Дальневосточный математический журнал. 2013. Том 13. № 2. С. 192–195

УДК 517.983.8
MSC2010 46B70

© А. А. Дмитриев[1]

О константе $\mathscr{K}$-делимости в паре пространств L_p с весом

Для пространств L_p с весом получена оценка константы $\mathscr{K}$-делимости $\lambda_p \geqslant p^{1/p} q^{1/q}$. С учетом известной оценки, для константы $\mathscr{K}$-делимости произвольной пары банаховых решеток справедливо неравенство $2 \leqslant \lambda \leqslant 4$.

Ключевые слова: *банаховы пары, интерполяция линейных операторов, $\mathscr{K}$-метод, $\mathscr{K}$-функционал, константа $\mathscr{K}$-делимости*

Об оценке константы $\mathscr{K}$-делимости снизу известно немного, а именно Н.Я. Кругляком [1] приведен пример конечномерных подпространств пары $(\mathscr{C}, \mathscr{C}_1)$ с $\varkappa > 1$ (несложные вычисления показывают, что фактически $\varkappa$ в этом примере равно $6/5$), а Т.С. Подоговой [2] установлено, что в этой паре $\varkappa \geqslant 1 + 2/(2\sqrt{2}+1) \simeq 1.522$[2]. В данной работе доказывается, что для пары банаховых решеток (L_p^1, L_p) (верхний индекс означает вес $w(t) = t^\theta$) константа $\mathscr{K}$-делимости удовлетворяет неравенству $p^{1/p} q^{1/q} \leqslant \lambda_p$, где $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, что при $p = 2$ приводит к оценке $\lambda_2 \geqslant 2$.

В статье используются терминология и обозначения предыдущей работы, а также вводятся некоторые новые обозначения и определения.

Для $\mathscr{K}$-функционала справедливо равенство [4, стр. 99]

$$\mathscr{K}(t, a, A_0, A_1) = \inf_{s \in \mathbb{R}_+} \left[1 + \left(\frac{t}{s}\right)^q\right]^{1/q} \mathscr{K}_p(s, a, A_0, A_1),$$

где $\mathscr{K}_p(t, a, A_0, A_1) = \inf \left\{ \left(\|a_0\|_{A_0}^p + t^p \|a_1\|_{A_1}^p\right)^{1/p} :\ a = a_0 + a_1,\ a_0 \in A_0,\ a_1 \in A_1 \right\}$ и, в случае, когда пара $\vec{A}$ есть пара банаховых решеток L_p на $\mathbb{R}_+$ с мерой Хаара $\dfrac{ds}{s}$ и весами $w_0(s) \equiv s$, $w_1(s) \equiv 1$ [5, стр. 391],

$$\mathscr{K}_p(t, f, L_p^1, L_p) = t \left\{ \int_0^\infty \left[\frac{s|f(s)|}{\left(s^q + t^q\right)^{1/q}} \right]^p \frac{ds}{s} \right\}^{1/p}.$$

[1]Институт прикладной математики ДВО РАН, 690013, Владивосток, ул. Радио, 7.
Электронная почта: dmitriev@iam.dvo.ru

[2]В монографии [3, стр. 335] без доказательства приведена оценка $\frac{2}{3}(1 + \sqrt{2}) \simeq 1.609$.

Кроме того, для $\mathscr{K}$-функционала в рассматриваемой паре справедливо неравенство

$$\mathscr{K}_p(t,f,L_p^1,L_p)\leqslant \mathscr{K}_p^*(t,f,L_p^1,L_p)\overset{\text{def}}{=}\left(\int_0^\infty \bigl|\min\{t,s\}\,f(s)\bigr|^p\frac{ds}{s}\right)^{1/p}\leqslant \mathscr{K}(t,f,L_p^1,L_p). \quad (1)$$

Константа $\mathscr{K}$-делимости совпадает с наибольшей константой вложения $\mathscr{K}$-орбиты функции $h\in L_1^1+L_1$ в орбиту этой функции. Открытый единичный шар орбиты h совпадает с множеством [6]

$$\circ\mathscr{O}rb(f,\vec{A})=\left\{a\in A_0+A_1\colon\ a=\int_0^\infty u(t)dt,\ \frac{1}{t}\mathscr{J}(t,u(t),\vec{A})\leqslant |h(t)|\right\},$$

где интеграл от вектор-функции u – интеграл Бохнера, а $\mathscr{J}$ – $\mathscr{J}$-функционал Питре:

$$\mathscr{J}(t,a,\vec{A})=\max\bigl\{\|a\|_{A_0},\ t\|a\|_{A_1}\bigr\}.$$

Пара (L_p^1,L_p) рефлексивна, и парой, сопряженной к ней, является (L_q^{-1},L_q) при $q=\dfrac{p}{p-1}$. Порядковая непрерывность нормы[3] в L_1^w и плотность $L_q^{-1}\bigcap L_q$ в L_q^{-1} и L_q влечет изометрию пространства $\mathscr{O}rb(w,\vec{L}_p)\overset{\text{def}}{=}\mathscr{O}rb(w,p)$ и $\bigl[(L_q,L_q^{-1})^{\mathscr{K}}_{w,1}\bigr]'$, где штрих означает сопряженное пространство, $w\overset{\text{def}}{=}|h|$ и $(L_q,L_q^{-1})^{\mathscr{K}}_{w,1}$ – банахово пространство с нормой

$$\|g\|^{\mathscr{K}}_{w,1}=\int_0^\infty \mathscr{K}(t,g,L_q,L_q^{-1})w(t)dt.$$

Более того, из порядковой непрерывности нормы в L_q^{-1} и L_q вытекает, что из условия $f_n\downarrow 0$ следует $\mathscr{K}(\cdot,f_n,L_q,L_q^{-1})\downarrow 0$, что, в свою очередь, влечет порядковую непрерывность нормы в $(L_q,L_q^{-1})^{\mathscr{K}}_{w,1}$. Таким образом, каждый непрерывный линейный функционал на $(L_q,L_q^{-1})^{\mathscr{K}}_{w,1}$ имеет интегральное представление. Так как для скалярного произведения функций $f\in\mathscr{O}rb(w,p)$ и $g\in(L_q,L_q^{-1})^{\mathscr{K}}_{w,1}$ справедливо неравенство

$$\langle f,\ g\rangle\overset{\text{def}}{=}\int_0^\infty f(t)g(t)dt\leqslant \|f\|_{\mathscr{O}rb(w,p)}\|g\|^{\mathscr{K}}_{w,1}\leqslant \lambda_p\|f\|_{\mathscr{K}\mathscr{O}(w,p)}\|g\|^{\mathscr{K}}_{w,1},$$

что приводит к следующей оценке константы λ_p снизу.

Для функции $w\in L_1^1+L_1$ $(w>0)$ и функций $f\in\mathscr{O}rb(w,p)$, $g\in(L_q,L_q^{-1})^{\mathscr{K}}_{w,1}$ с нормами $\|f\|_{\mathscr{K}\mathscr{O}(w,p)}\leqslant 1$ и $\|g\|^{\mathscr{K}}_{w,1}\leqslant 1$ выполняется $|\langle f,\ g\rangle|\leqslant\lambda_p$. Другими словами, *для оценки снизу константы $\mathscr{K}$-делимости в конкретной паре пространств достаточно вычислить скалярное произведение элемента из орбиты положительной функции пространства $L_1^1+L_1$ и элемента из двойственного к этой орбите пространства с соответствующими нормами, не превосходящими единицы.*

Условия $\|f\|_{\mathscr{K}\mathscr{O}(w,p)}\leqslant 1$ и $\|g\|^{\mathscr{K}}_{w,1}\leqslant 1$ означают, что

$$\mathscr{K}(t,f,L_p^1,L_p)\leqslant\int_0^\infty \min\bigl\{t,s\bigr\}w(t)dt\overset{\text{def}}{=}\psi(t)\quad \text{и}\quad \int_0^\infty \mathscr{K}(t,g,L_q,L_q^{-1})w(t)dt\leqslant 1.$$

Рассмотрим семейство функций $f_\alpha(t)=p^{1/p}\,t^{\alpha-1}$, $g_\beta(t)=q^{1/q}\dfrac{t^{1+\varrho/\beta}}{(1+t^{1/\beta})^{2\varrho+\beta}}$.

[3] Определения и свойства функциональных банаховых решёток см. [7].

Здесь и далее для удобства записи через ϱ будем обозначать $\dfrac{1}{q}$.

Скалярное произведение этих функций выражается через B-функцию Эйлера, а именно:

$$\langle f_\alpha,\ g_\beta\rangle = p^{1/p}q^{1/q}\beta B\big(\alpha\beta+\varrho,\ (1-\alpha)\beta+\varrho\big).$$

Легко видеть, что $\mathscr{K}_p^*(t,f_\alpha,L_p^1,L_p)=[\alpha(1-\alpha)]^{\varrho-1}\,t^\alpha$.

Используя неравенство (1) и формулу связи $\mathscr{K}$ и $\mathscr{K}_p$-функционалов, несложно найти, что

$$\mathscr{K}(t,f_\alpha,L_p^1,L_p)\leqslant \alpha^{(1-\alpha)\varrho-1}(1-\alpha)^{\alpha\varrho-1}t^\alpha,$$

следовательно, при $w(t)=\alpha(1-\alpha)t^{\alpha-2}$

$$\psi(t)=t^\alpha \qquad \text{и} \qquad \|f\|_{\mathscr{KO}(w,p)}\leqslant \alpha^{(1-\alpha)\varrho-1}(1-\alpha)^{\alpha\varrho-1}.$$

Так как для функции $\varphi_\gamma(t)=\dfrac{t}{(1+t^{1/\gamma})^\gamma}$, $\varphi_\gamma''(t)=-\dfrac{(1+\gamma^{-1})t^{1/\gamma 6-1}}{(1+t^{1/\gamma 6})^{\gamma+2}}$, то

$$\mathscr{K}_q^*(t,g_\beta,L_q,L_q^{-1})=\left[q\int_0^\infty\left(\min\left\{1,\frac{t}{s}\right\}\frac{s^{1+\varrho/\beta}}{(1+s^{1/\beta})^{2\varrho+\beta}}\right)^q\frac{ds}{s}\right]^{1/q}=\left(\frac{\beta}{\beta+\varrho}\right)^\varrho\varphi_\beta(t).$$

Аналогично оценке $\mathscr{K}$-функционала функции f_α,

$$\mathscr{K}(t,g_\beta,L_q,L_q^{-1})\leqslant\left(\frac{\beta}{\beta+\varrho}\right)^\varrho\inf_{s\in\mathbb{R}_+}\frac{(s^p+t^p)^{1/p}}{(1+s^{1/\beta})^\beta}=\left(\frac{\beta}{\beta+\varrho}\right)^\varrho\varphi_\theta(t),\quad \text{где } \theta=\beta+\varrho-1,$$

следовательно,

$$\|g_\beta\|_{w,1}^{\mathscr{K}}\leqslant\theta\alpha(1-\alpha)\left(\frac{\beta}{\beta+\varrho}\right)^\varrho B\big(\alpha\theta,(1-\alpha)\theta\big)=\theta\alpha(1-\alpha)\left(\frac{\theta+1-\varrho}{\theta+1}\right)^\varrho B\big(\alpha\theta,(1-\alpha)\theta\big).$$

Таким образом,

$$\|f_\alpha\|_{\mathscr{KO}(w,p)}\|g_\beta\|_{w,1}^{\mathscr{K}}\leqslant\theta\left[\frac{\alpha^{1-\alpha}(1-\alpha)^\alpha(\theta+1-\varrho)}{\theta+1}\right]^\varrho B(\alpha\theta,(1-\alpha)\theta).$$

Учитывая значение скалярного произведения, получим оценку $p^{1/p}q^{1/q}\mu_p(\alpha,\theta)\leqslant\lambda_p$, где функция $\mu_p(\alpha,\theta)$ в левой части неравенства равна

$$\left[\frac{\theta+1}{\alpha^{1-\alpha}(1-\alpha)^\alpha}\right]^\varrho\frac{(\theta+1-\varrho)^{1-\varrho}}{\theta}\frac{B\big(\alpha\theta+\alpha+(1-\alpha)\varrho,\ (1-\alpha)\theta+(1-\alpha)+\alpha\varrho\big)}{B\big(\alpha\theta,(1-\alpha)\theta\big)}.$$

Отношение B-функций запишем в виде

$$\frac{\Gamma\big(\alpha\theta+\alpha+(1-\alpha)\varrho\big)}{\Gamma\big(\alpha\theta\big)}\frac{\Gamma\big((1-\alpha)\theta+(1-\alpha)+\alpha\varrho\big)}{\Gamma\big((1-\alpha)\theta\big)}\frac{\Gamma\big(\theta\big)}{\Gamma\big(\theta+\varrho+1\big)}.$$

Известное асимптотическое равенство

$$\frac{\Gamma(x+\vartheta)}{\Gamma(x)}=x^\vartheta\left[1+O\Big(\frac{1}{x}\Big)\right]$$

(см., например, [8]) позволяет записать это отношение в виде

$$(\theta\alpha)^{\alpha+(1-\alpha)\varrho}\big[\theta(1-\alpha)\big]^{1-\alpha+\alpha\varrho}\theta^{-1-\varrho}\left[1+O\Big(\frac{1}{\theta}\Big)\right]=\alpha^{\alpha+(1-\alpha)\varrho}(1-\alpha)^{1-\alpha+\alpha\varrho}\left[1+O\Big(\frac{1}{\theta}\Big)\right].$$

Учитывая, что $\dfrac{1}{\theta}(\theta+1-\varrho)^{1-\varrho}(\theta+1)^{\varrho}\left[1+O\Big(\dfrac{1}{\theta}\Big)\right]$ при $\theta\to\infty$ стремится к единице, получим асимптотическое равенство

$$\mu(\alpha,\theta)\simeq\frac{\alpha^{\alpha+(1-\alpha)\varrho}(1-\alpha)^{1-\alpha+\alpha\varrho}}{\alpha^{(1-\alpha)\varrho}(1-\alpha)^{\alpha\varrho}}=\alpha^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha},\qquad\theta\to\infty,$$

что при $\alpha\to 0$ или $\alpha\to 1$ приводит к асимптотике $\mu(\alpha,\theta)\simeq 1$.

Замечание. Используя связь между функцией f и её $\mathscr{K}_p^*$-функционалом, можно показать, что константа λ_p не превосходит $(2p-1)^{1/p}(2q-1)^{1/q}$, тем не менее есть все основания полагать, что константа $p^{1/p}q^{1/q}$ является точной.

Список литературы

[1] Н. Я. Кругляк, “О константе K-делимости пары (C, C^1)”, *Исслед. по теории функций многих вещественных переменных*, ЯГУ, Ярославль, 1981, 37–44.

[2] Т. С. Подогова, “Об одном свойстве модуля непрерывности”, *Исслед. по теории функций многих вещественных переменных*, ЯГУ, Ярославль, 1982, 84–89.

[3] Yu. A. Brudnyi, N. Ya. Krugluak, *Interpolation functors and interpolation spaces*, North-Holland Math. Lab., **47**, Elsevier Science Publ. B.V., Amsterdam, 1991.

[4] Й. Берг, Й. Лефстрем, *Интерполяционные пространства. Введение*, Мир, М., 1980.

[5] V. I. Ovchinnikov, *The method of orbit in interpolation theory*, Math. Rept, **1**, Part 2, Harwood Acad. Publ, London, 1984.

[6] В. И. Дмитриев, В. И. Овчинников, “Об интерполяции в пространствах вещественного метода”, *ДАН СССР*, **46**:4 (1979), 794–797.

[7] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1977.

[8] Ю. Люк, *Специальные маиематические функции и их апроксимакции*, Мир, М., 1980.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 21 мая 2013 г.

Dmitriev A. A. On the $\mathscr{K}$-divisibility constant in a pair of weighted L_p spaces. Far Eastern Mathematical Journal. 2013. V. 13. № 2. P. 192–195.

ABSTRACT

An estimate $p^{1/p}q^{1/q}\leqslant\lambda_p$ of the $\mathscr{K}$-divisibility constant has been obtained for a pair of weighted L_p spaces. Taking into account an known estimate of the $\mathscr{K}$-divisibility constant for an arbitrary pair of Banach lattices this implies that $2\leqslant\lambda\leqslant 4$.

Key words: *Banach couple, interpolation of linear operators, $\mathscr{K}$-functional, $\mathscr{K}$-method, constant $\mathscr{K}$-divisibility.*