\theta \frac{\rho{-}1}{\rho^{1-\theta}{-}1}.$$

Очевидно, что функция $\varkappa(\rho,\theta)$ не меньше первого сомножителя в последнем произведении (два других – больше 1). Учитывая симметричность, получим: $\varkappa(\rho,\theta) \geqslant (\sqrt{2}+1)^{2\max\{\theta.1-\theta\}}$.

Замечание 2. Лемма 3 справедлива для *балансировочной* последовательности Осколкова–Янсона [8, 9], в которой функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ заменяются на $\varphi(t)$ и $\dfrac{\varphi(t)}{t}$ соответственно. Несложно понять, что для ψ из условия (3) справедлива оценка $\varkappa{=}(1{+}\sqrt{2})^2$, что и было мной установлено при анализе доказательства свойства $\mathscr{K}$-делимости, предложенного В.И. Дмитриевым. Попытки установить оценку меньшую, чем $\varkappa$ для функции ψ из условия (4), предпринятые мною, не увенчались успехом и, по видимому, утверждение, что существует балансировочная последовательность $\mathscr{T}$ такая, что для любой функции $\varphi \in \Phi$ справедливо неравенство $\displaystyle\sum_{t_n\in\mathscr{T}}\min\Big\{\varphi(t_{n+1}), t\frac{\varphi(t_n)}{t_n}\Big\} \leqslant 4\varphi(t)$, неверно.

Для того чтобы завершить доказательство свойства $\mathscr{K}$-делимости, достаточно, используя диаграмму Гальярдо (см. [8], стр. 55), заметить, что для любого $\varepsilon > 0$ и опорной прямой в точке t_n к графику функции $\mathscr{K}(\cdot, a, \vec{A})$ найдутся $a_0(t_n)$ и $a_1(t_n)$, для которых

$$a = a_0(t_n) + a_1(t_n), \quad \alpha(t_n){\leqslant}\|a_0(t_n)\|_{A_0}{\leqslant}(1+\varepsilon)\alpha(t_n) \text{ и } \beta(t_n){\leqslant}\|a_1(t_n)\|_{A_1}{\leqslant}(1+\varepsilon)\beta(t_n).$$

Очевидно, что $a_n = a_0(t_{n+1}) - a_0(t_n) = a_1(t_n) - a_1(t_{n+1}) \in A_0{\cap}A_1$ при $n \in \mathbb{Z}$ и

$$a = a_0(t_m) + \sum_{n=m}^{k-1} a_n + a_1(t_k),$$
$$\mathscr{K}(t, a_n, \vec{A}) \leqslant (1+\varepsilon)\min\big\{\alpha(t_n) + \alpha(t_{n+1}),\ [\beta(t_n) + \beta(t_{n+1})]\, t\big\}.$$

В случае банаховых решёток $\vec{E}$ достаточно рассматривать лишь положительные элементы, причем при вычислении $\mathscr{K}$-функционала в разложении f в сумму $f_0{+}f_1$ f_0 и f_1 можно считать также положительными, так как $f{\leqslant}f^+{+}f^-$ и $\|f^+{-}f^-\|_E{=}\|f^+{+}f^-\|_E$, где $f^+{=}\max\{f,0\}$ и $f^-{=}\max\{-f,0\}$. Следовательно, для представления f справедлива цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} f{=}f(+0)+\sum_{t_n\in\mathscr{T}}[f_0(t_{n+1}){-}f_0(t_n)] + f(+\infty) &\leqslant f(+0)+\sum_{t_n\in\mathscr{T}}[f_0(t_{n+1}){-}f_0(t_n)]^+{+}\,f(+\infty) = \\ &= f(+0) + \sum_{t_n\in\mathscr{T}}[f_1(t_n){-}f_1(t_{n+1})]^+ + f(+\infty) \leqslant \\ &\leqslant f(+0) + \sum_{t_n\in\mathscr{T}}\min\{f_0(t_{n+1}), f_1(t_n)\} + f(+\infty). \end{aligned}$$

Так как

$$\|\min\{f_0(t_{n+1}), f_1(t_n)\}\|_{E_0} \leqslant \|f_0(t_{n+1})\|_{E_0} \leqslant (1+\varepsilon)\alpha(t_{n+1})$$

и

$$\|\min\{f_0(t_{n+1}), f_1(t_n)\}\|_{E_1} \leqslant \|f_1(t_n)\|_{E_1} \leqslant (1+\varepsilon)\beta(t_n),$$

то справедливы неравенства $\mathscr{K}(t, f_n, \vec{E}) \leqslant (1+\varepsilon)\min\big\{\alpha(t_{n+1}),\ [\beta(t_n))]\, t\big\}$.

Выбрав функцию $f \in L_1^1(\overline{\mathbb{R}}_+) + L_1(\overline{\mathbb{R}}_+)$ так, чтобы её $\mathscr{K}$-функционал был ε-эквивалентен $\mathscr{K}(t, a, \vec{A})$, установим справедливость теоремы.

Теорема 1. *При любом $\varepsilon > 0$ интерполяция из пары $(L_1^1(\overline{\mathbb{R}}_+), L_1(\overline{\mathbb{R}}_+))$ в произвольную банахову пару $\vec{A}$ описывается $\mathscr{K}$-методом с интерполяционной константой, не большей $(\sqrt{2}+1)^2 + \varepsilon$.*

Если относительно полная пара $\vec{A} \overset{\text{def}}{=} \vec{E}$ есть пара банаховых решёток, то интерполяционная константа не больше $4 + \varepsilon$.

3. Теорема Седаева–Семёнова

В работе [10] приведено доказательство теоремы Седаева–Семёнова с точной константой единица. Доказательство теоремы 2.1 этой работы, как мне кажется, слишком усложнено. Здесь я приведу доказательство теоремы Седаева–Семёнова для случая мер на $\overline{\mathbb{R}}_+$, использующее лишь свойства вогнутых функций и связанных с ними операторов.

Лемма 4. *Пара $\vec{\mathrm{l}}_1(\mathscr{T})$ $\mathscr{K}$-делима с константой единица.*

Доказательство. Достаточно установить, что из неравенства

$$\mathscr{K}(t, \boldsymbol{\lambda}, \vec{\mathrm{l}}_1(\mathscr{T})) \overset{\text{def}}{=} \sum_{t_k \in \mathscr{T}} \lambda_k \min\{t, t_k\} \leqslant \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu_k \min\{t, t_k\},$$

вытекает: найдутся векторы $\boldsymbol{\lambda}_k$ такие, что

$$\boldsymbol{\lambda} = \sum_{t_k \in \mathscr{T}} \boldsymbol{\lambda}_k \quad \text{и} \quad \mathscr{K}(t, \boldsymbol{\lambda}_k, \vec{\mathrm{l}}_1(\mathscr{T})) \leqslant \mu_k \min\{t, t_k\}.$$

Рассмотрим множества $\mathscr{T}^+ = \{t_n : \lambda_n \leqslant \mu_n\}$ и $\mathscr{T}^- = \{t_n : \lambda_n > \mu_n\}$. Если $\mathscr{T}_1^- = \emptyset$, то, очевидно, $\boldsymbol{\lambda}_k = \lambda_k \mathbf{e}_k$. В противном случае

$$\sum_{t_n \in \mathscr{T}^+} \lambda_n \min\{t, t_n\} + \sum_{t_n \in \mathscr{T}^-} (\lambda_n - \mu_n) \min\{t, t_n\} + \sum_{t_n \in \mathscr{T}^-} \mu_n \min\{t, t_n\} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{t_n \in \mathscr{T}^+} \lambda_n \min\{t, t_n\} + \sum_{t_n \in \mathscr{T}^+} (\mu_n - \lambda_n) \min\{t, t_n\} + \sum_{t_n \in \mathscr{T}^-} \mu_n \min\{t, t_n\}.$$

Очевидно, что $\varphi_1(t) \overset{\text{def}}{=} \sum_{t_n \in \mathscr{T}^-} (\lambda_n - \mu_n) \min\{t, t_n\} \leqslant \sum_{s_n \in \mathscr{T}^+} (\mu_n - \lambda_n) \min\{t, s_n\} \overset{\text{def}}{=} \psi_1(t)$.
Функции $\varphi_1(t)$ и $\psi_1(t)$ имеют непересекающиеся носители, поэтому

$$\varphi_1(t) \leqslant \sum_{t_n \in \mathscr{T}^-} \underline{\mu}_n \min\{t, t_n\} \overset{\text{def}}{=} \underline{\psi}_1(t, \mathscr{T}^-),$$

причем на некотором интервале (t_k, t_{k+1}) $(t_k, t_{k+1} \in \mathscr{T}^-)$ $\underline{\psi}_1(t, \mathscr{T}^-)$ строго меньше $\psi_1(t)$. Более того, $\varphi_1(t)$ и $\underline{\psi}_1(t, \mathscr{T}^-)$ имеют одинаковые носители $\mathscr{T}_1 \overset{\text{def}}{=} \mathscr{T}^-$, поэтому для них справедливы предыдущие рассуждения.

Последовательность дискретных функций φ_N и $\psi(\cdot, \mathscr{T}_N^-)$ – монотонна, по теореме Дини она (равномерно в метрике пространства $\mathscr{C}(\overline{\mathbb{R}}_+, \sigma)$) сходится к некоторой дискретной вогнутой функции ψ_∞. При этом возможны три случая: функции φ_∞ и ψ_∞ имеют одинаковые носители, ψ_∞=0, или $\psi_\infty(t) = \mu_-+\mu_+t$. В первых двух случаях утверждение леммы очевидно. В третьем случае

$$\varphi_\infty(t) =\sum_{t_k\leqslant t_n}\lambda_k t_k + t\sum_{t_k>t_n}\lambda_k \leqslant \mu_-+\mu_+t \text{ или } \sum_{t_k\leqslant t_n}\lambda_k t_k \leqslant \mu_- \text{ и } \sum_{t_k>t_n}\lambda_k \leqslant \mu_+.$$

Из леммы 1 непосредственно вытекает

Лемма 5. *Интерполяция из пары $\vec{\mathrm{l}}_1^{\boldsymbol{\omega}_1}$ в пару $\vec{\mathrm{l}}_1^{\boldsymbol{\omega}_2}$ описывается $\mathscr{K}$-функционалом с интерполяционной константой единица.*

С функцией $\varphi \in \Phi$ и разрежённой последовательностью $\mathscr{T}$ тесно связана дискретная функция $\underline{\varphi}(\cdot, \mathscr{T}) \in \Phi$ и определяемая $\mathscr{T}$ пара пространств $\vec{\mathrm{l}}_1(\mathscr{T})$. А именно: по промежутку $[t_n, t_{n+1})$, $t_n, t_{n+1}{\in}\mathscr{T}$ $(t_n{<}t_{n+1})$ определим интеграл

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}}\min\{t,s\}d\mu(s) =\int_0^\infty\min\{t,s\}\chi_{[t_n,t_{n+1})}(t)d\mu(s)$$

(χ_M – характеристическая функция множества M, $\mu=\varphi'$ – мера, определяющая функцию φ).

Так как

$$\min\Big\{t, s, t_n\frac{t_{n+1}-s}{t_{n+1}-t_n} + t\frac{s-t_n}{t_{n+1}-t_n}\Big\} = \frac{t_{n+1}-s}{t_{n+1}-t_n}\min\{t,t_n\} + \frac{s-t_n}{t_{n+1}-t_n}\min\{t,t_{n+1}\}$$

и $\dfrac{t_{n+1}-s}{t_{n+1}-t_n}\min\{t,t_n\} + \dfrac{s-t_n}{t_{n+1}-t_n}\min\{t,t_{n+1}\} \leqslant \min\{t,s\}$, при $t_n{\leqslant}s{\leqslant}t_{n+1}$, то

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}}\frac{t_{n+1}-s}{t_{n+1}-t_n}d\mu(s)\min\{t,t_n\} +\int_{t_n}^{t_{n+1}}\frac{s-t_n}{t_{n+1}-t_n}d\mu(s)\min\{t,t_{n+1}\} \leqslant\int_{t_n}^{t_{n+1}}\min\{t,s\}d\mu(s).$$

Следовательно, функция

$$\underline{\varphi}(t,\mathscr{T}) \overset{\text{def}}{=}\sum_{t_n\in\mathscr{T}}\left[\int_{t_n}^{t_{n+1}}\frac{t_{n+1}-s}{t_{n+1}-t_n}d\mu(s) +\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{s-t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}}d\mu(s)\right]\min\{t,t_n\}{\leqslant}\varphi(t),$$

причем, как несложно проверить, $\underline{\varphi}(t_n,\mathscr{T}){=}\varphi(t_n)$.

Таким образом, $\underline{\varphi}(t,\mathscr{T}){\leqslant}\varphi(t)$ и $\underline{\varphi}(t_n,\mathscr{T}) = \varphi(t_n)$. Оператор $T_\mathscr{T}$, определенный равенством

$$T_\mathscr{T} f = \boldsymbol{\lambda}, \qquad \boldsymbol{\lambda} = \left\{\int_{t_n}^{t_{n+1}}\frac{t_{n+1}-s}{t_{n+1}-t_n}f(s)d\mu(s) +\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{s-t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}}f(s)d\mu(s)\right\}_{t_n\in\mathscr{T}},$$

действует из пары $\vec{L}_1(\overline{\mathbb{R}}_+,\mu) \overset{\text{def}}{=} \big(L_1^1(\overline{\mathbb{R}}_+,\mu), L_1(\overline{\mathbb{R}}_+,\mu)\big)$ в пару $\vec{\mathrm{l}}_1(\mathscr{T})$ с нормой единица.

Пусть

$$\varphi(t) \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty \min\{t,s\}|f(s)|d\mu(s) = \mathscr{K}(t,f,\vec{L}_1(\overline{\mathbb{R}}_+,\mu)) <$$

$$< \mathscr{K}(t,\boldsymbol{\lambda},\vec{\mathrm{l}}_1(\mathscr{T})) =\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda_n\min\{t,t_n\}.$$

Прямая $\int_0^t s|f(s)|d\mu(s)+t\int_t^\infty |f(s)|d\mu(s)$ является опорной к φ в точке t. Ясно, что найдется разрежённая последовательность $\{s_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ такая, что для функции

$$\overline{\varphi}(t) \overset{\text{def}}{=} \inf_n \left\{ \int_0^{s_n} s|f(s)|d\mu(s)+t\int_{s_n}^\infty |f(s)|d\mu(s) \right\} = \\ = \sum_n \min\left\{ \int_{s_n}^{s_{n+1}} s|f(s)|d\mu(s), t\int_{s_n}^{s_{n+1}} |f(s)|d\mu(s) \right\}$$

справедливо неравенство $\varphi(t) \leqslant \overline{\varphi}(t) \leqslant \mathscr{K}(t, \boldsymbol{\lambda}, \vec{\mathrm{l}}_1(\mathscr{T}))$, поэтому без ограничения общности можно считать, что

$$\lambda_n = \int_{s_n}^{s_{n+1}} s|f(s)|d\mu(s) \qquad \text{и} \qquad \lambda_n t_n = \int_{s_n}^{s_{n+1}} |f(s)|d\mu(s).$$

Тогда для пары с $\vec{\mathrm{l}}_1^{\boldsymbol{\omega}}$ с весами $\big(\{\lambda_n t_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\big)$ $\mathscr{K}(t, \boldsymbol{\lambda}, \vec{\mathrm{l}}_1(\mathscr{T})) = \mathscr{K}(t, \mathbb{1}, \vec{\mathrm{l}}_1^{\boldsymbol{\omega}})$, причём оператор $T_{\boldsymbol{\omega}}: T_{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\mu} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu_n f(t)\chi_{[s_n,s_{n+1})}(t)$ переводит $\mathbb{1}$ в f и его норма равна единице.

Используя операторы $T_{\mathscr{T}}$, $T_{\boldsymbol{\omega}}$ и лемму 5, несложно доказать теорему Седаева–Семёнова с константой $\mathscr{K}$-делимости единица, при этом нужно учесть, что множество точек

$$\mathbb{T} = \{t \in \mathbb{R}_+ : \mathscr{K}(t, g, L_1^1(\overline{\mathbb{R}}_+, \nu), L_1(\overline{\mathbb{R}}_+, \nu)) < \mathscr{K}(t, f, L_1^1(\overline{\mathbb{R}}_+, \mu), L_1(\overline{\mathbb{R}}_+, \mu))\}$$

открыто, а разрежённую последовательность можно построить на любом составляющем его интервале.

Список литературы

[1] Ю. А. Брудный, Н. Я.Кругляк, “Функторы вещественной интерполяции”, *ДАН СССР*, **256**:1 (1981), 14–17.

[2] V. I. Ovchinnikov, *The method of orbit in interpolation theory*, Math. Rept., **1**, Part 2, Harwood Acad. Publ., London, 1984.

[3] M. Cwikel, B. Jawerth, M. Milman, “On the fundamental lemma of interpolation theory”, *J. Approx. Theory*, **60**:1 (1990), 70–82.

[4] А. А. Дмитриев, “О константе K-делимости функционала Петре пары банаховых решеток”, *ДВ школа-семинар им. акад. Е. В. Золотова. Владивосток, 27.08–02.09*, Дальнаука, Владивосток, 2000, 37–38.

[5] M. Cwikel, “The K-divisibility constant for couples of Banach lattices”, *J. Approx. Theory*, **124**:1 (2003), 124–136.

[6] Й. Берг, Й. Лёфстрём, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980.

[7] Ю. А. Брудный, С. Г. Крейн, Е. М. Семенов, “Интерполяция линейных операторов”, Итоги науки и техники, **24**, Сер. Матем. анализ., ВИНИТИ, М., 1986, 3–163.

[8] К. И. Осколков, “Аппроксимативные свойства суммируемых функций на множествах полной меры”, *Матем. сб.*, **103(145)**:4(8) (1977), 563–589.

[9] S. Janson, “Minimal and maximal method of interpolation”, *J. Func. Anal.*, **44** (1981), 50–73.

[10] M. Cwikel, I. Kozlov, “Interpolation of weighted L^1 spaces – a new proof of the Sedaev–Semenov theorem”, *Illinois J. Math.*, **46** (2002), 405–419.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 21 мая 2013 г.

Dmitriev A. A. On estimate of the $\mathscr{K}$-divisibility constant for Banach pairs. Far Eastern Mathematical Journal. 2013. V. 13. № 2. P. 179–191.

ABSTRACT

The paper contains some results on estimates of the $\mathscr{K}$-divisibility constant for Banach pairs. Its has been established that it is impossible to improve the estimate $3 + 2\sqrt{2}$ for any Banach pair and 4 for any pair of Banach lattices using the method of Yu. A. Brudnyi and N. Ya. Kruglјak. The Sedaev-Semenov theorem for the pair (L_1^1, L_1) with measure on half-axis has been proved by only the properties of concave functions.
Key words: *Banach couple, interpolation of linear operators, $\mathscr{K}$-method, $\mathscr{K}$-functional, constant $\mathscr{K}$-divisibility.*