Дальневосточный математический журнал. 2013. Том 13. № 2. С. 209–221

УДК 517.958
MSC2010 35L10

© Д. К. Дурдиев, З. Р. Бозоров[1]

Задача определения ядра интегродифференциального волнового уравнения со слабо горизонтальной однородностью

Рассматривается обратная задача определения двумерного ядра в интегро-дифференциальном волновом уравнении в среде со слабо горизонтальной однородностью. При этом начальные данные равны нулю, а граничное условие типа Неймана задано на границе полуплоскости и представляет собой импульсную функцию. В качестве дополнительной информации задаётся режим колебания линии полуплоскости. Предполагается, что искомое ядро имеет вид $K(x,t) = K_0(t) + \varepsilon x K_1(t) + \ldots$, где ε – малый параметр. В работе построен метод нахождения K_0, K_1 с точностью до поправки, имеющей порядок $O(\varepsilon^2)$. Для этого, преобразованием Фурье задача сведена к цепочке двух одномерных обратных задач определения K_0, K_1. Первая обратная задача для K_0 редуцируется к системе нелинейных интегральных уравнений вольтерровского типа относительно неизвестных функций, а вторая – к системе линейных интегральных уравнений. Доказаны теоремы, характеризующие однозначную разрешимость определения неизвестных функций для любого фиксированного отрезка.

Ключевые слова: *волновое уравнение, обратная задача, дельта функция, преобразование Фурье, интегральное уравнение.*

1. Постановка задачи

Рассмотрим начально-краевую задачу для интегро-дифференциального волнового уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} - u_{zz} = \int_0^t K(x,\tau) u(t-\tau, x, z) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (x,z) \in \mathbb{R}^2_+ \tag{1.1}$$

[1]Бухарский государственный университет, 200117, г. Бухара, Узбекистан, ул. М. Икбол, 11. Электронная почта: durdiev@mail.ru, zbozorov83@mail.ru

с начальным и граничным условиями

$$u|_{t<0} \equiv 0, \tag{1.2}$$

$$u_z|_{z=0} = \delta'(x)\delta'(t), \tag{1.3}$$

где $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \mid z > 0\}$, $\delta'(x)$ – производная дельта функции Дирака. Обратную задачу поставим следующим образом: требуется найти ядро $K(t,x)$, t>0, $x \in \mathbb{R}$, интегрального члена в (1.1), если известны значения решения задачи (1.1)–(1.3) при $z = 0$, т.е. задана функция

$$u(t,x,0) = g(t,x), \; t > 0, \; x \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Определение. *Функция $K(t,x)$ из класса непрерывных функций $C([0,\infty) \times \mathbb{R})$ называется решением обратной задачи (1.1)–(1.4), если соответствующее ей решение задачи (1.1)–(1.3) $u(t,x,z)$ из класса обобщенных функций $D'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2_+)$ удовлетворяет (1.4) для $g(t,x)$, принадлежащих классу обобщенных функций $D'([0,\infty) \times \mathbb{R})$.*

Уравнение (1.1) возникает при описании целого ряда волновых процессов, протекающих в средах с памятью, когда состояние среды целиком не определяется поведением в настоящий момент, а зависит от всей «истории».

Задача (1.1)–(1.4) относится к числу многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. С современным состоянием теории обратных задач для таких уравнений можно ознакомиться в известных работах [1]–[3] (см. также библиографию в этих монографиях). Многомерные обратные задачи для уравнения (1.1) с начальным и граничным условиями, подобными (1.2), (1.3), и дополнительной информацией (1.4) исследованы в [4], [5]. В этих работах на основе метода шкал банаховых пространств получена локальная однозначная разрешимость поставленных задач в классе функций, аналитических по переменной x и гладких по переменной t. Развивая методы решения обратных задач, использованные в [6], мы в настоящей статье исследуем задачу восстановления ядра уравнения (1.1). При этом предполагается, что ядро $K(t,x)$ слабо зависит от горизонтальной переменной x:

$$K(x,t) = K_0(t) + \varepsilon x K_1(t) + \ldots, \tag{1.5}$$

где ε – малый параметр.

Основной результат данной работы состоит в том, что удалось построить метод нахождения $K_0(t)$ и $K_1(t)$ с точностью до величины порядка $O(\varepsilon^2)$. Для этого, как мы увидим далее, достаточно задать образ Фурье от функции $g(t,x)$ по x для одного фиксированного значения преобразования.

2. Сведение задачи к серии одномерных обратных задач

Решение прямой задачи (1.1)–(1.3) будем искать в виде ряда по степеням ε, т.е.

$$u(t,z,x) = u_0(t,z,x) + \varepsilon u_1(t,z,x) + \ldots \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в уравнение (1.1) и приравнивая выражения при одинаковых степенях ε, получим в итоге рекуррентную систему прямых задач, из которых находятся u_0, u_1 и т.д. Тогда, очевидно, согласно формуле (1.4) функция $g(x,t)$ будет иметь такую же структуру как и функция u:

$$g(t,x) = g_0(t,x) + \varepsilon g_1(t,x) + \dots \tag{2.2}$$

Используя разложения функции u по формуле (2.1), функции K по формуле (1.5) и поступая аналогично предыдущему, находим, что обратная задача (1.1)–(1.4) распадается на следующие задачи последовательного определения $K_0, K_1, \dots$:

$$u_{0tt} - u_{0xx} - u_{0zz} = \int\limits_0^t K_0(\tau) u_0(t-\tau, x, z) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (x,z) \in \mathbb{R}^2_+, \tag{2.3}$$

$$u_0|_{t<0} \equiv 0, \quad u_{0z}|_{z=0} = \delta'(x)\delta'(t), \tag{2.4}$$

$$u_0|_{z=0} = g_0(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2; \tag{2.5}$$

$$u_{ntt} - u_{nxx} - u_{nzz} = \int\limits_0^t \sum_{j=0}^n x^j K_j(\tau) u_{n-j}(t-\tau, x, z) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (x,z) \in \mathbb{R}^2_+, \tag{2.6}$$

$$u_n|_{t<0} \equiv 0, \quad u_{nz}|_{z=0} = 0, \tag{2.7}$$

$$u_n|_{z=0} = g_n(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{2.8}$$

Перейдем от функций $u_j(t,x,z)$, $j = 1, 2, \dots$ к их экспоненциальным образам Фурье по переменной x:

$$\tilde{u}_i(t, \lambda, z) = \int\limits_{\mathbb{R}} u_i(t,x,z) e^{-i\lambda x} dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Преобразование Фурье функции $u_j(t,x,z)$, $j = 1, 2, \dots$ существует при любом конечном t, так как каждая u_j представляет собой сумму некоторой сингулярной обобщенной функции конечного порядка и регулярной функции, причем носители функций u_j ограничены.

Обратные задачи (2.3)–(2.5) и (2.5)–(2.8) в терминах функций $\tilde{u}_j$ выглядят как задачи нахождения $K_0, K_1, \dots$ из следующих задач:

$$\tilde{u}_{0tt} - \tilde{u}_{0zz} - \lambda^2 \tilde{u}_0 = \int\limits_0^t K_0(\tau) \tilde{u}_0(t-\tau, \lambda, z) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, (\lambda, z) \in \mathbb{R}^2_+, \tag{2.9}$$

$$\tilde{u}_0|_{t<0} \equiv 0, \quad \tilde{u}_{0z}|_{z=0} = -i\lambda\delta'(t), \tag{2.10}$$

$$\tilde{u}_0|_{z=0} = \tilde{g}_0(t, \lambda), \quad (t, \lambda) \in \mathbb{R}^2; \tag{2.11}$$

$$\tilde{u}_{ntt} - \tilde{u}_{nzz} - \lambda^2 \tilde{u}_n = \int\limits_0^t \sum_{j=0}^n (-i)^j K_j(\tau) \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} \tilde{u}_{n-j}(t-\tau, \lambda, z) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (\lambda, z) \in \mathbb{R}^2_+, \tag{2.12}$$

$$\tilde{u}_n|_{t<0} \equiv 0, \quad \tilde{u}_{nz}|_{z=0} = 0, \tag{2.13}$$

$$\tilde{u}_n|_{z=0} = \tilde{g}_n(t,\lambda), \quad (t,\lambda)\in \mathbb{R}^2, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2.14}$$

где $\tilde{g}_m(t,\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} g_m(t,x)e^{-i\lambda x}dx,\ m = 0, 1, 2, \ldots$.

В следующих разделах мы изучим обратные задачи (2.9)–(2.11) и (2.12)–(2.14) при $n = 1$.

3. Задача определения функций K_0 и $\tilde{u}_0$

Обратная задача (2.9)–(2.11) является переопределенной, так как для определения одной функции $K(t)$ задается функция двух переменных (условие (2.11)). Ниже мы покажем, что для однозначной разрешимости обратной задачи достаточно задать образ Фурье функции $g_0(t,x)$ для одного фиксированного значения параметра преобразования. В дальнейшем, не оговаривая каждый раз, будем считать, что в равенствах (2.9)–(2.11) параметр λ фиксирован и всюду в этой статье $\lambda \neq 0$.

Из теории гиперболических уравнений следует, что $\tilde{u}_0(t,\lambda,z) = 0$ при $0 < t < z$, $z > 0$. Поэтому решение задачи (2.9), (2.10) удобно представить в виде

$$\tilde{u}_0(t,\lambda,z) = i\lambda\delta(t-z) + v(t,\lambda,z)\theta(t-z), \tag{3.1}$$

где $v(t,\lambda,z)$ – регулярная функция.

Используя метод выделения особенностей [7], нетрудно найти, что при фиксированном λ функция $v(t,\lambda,z)$ в области $t > z > 0$ удовлетворяет уравнениям

$$v_{tt} - v_{zz} + \lambda^2 v = i\lambda K_0(t-z) + \int\limits_0^{t-z} K_0(\tau)v(t-\tau,\lambda,z)d\tau, \tag{3.2}$$

$$v|_{t=z+0} = -\frac{i}{2}\lambda^3 z, \tag{3.3}$$

$$v_z|_{z=0} = 0. \tag{3.4}$$

Как следует из представления (3.1), для разрешимости обратной задачи функция $\tilde{g}_0(t,\lambda)$ должна иметь следующую структуру:

$$\tilde{g}_0(t,\lambda) = i\lambda\delta(t) + r(t,\lambda)\theta(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.5}$$

где функция $r(t,\lambda)$ удовлетворяет некоторым условиям гладкости по аргументу t, о которых будет сказано ниже. В связи с этим дополнительное условие для функции v имеет вид

$$v|_{z=0} = r(t,\lambda), \quad t > 0. \tag{3.6}$$

По отношению к обратной задаче определения $K_0(t)$ $(t > 0)$ из уравнений (3.2)–(3.4), (3.6) справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $r(t,\lambda) \in C^2[0,T]$ и $r(0,\lambda) = 0$, $r'(0,\lambda) = -\frac{1}{4}i\lambda^3$. Тогда для любого фиксированного $T > 0$ обратная задача (3.2)–(3.4), (3.6) имеет единственное решение $K_0(t) \in C[0,T]$.*

Лемма 1. *При выполнении условий теоремы 1 задача (3.2)–(3.4), (3.6) для $(z,t) \in D_T$, где $D_T = \{(z,t) \mid 0 \le z \le t \le T - z\}$, эквивалентна задаче нахождения функций $v(t,\lambda,z)$, $v_t(t,\lambda,z)$, $K_0(t)$ из следующей системы уравнений:*

$$v(t,\lambda,z) = -\frac{i}{2}\lambda^3 z + \int_z^t v_t(\tau,\lambda,z)d\tau, \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} v_t(t,\lambda,z) = -\frac{i}{4}\lambda^3 + \frac{1}{2}r'(t-z) + \frac{i\lambda}{2}K_0(t-z)z+ \\ +\frac{1}{2}\int_z^{\frac{z+t}{2}} (\lambda^2 v(t+z-\xi,\lambda,\xi) - i\lambda K_0(t+z-2\xi))d\xi- \\ -\frac{1}{2}\int_0^z \lambda^2 v(t-z+\xi,\lambda,\xi)d\xi - \frac{1}{2}\int_z^{\frac{z+t}{2}}\int_0^{t+z-2\xi} K_0(\tau)v(t+z-\tau-\xi,\lambda,\xi)d\tau d\xi+ \\ +\frac{1}{2}\int_0^z\int_0^{t-z} K_0(\tau)v(t-z-\tau+\xi,\lambda,\xi)d\tau d\xi, \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} K_0(t) = -\frac{1}{4}\lambda^4 t + \frac{2i}{\lambda}r''(t) - 2i\lambda\int_0^{\frac{t}{2}} (v_t(t-\xi,\lambda,\xi) + \frac{1}{2}i\lambda\xi K_0(t-2\xi))d\xi- \\ -\frac{2i}{\lambda}\int_0^{\frac{t}{2}}\int_0^{t-2\xi} K_0(\tau)v_t(t-\xi-\tau,\lambda,\xi)d\tau d\xi. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Доказательство леммы 1. Справедливы следующие равенства:

$$v_{tt} - v_{zz} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\right)(v_t + v_z) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right)(v_t - v_z).$$

С учётом этого интегрируем (3.2) вдоль характеристик дифференциальных операторов первого порядка для $(z,t) \in D_T$. Интегрирование вдоль характеристик оператора $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}$ проведем от точки (t,z) до точки $(\frac{z+t}{2}, \frac{z+t}{2})$ на плоскости переменных (ξ,θ). Используя дифференцированное по z равенство (3.3) для подсчёта выражения в виде $(v_t+v_z)(\frac{z+t}{2}, \frac{z+t}{2}) = 0$, получим

$$(v_t+v_z)(t,\lambda,z) = -\frac{1}{2}i\lambda^3 - \int_z^{\frac{z+t}{2}} (-\lambda^2 v(t+z-\xi,\lambda,\xi) + i\lambda K_0(t+z-2\xi))d\xi-$$

$$-\int\limits_{z}^{\frac{z+t}{2}}\int\limits_{0}^{t+z-2\xi} K_0(\tau)v(t+z-\xi-\tau,\lambda,\xi)d\tau d\xi. \tag{3.10}$$

Интегрирование вдоль характеристик оператора $\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}$ проведем от точки $(0,t-z)$ до (t,z). Используя условие (3.4) и дифференцированное по t равенство (3.6), находим

$$\begin{gathered}(v_t-v_z)(t,\lambda,z)=\int\limits_0^z(-\lambda^2v(t+\xi-z,\lambda,\xi)+i\lambda K_0(t-z))d\xi+\\+\int\limits_0^z\int\limits_0^{t-z}K_0(\tau)v(t-z+\xi-\tau,\lambda,\xi)d\tau d\xi+r'(t-z).\end{gathered} \tag{3.11}$$

Из равенств (3.10) и (3.11) легко получить уравнение (3.8). В уравнении (3.8), полагая $z=0$ и используя условие (3.6), находим

$$\begin{gathered}r'(t)=-\frac{1}{4}i\lambda^3+\int_0^{\frac{t}{2}}[\lambda^2v(t-\xi,\lambda,\xi)-i\lambda K_0(t-2\xi)]d\xi-\\-\int\limits_0^{\frac{t}{2}}\int\limits_0^{t-2\xi}K_0(\tau)v(t-\xi-\tau,\lambda,\xi)d\tau d\xi.\end{gathered} \tag{3.12}$$

Дифференцируя это равенство по t, после некоторых выкладок приходим к уравнению (3.9).

При выполнении условий теоремы 1 нетрудно показать, что обратные преобразования тоже имеют место. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 1. Запишем систему уравнений (3.7) – (3.9) в виде операторного уравнения

$$\varphi=A\varphi. \tag{3.13}$$

Здесь

$$\varphi=[\varphi_1(t,\lambda,z),\varphi_2(t,\lambda,z),\varphi_3(t)]^*=[v(t,\lambda,z),v_t(t,\lambda,z)-\frac{1}{2}i\lambda zK_0(t-z),K_0(t)]^*$$

– векторная функция с компонентами φ_i $(i=1,2,3)$, * – знак транспонирования. Оператор A определен на множестве функций $\varphi\in C(D_T)$ и имеет вид $A=(A_1,A_2,A_3)$, где

$$A_1\varphi=-\frac{1}{2}i\lambda^3z+\int\limits_z^t[\varphi_2(\tau,\lambda,z)+\frac{1}{2}i\lambda z\varphi_3(\tau-z)]d\tau,$$

$$A_2\varphi=-\frac{1}{4}i\lambda^3+\frac{1}{2}r'(t-z)+\frac{1}{2}\int\limits_z^{\frac{z+t}{2}}[\lambda^2\varphi_1(t-z-\xi,\lambda,\xi)-i\lambda\varphi_3(t+z-2\xi)-$$

$$-\int\limits_0^{t+z-2\xi}\varphi_3(\tau)\varphi_1(t+z-\tau-\xi,\lambda,\xi)d\tau]d\xi-\frac{1}{2}\int\limits_0^{z}[\lambda^2\varphi_1(t-z+\xi,\lambda,\xi)-$$

$$-\int\limits_0^{t-z}\varphi_3(\tau)\varphi_1(t-z-\tau+\xi,\lambda,\xi)d\tau]d\xi, \qquad (3.14)$$

$$A_3\varphi_3=-\frac{1}{4}\lambda^4 t+\frac{2}{\lambda}ir''(t)-2i\lambda\int\limits_0^{\frac{t}{2}}[\varphi_2(t-\xi,\lambda,\xi)+i\lambda\xi\varphi_3(t-2\xi)]d\xi-$$

$$-\frac{2}{\lambda}i\int\limits_0^{\frac{t}{2}}\int\limits_0^{t-2\xi}\varphi_3(\tau)[\varphi_2(t-\xi-\tau,\lambda,\xi)+\frac{1}{2}i\lambda\xi\varphi_3(t-2\xi-\tau)]d\tau d\xi.$$

Обозначим через $C_\rho(D_T)$ $(\rho\geq 0)$ банахово пространство непрерывных функций с весовой нормой

$$\|\varphi\|_\rho=\max\left\{\sup_{(t,z)\in D_T}|\varphi_i(t,\lambda,z)e^{-\rho t}|\,(i=1,2),\ \sup_{t\in[0,T]}|\varphi_3(t)e^{-\rho t}|\right\}. \qquad (3.15)$$

При $\rho=0$ это пространство является пространством непрерывных функций, норму которого будем обозначать $\|\varphi\|$. Для любого фиксированного $T\in(0,\infty)$ справедливо неравенство

$$e^{-\rho T}\|\varphi\|\leq\|\varphi\|_\rho\leq\|\varphi\|.$$

Пусть $S_\rho(\varphi_0,R)$ – замкнутый шар радиуса R с центром в точке φ_0, где

$$\varphi_0=[\varphi_{01},\varphi_{02},\varphi_{03}]^*=\left[-\frac{1}{2}i\lambda^3 z,\frac{1}{4}i\lambda^3+\frac{1}{2}r'(t-z),-\frac{1}{4}\lambda^4 t+\frac{2}{\lambda}ir''(t)\right]^*.$$

Справедливо следующее неравенство для $\varphi\in S_\rho(\varphi_0,R)$:

$$\|\varphi\|_\rho\leq R_0:=\|\varphi_0\|+R.$$

Пусть $\varphi\in S_\rho(\varphi_0,R)$. Покажем, что при подходящем выборе $\rho>0$ оператор A отображает шар в себя, т.е. $A\varphi\in S_\rho(\varphi_0,R)$. С помощью равенств (3.14), составляя норму разностей, для $(z,t)\in D_T$ получаем

$$\|A\varphi-\varphi_0\|_\rho=\max\left\{\sup_{(t,z)\in D_T}|(A_i\varphi-\varphi_{0i})e^{-\rho t}|\,(i=1,2),\ \sup_{t\in[0,T]}|(A_3\varphi-\varphi_{03})e^{-\rho t}|\right\}\leq$$

$$\leq\frac{1}{\rho}\max\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\},$$

где

$$\alpha_1:=R_0\left(1+\frac{1}{4}T|\lambda|\right),$$

$$\alpha_2 := R_0\left(\frac{4\lambda^2 + |\lambda| + 5T}{4}\right),$$

$$\alpha_3 := R_0\left[2|\lambda| + \frac{1}{2}\lambda^2 T + \frac{2}{|\lambda|}R_0 T + \frac{1}{4}R_0 T^2\right].$$

Выбирая $\rho \geq \alpha_0 := (1/R)\max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, получаем, что A переводит шар $S_\rho(\varphi_0, R)$ в шар $S_\rho(\varphi_0, R)$.

Пусть φ^1, φ^2 – любые два элемента из $S_\rho(\varphi_0, R)$. Используя вспомогательные неравенства

$$|\varphi_i^1\varphi_j^1|e^{-\rho t} \leq |\varphi_i^1||\varphi_j^1 - \varphi_j^2|e^{-\rho t} + |\varphi_j^2||\varphi_i^1 - \varphi_i^2|e^{-\rho t} \leq 2R_0\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\rho, (z,t) \in D_T,$$

получим

$$\|A\varphi^1 - A\varphi^2\|_\rho = \max\left\{\sup_{(z,t)\in D_T}|(A\varphi^1 - A\varphi^2)_i e^{-\rho t}|\,(i=1,2), \sup_{t\in[0,T]}|(A\varphi^1 - A\varphi^2)_3 e^{-\rho t}|\right\} \leq$$
$$\leq \frac{1}{\rho}\max\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}\|\varphi^1 - \varphi^2\|_\rho,$$

где

$$\beta_1 := 1 + \frac{T|\lambda|}{4},$$

$$\beta_2 := \frac{1}{4}(4\lambda^2 + |\lambda| + 10TR_0),$$

$$\beta_3 := 2|\lambda| + \frac{1}{2}\lambda^2 T + \frac{4}{|\lambda|}R_0 T + \frac{1}{4}R_0 T^2.$$

Пусть $\beta_0 := \max\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$. Если число ρ выбрано из условия $\rho > \max\{\alpha_0, \beta_0\}$, то оператор A будет сжимающим на $S_\rho(\varphi_0, R)$. Тогда, по принципу Банаха, уравнение (3.13) имеет единственное решение в $S_\rho(\varphi_0, R)$ при любом фиксированном $T > 0$. Теорема 1 доказана. □

4. Задача определения функций K_1 и $\tilde{u}_1$

Функции K_0 и $\tilde{u}_0$ будем считать известными. Для нахождения K_1 и $\tilde{u}_1$ исследуем задачу (2.12)–(2.14) при $n = 1$. При этом, учитывая представление $\tilde{u}_0$ в виде (3.1), получаем

$$\begin{gathered}\tilde{u}_{1tt} - \tilde{u}_{1zz} + \lambda^2\tilde{u}_1 = -K_1(t-z) + \int\limits_0^{t-z} K_0(\tau)\tilde{u}_1(t-\tau, \lambda, z)d\tau + \\ +i\int\limits_0^{t-z} K_1(\tau)v_\lambda(t-\tau, \lambda, z)d\tau, (z,t) \in D_T, \lambda \in \mathbb{R},\end{gathered} \tag{4.1}$$

$$\tilde{u}_1|_{z=0} = \tilde{g}_1(t, \lambda),\ \ \tilde{u}_{1z}|_{z=0} = 0, t \in [0,T], \lambda \in \mathbb{R}, \tag{4.2}$$

$$\tilde{u}_1|_{t=z} = 0. \tag{4.3}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия согласования $\tilde{g}_1(0,\lambda) = 0$, $\tilde{g}_{1t}(0,\lambda) = 0$ и $\tilde{g}_1(t,\lambda) \in C^2[0,T]$ при фиксированном действительном λ. Тогда существует единственное решение задачи (4.1)–(4.3) K_1 из класса непрерывных функций $C[0,T]$ для любого фиксированного $T > 0$.*

Доказательство. Заметим, что неизвестные функции входят в уравнение (4.1) линейным образом. Заменим систему равенств (4.1)–(4.3) эквивалентными интегральными уравнениями. С помощью формулы Даламбера из (4.1), (4.2) вытекает уравнение

$$\tilde{u}_1(t,\lambda,z) = \frac{1}{2}\Big[\tilde{g}_1(t-z,\lambda) + \tilde{g}_1(t+z,\lambda)\Big] + \frac{1}{2}\int\limits_0^z \int\limits_{t-z+\xi}^{t+z-\xi} \Big(-\lambda^2 \tilde{u}_1(\tau,\lambda,\xi) - K_1(\tau-\xi) +$$

$$+ \int\limits_0^{\tau-\xi} K_0(\alpha)\tilde{u}_1(\tau-\alpha,\lambda,\xi)d\alpha + i\int\limits_0^{\tau-\xi} K_1(\alpha)v_\lambda(\tau-\alpha,\lambda,\xi)d\alpha\Big)d\tau d\xi. \tag{4.4}$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $t \to z+0$, с учётом условий (4.3) и $\tilde{g}_1(0,\lambda) = 0$, находим

$$-\tilde{g}_1(2z,\lambda) = \int\limits_0^z \int\limits_\xi^{2z-\xi} \Big[-\lambda^2\tilde{u}_1(\tau,\lambda,\xi) - K_1(\tau-\xi) + \int\limits_0^{\tau-\xi} K_0(\alpha)\tilde{u}_1(\tau-\alpha,\lambda,\xi)d\alpha +$$

$$+ i\int\limits_0^{\tau-\xi} K_1(\alpha)v_\lambda(\tau-\alpha,\lambda,\xi)d\alpha\Big]d\tau d\xi. \tag{4.5}$$

Для получения интегрального уравнения относительно $K_1(t)$ дифференцируем два раза по t уравнение (4.5). Используя равенства (3.3), (4.3) и производя замену $2z$ на t, находим

$$K_1(t) = 4\tilde{g}_{1tt}(t,\lambda) + \int\limits_0^{\frac{t}{2}} \Big[-2\lambda^2\tilde{u}_{1t}(t-\xi,\lambda,\xi) + 3i\lambda^2 K_1(t-2\xi)\xi +$$

$$+2\int\limits_0^{t-2\xi} \Big(K_0(\alpha)\tilde{u}_{1t}(t-\xi-\alpha,\lambda,\xi) + iK_1(\alpha)v_{\lambda t}(t-\xi-\alpha,\lambda,\xi)\Big)d\alpha\Big]d\xi. \tag{4.6}$$

Воспользуемся равенством (4.4) для вычисления $\tilde{u}_{1t}$:

$$\tilde{u}_{1t}(t,\lambda,z) = \frac{1}{2}\Big[\tilde{g}_{1t}(t-z,\lambda) + \tilde{g}_{1t}(t+z,\lambda)\Big] -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^z\Bigg[\lambda^2\Big(\tilde{u}_1(t+z-\xi,\lambda,\xi)+\tilde{u}_1(t-z+\xi,\lambda,\xi)\Big)++K_1(t+z-2\xi)+K_1(t-z)-$$

$$-\int\limits_0^{t-z}\Big(K_0(\alpha)\tilde{u}_1(t-z+\xi-\alpha,\lambda,\xi)+iK_1(\alpha)v_\lambda(t-z+\xi-\alpha,\lambda,\xi)\Big)d\alpha-$$

$$-\int\limits_0^{t+z-2\xi}\Big(K_0(\alpha)\tilde{u}_1(t+z-\xi-\alpha,\lambda,\xi)+iK_1(\alpha)v_\lambda(t+z-\xi-\alpha,\lambda,\xi)\Big)d\alpha\Bigg]d\xi. \quad (4.7)$$

Система интегральных уравнений (4.4), (4.6), (4.7) есть вольтерровская система линейных интегральных уравнений второго рода, замкнутая в D_T относительно функций $\tilde{u}_1$, K_1, $\tilde{u}_{1t}$, в том смысле, что значения указанных функций при $(z,t)\in D_T$ для фиксированного λ выражаются через интегралы от некоторых комбинаций этих же функций по отрезкам, лежащим в D_T. В силу теорем Пэли–Винера [8] образ Фурье функции u_0 есть аналитическая функция по переменной преобразования. Следовательно, функция v как регулярная часть образа Фурье u_0 обладает таким же свойством. В силу соображений, приведенных в §3, входящие в систему уравнений (4.4), (4.6), (4.7) функции K_0, v_λ, $v_{\lambda t}$ являются непрерывными функциями в области D_T при фиксированном λ. Пусть

$$c_0:=\max\{\|K_0\|,\ \|v_\lambda\|,\ \|v_{\lambda t}\|\}$$

для фиксированного λ. Для удобства, вводя обозначение

$$\psi:=[\psi_1(t,\lambda,z),\ \psi_2(t),\ \psi_3(t,\lambda,z)]^*:=$$

$$:=\left[\tilde{u}_1(t,\lambda,z),\ K_1(t),\ \tilde{u}_{1t}(t,\lambda,z)+\frac{1}{2}K_1(t-z)z\right]^*,$$

запишем систему (4.4), (4.6), (4.7) в виде операторного уравнения

$$\psi=B\psi. \quad (4.8)$$

Здесь оператор B определен на множестве функций $\psi\in C\,(D_T)$ и $B=(B_1,\ B_2,\ B_3)$, где

$$B_1\psi=\psi_{01}(t,\lambda,z)+\frac{1}{2}\int\limits_0^z\int\limits_{t-z+\xi}^{t+z-\xi}\Bigg(-\lambda^2\psi_1(\tau,\lambda,\xi)-\psi_2(\tau-\xi)+$$

$$+\int\limits_0^{\tau-\xi}K_0(\alpha)\psi_1(\tau-\alpha,\lambda,\xi)d\alpha+i\int\limits_0^{\tau-\xi}v_\lambda(\tau-\alpha,\lambda,\xi)\psi_2(\alpha)d\alpha\Bigg)d\tau d\xi,$$

$$B_2\psi=\psi_{01}(t,\lambda)+\int\limits_0^{\frac{t}{2}}\Bigg[-2\lambda^2\left(\psi_3(t-\xi,\lambda,\xi)-\frac{1}{2}\psi_2(t-2\xi)\xi\right)+3i\lambda^2\psi_2(t-2\xi)\xi+$$

$$+2\int_0^{t-2\xi}\Bigg(K_0(\alpha)\left(\psi_3(t-\xi-\alpha,\lambda,\xi)-\frac{1}{2}\psi_2(t-2\xi-\alpha)\xi\right)+$$

$$+iv_{\lambda t}(t-\xi-\alpha,\lambda,\xi)\psi_2(\alpha)\Bigg)d\alpha\Bigg]d\xi, \tag{4.9}$$

$$B_3\psi=\psi_{03}(t,\lambda,z)-\frac{1}{2}\int_0^z\Bigg[\lambda^2\Big(\psi_1(t+z-\xi,\lambda,\xi)+\psi_1(t-z+\xi,\lambda,\xi)\Big)+$$

$$+\psi_2(t+z-2\xi)-\int_0^{t-z}\Big(K_0(\alpha)\psi_1(t-z+\xi-\alpha,\lambda,\xi)+iv_\lambda(t-z+\xi-\alpha,\lambda,\xi)\psi_2(\alpha)\Big)d\alpha-$$

$$-\int_0^{t+z-2\xi}\Big(K_0(\alpha)\psi_1(t+z-\xi-\alpha,\lambda,\xi)+iv_\lambda(t+z-\xi-\alpha,\lambda,\xi)\psi_2(\alpha)\Big)d\alpha\Bigg]d\xi.$$

В этих равенствах введено обозначение

$$\psi_0=[\psi_{01},\ \psi_{02},\ \psi_{03}]^*:=$$

$$:=\left[\frac{1}{2}\Big(\tilde g_1(t-z,\lambda)+\tilde g_1(t+z,\lambda)\Big),\ 4\tilde g_{1tt}(t,\lambda),\ \frac{1}{2}\Big(\tilde g_{1t}(t-z,\lambda)+\tilde g_{1t}(t+z,\lambda)\Big)\right]^*.$$

Как и в предыдущем параграфе, рассмотрим в $C_\sigma(D_T)(\sigma\geq 0)$ замкнутый шар $S_\sigma(\psi_0,Q)$ радиуса Q с центром а точке ψ_0. Справедливо неравенство $\|\psi\|_\sigma\leq Q_0:=\|\psi_0\|+Q$ (Q_0 – известное число) для $\psi\in S_\sigma(\psi_0,Q)$. Пусть $\psi\in S_\sigma(\psi_0,Q)$. Покажем, что при подходящем выборе $\sigma>0$ оператор B отображает шар в себя, т.е. $B\psi\in S_\sigma(\psi_0,Q)$. Используя весовую норму (3.15), для $(z,t)\in D_T$ из (4.9) имеем

$$\|B\psi-\psi_0\|_\sigma=\max\left\{\sup_{(z,t)\in D_T}|(B_i\psi-\psi_{0i})e^{-\rho t}|\,(i=1,3),\ \sup_{t\in[0,T]}|(B_2\psi-\psi_{02})e^{-\rho t}|\right\}\leq$$

$$\leq\frac{1}{\sigma}\max\{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\},$$

где

$$\gamma_1:=\frac{TQ_0}{4}\Big(1+\lambda^2+2c_0T\Big),$$

$$\gamma_2:=Q_0\left[2\lambda^2+\left(2+\frac{T}{4}\right)\left(\lambda^2+2c_0T\right)\right],$$

$$\gamma_3:=\frac{Q_0}{2}\left(1+2\lambda^2+2c_0T\right).$$

Выбирая $\sigma \geq \gamma_0 := (1/Q)\max\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$, заключаем, что B отображает шар $S_\sigma(\psi_0, Q)$ в шар $S_\sigma(\psi_0, Q)$. Более того, из проделанных оценок, в силу линейности уравнения (4.8), для ψ^1, $\psi^2 \in S_\sigma(\psi_0, Q)$ следует неравенство

$$\left\|B\psi^1 - B\psi^2\right\|_\sigma \leq \frac{\gamma_0}{\sigma}\left\|\psi^1 - \psi^2\right\|_\sigma,$$

т.е оператор B будет на $S_\sigma(\psi_0, Q)$ сжимающим. Тогда в силу теоремы С. Банаха [9] в $S_\sigma(\psi_0, Q)$ существует – и притом только одно – решение уравнения (4.8). Следовательно, решая систему уравнений (4.4), (4.6), (4.7), например, методом последовательных приближений, мы однозначно построим в области D_T функции $\tilde{u}_1$, K_1, $\tilde{u}_{1t}$. Тем самым определяется функция K_1 на отрезке $[0,\ T]$, а функция $\tilde{u}_1$ – в области D_T для любого фиксированного $T > 0$. Теорема 2 доказана. $\square$

Список литературы

[1] В. Г. Романов, *Обратные задачи математической физики*, Наука, М., 1984.

[2] В. Г. Романов, *Устойчивость в обратных задачах*, Научный мир, М., 2005.

[3] С. И. Кабанихин, *Обратные и некорреткные задачи*, Новосибирск, 2009.

[4] Д. К. Дурдиев, “Многомерная обратная задача для уравнения с памятью”, *Сиб. матем. журн.*, **35**:3 (1994), 574–582.

[5] D. K. Durdiev, “Some multidimensional inverse problems of memory determination in hyperbolic equations”, *Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom.*, **3**:4 (2007), 411–423.

[6] А. С. Благовещенский, Д. А. Федоренко, “Уравнения акустики в слабо горизонтально-неоднородной среде”, *Записки научных семинаров ПОМИ*, **354** (2008), 81–99.

[7] Р. Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, М., 1964.

[8] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики.* Т. 2, Мир, М., 1978.

[9] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1976.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 9 апреля 2013 г.

Durdiev D. K., Bozorov Z. R. A problem of determining the kernel of integrodifferential wave equation with weak horizontal properties. Far Eastern Mathematical Journal. 2013. V. 13. № 2. P. 209–221.

ABSTRACT

An inverse problem of determining the two-dimensional kernel of integro-differential wave equation in medium of weak horizontal properties is considered. Herein the initial data are equal to zero. The boundary condition of Neyman type is given at the boundary of semi-plane is an impulse function. As an additional information the semi-plane line mode is given. It is assumed that the unknown kernel has the form of $K(t) = K_0(t) + \varepsilon x K_1(t) + \dots$, where ε is a small parameter. In the work, the method of finding K_0, K_1 with precision correction, having the order $O(\varepsilon^2)$ is developed. For this, by Fourier transformation the problem is brought to the sequence of two one-dimensional inverse problems of determining K_0, K_1. The first inverse problem for K_0 is reduced to the system of nonlinear integral equations of Volterra type relative to the unknown functions, and the second being brought to the system of linear integral equations. Theorems that characterize the unique solvability of determining unknown functions for any fixed intercept are proved.

Key words: *wave equation, inverse problem, delta function, Fourier transformation, integral equation.*