Дальневосточный математический журнал. 2013. Том 13. № 2. С. 250–272

УДК 517.95 + 519.633
MSC2010 35K59, 65N30

© А. Г. Подгаев, К. В. Лисенков[1]

Разрешимость квазилинейного параболического уравнения в области с кусочно-монотонной границей

Исследуется существование регулярных решений для квазилинейного параболического уравнения в нецилиндрической области с границей класса W_2^1. Приближенные решения строятся проекционным методом с использованием семейства проекторов зависящих от временного параметра. Доказывается, что некоторый предел этих решений будет решением задачи. Для обоснования существования предела используются методы компактности функций из шкалы банаховых пространств.

Ключевые слова: *квазилинейное параболическое уравнение, нецилиндрическая область, теорема компактности.*

1. Введение

В отличие от наиболее распространенного метода решения квазилинейного параболического уравнения в нецилиндрических областях – метода замены переменных – предлагается проекционный метод решения без замены переменных. Обычно он не используется, так как затруднен необходимостью рассмотрения семейств проекторов и банаховых пространств, зависящих от временного параметра, доказательств различных теорем о плотности, а для нелинейных уравнений – использованием специальных теорем компактности для пространств абстрактных функций со значениями в шкалах.

Подобная задача рассматривалась в [1], близкие результаты получены в [2].

Здесь исследуется случай, в котором граница немонотонна, допускается вырождение уравнения. Одна из компонент границы предполагается стационарной.

Первые исследования разрешимости первой краевой задачи для одномерного уравнения теплопроводности в нецилиндрической области с нелипшицевой границей принадлежат И.Г. Петровскому [3]. В работе [4] исследовалась начально-краевая задача для параболических квазилинейных уравнений $(2m)$ порядка, с

[1]Тихоокеанский государственный университет, 680035, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136. Электронная почта: `pvu1701@mail.ru, lisenkov_kirill@mail.ru`

гладкой криволинейной границей. В работе [5] исследовались существование и единственность решения смешанной задачи в нецилиндрической области. В работе [13] рассматривалось обобщенное линейное параболическое уравнение в области, зависящей от времени; описывается класс приближений типа Галеркина, которые на каждом шаге непрерывны по пространственным переменным, но разрывны по времени.

В работе [9] излагалось применение метода вырожденных гипергеометрических преобразований к решению одной нестационарной задачи с фазовым переходом для уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентом температуропроводности на примере процесса промерзания некоторой сплошной среды. В работе [10] методами теории потенциала проводилось исследование параболических уравнений порядка $2p$ в нецилиндрических областях с границами класса Гельдера C^{α}, $\alpha > \frac{1}{2}$ в классе решений $C_{x,t}^{2p-1+\alpha,\frac{2p-1+\alpha}{2}}$, не имеющих старших производных. В работе [11] рассматривалась задача для уравнения теплопроводности, возникающая при рассмотрении процесса таяния тонкой палочки льда. Исходная задача сводится к абстрактной задаче Коши и решается методами теории полугрупп.

В работах [6], [7] исследовались гиперболические уравнения в нецилиндрических областях. В работе [8] методами вариационных неравенств исследовались существование и единственность обобщенного решения первой начально-краевой задачи для некоторого класса квазилинейных псевдопараболических уравнений в нецилиндрических областях. Многие работы посвящены не теоремам существования, а другим проблемам, связанным с нецилиндричностью области. В частности, в работе [12] анализировалась сходимость разрывного метода Галеркина (DGM) для линейного уравнения Шрёдингера в нецилиндрической области (используется замена переменных для сведения задачи к цилиндрической области).

В работе [14] давалось обоснование метода Галеркина для построения приближенного решения волнового уравнения в области с подвижными границами, оценивается скорость сходимости (используется замена переменных для сведения задачи к цилиндрической области). В работе [15] разработана математическая модель для расчета динамики роста снежно-ледового покрова в водоемах с различной степенью минерализации. Для решения использовался метод спрямления фронта, позволяющий решать уравнения в двух регулярных областях, соответствующих жидкой и твердой фазам вещества. В работе [16] применялся обобщенный метод интегральных соотношений для решения задачи закачки газа через галерею в ограниченный горизонтальный водоносный пласт.

2. Постановка задачи и формулировка результата

Пусть $T \in (0,\infty)$ — заданное число, $x = s(t)$ — заданная функция, определенная на отрезке $[0,T]$ такая, что

$$s \in W_2^1(0,T);\ \ s(0) = 1; s(t) > 0,\ \ t \in [0,T), \tag{1}$$

отрезок $[0,T]$ можно разбить на конечное число интервалов, на каждом из которых $s'(t) \geq 0$ п.в. либо $s'(t) \leq 0$ п.в. Случай $s(T) = 0$ допустим.

Пусть $\overline{Q}_s$ — замкнутая ограниченная область, заключенная между прямыми $x = 0,\ t = 0,\ t = T$ и графиком функции $x = s(t)$.

В области $\overline{Q}_s$ рассмотрим начально-краевую задачу

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\left(u_x\right)\right) + a(x,t)u_x + b(x,t)u,\ (x,t) \in Q_s, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in [0,1], \tag{3}$$

$$\varphi(u_x)|_{x=0} = 0,\ t \in [0,T], \tag{4}$$

$$u|_{x=s(t)} = 0,\ t \in [0,T]. \tag{5}$$

Здесь $\varphi(\xi) \geq 0$ — заданная непрерывная функция с производной $\varphi'(\xi)$ и первообразной $\Phi(\xi) = \int\limits_0^\xi \varphi(\eta)\,d\eta$; без ограничения общности будем считать, что $\varphi(0) = 0$. Заданная функция $u_0 = u_0(x)$ такая, что

$$u_0 \in W_2^1(0,1),\ u_0(1) = 0, \tag{6}$$

а заданные функции $a = a(x,t),\ b = b(x,t)$ таковы, что

$$a, b \in L_\infty(Q_s),\ |a| \leq c_a,\ |b| \leq c_b,\ |b_x| \leq c_{b_x}, \tag{7}$$

$$|a_x| \leq c_{a_x},\ a(0,t) = 0. \tag{8}$$

Определим при каждом $t \in [0,T)$

$$\tilde{W}_p^1(0,s(t)) = \{v \in W_p^1(0,s(t)) : v(s(t)) = 0\},$$

а под $L_p(0,T;W_q^1(0,s(t)))$ понимаем пространство абстрактных функций со значениями $u(t,\cdot) \in W_q^1(0,s(t))$ и нормой (см. [17])

$$\|u\|_{L_p(0,T;W_q^1(0,s(t)))} = \|\|u\|_{W_q^1(0,s(t))}\|_{L_p(0,T)}.$$

Теорема 1. *Пусть выполнено (1), (7), функция* $\psi(\xi) = \int\limits_0^\xi \sqrt{\varphi'(\eta)}d\eta$ *имеет обратную функцию и существуют константы* $\delta > 0, c_0 > 0, c_3 > 0, k_4, k_5, q \geq 2, c_1, c_2, c_5, c_6, c_7$ *такие, что*

1) $\varphi'(\xi) \leq c_1\Phi(\xi) + c_2$ *для всех* $\xi \in R$; $c_0\xi^2 \leq \varphi'(\xi)$ *при* $|\xi| < c_3$, $\delta|\xi|^\beta \leq \varphi'(\xi)$ *при* $|\xi| \geq c_3$ *для для некоторой* $0 < \beta < 2$ *(возможен случай* $c_3 = +\infty$*);*

2) $\Phi(\xi) \leq k_4 + k_5|\xi|^q$ *для всех* $\xi \in R$*;*

3) $\varphi'(\xi)\xi^2 \leq c_5\Phi(\xi) + c_6\xi^2 + c_7$ *для всех* $\xi \in R$*;*

4) *функция* $u_0 = u_0(x)$ *удовлетворяет (6) и* $u_{0x} \in L_q(0,1)$*.*

Тогда существует решение задачи (2)-(5) из класса

$$u \in C^{\frac{1}{4}}(\overline{Q}_s) \cap L_\infty\left(0, T; \tilde{W}_2^1(0, s(t))\right), \; u_t \in L_2(Q_s),$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\left(u_x\right)\right) \in L_2(Q_s), \; \varphi(u_x) \in L_2(Q_s).$$

Замечание. При дополнительном условии (8) решение задачи из этого класса единственно. Без ограничения общности считаем, что $c_1, c_2, k_4, k_5, c_5, c_6, c_7$ неотрицательны. Из условия 1 теоремы 1 следует, что $\varphi'(\xi) \geq \delta|c_3|^\beta = \delta_1$ при $|\xi| \geq c_3$.

Следующие функции $\varphi(\xi)$ удовлетворяют условиям теоремы

$$\varphi(\xi) = |\xi|\xi + \mathrm{arctg}(\xi),$$

$$\varphi(\xi) = |\xi|^p\xi, \; 0 < p \leq 2,$$

$$\varphi(\xi) = (|\xi|^{p_1} + |\xi|^{p_2})\xi, \; 0 < p_i \leq 2, \; i = 1, 2, \; p_1^2 + p_2^2 > 0, \; \beta \leq \min(p_1, p_2)$$

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} \frac{\nu}{p+1}|\xi|^p\xi, |\xi| < 1, 0 \leq p \leq 2, \\ \frac{\mu}{r+1}|\xi|^r\xi - \frac{\mu}{r+1} + \frac{\nu}{p+1}, |\xi| \geq 1, 0 < r < 2, r \leq q - 2. \end{cases}$$

3. Построение приближенного решения

Пусть $\{\omega_k(x, t)\}, \; k = 0, 1, 2, \ldots$ — ортогональный базис в $L_2(0, s(t))$ и в $\tilde{W}_2^1(0, s(t))$, состоящий из собственных функций задачи $\omega_{kxx}(x, t) = \lambda_k(t)\omega_k(x, t), \; \omega_k(s(t), t) = 0, \; \omega_{kx}(0, t) = 0$.

Очевидно, что $w_k(x, t) = \sqrt{2}\cos\left(\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)\frac{x}{s(t)}\right)$, $(\omega_k, \omega_j)_{L_2(0, s(t))} = s(t)\delta_k^j$.

Приближенное решение задачи (2)–(5) будем искать в виде

$$u^m(x, t) = \sum_{k=0}^{m} c_k^m(t)\omega_k(x, t),$$

где $c_k^m(t)$ определяются из уравнений

$$\int_0^{s(t)} u_t^m \omega_j \; dx + \int_0^{s(t)} \varphi\left(u_x^m\right)\omega_{jx} \; dx - \int_0^{s(t)} a u_x^m \omega_j \; dx - \int_0^{s(t)} b u^m \omega_j \; dx = 0, \; j = \overline{0, m}. \tag{9}$$

Дополним их начальными условиями

$$c_j^m(0) = \overline{c}_j^m, \; j = \overline{0, m}, \tag{10}$$

исходя из требования $u^m(x, 0) = \sum\limits_{k=0}^{m} c_k^m(0)\omega_k(x, 0) \overset{\text{def}}{=} u_0^m(x) \to u_0(x)$ в $\tilde{W}_2^1(0, 1) \cap W_q^1(0, 1)$.

Для непрерывных a, b и s' разрешимость системы (9)–(10) на отрезке $[0, T]$ в классе $W_2^1[0, T]$ следует из эволюционного аналога леммы "об остром угле" [18]. Для a, b ограниченных (не обязательно непрерывных) или из класса L_2, $s \in W_2^1(0, T)$ (s' входит в первое слагаемое правой части (9)) также нетрудно установить разрешимость системы (9)–(10) в указанном выше классе, см. [1].

4. Оценка производных по x у приближенного решения

Умножим (9) на $c_j^m(t)\lambda_j(t)$ и просуммируем по j от 0 до m, получим тождество

$$\int\limits_0^{s(t)} u_t^m u_{xx}^m \, dx - \int\limits_0^{s(t)} \varphi'\left(u_x^m\right)\left(u_{xx}^m\right)^2 \, dx - \int\limits_0^{s(t)} a u_x^m u_{xx}^m \, dx - \int\limits_0^{s(t)} b u^m u_{xx}^m \, dx = 0. \tag{11}$$

Из условия 1 теоремы 1 следует, что для любых m функция $\varphi'(u_x^m)$ ограничена как функция переменных (x, t), поэтому второй интеграл в (11) имеет смысл. Из условия $s \in W_2^1$ следует, что $u_t^m \in L_2$ и первый интеграл определен.

Дифференцируя тождество $u^m(s(t), t) = 0$ по t, получим

$$u_t^m(s(t), t) = -s'(t) u_x^m(s(t), t). \tag{12}$$

Из теоремы вложения $W_2^1(0, T) \subset C^{\frac{1}{2}}[0, T]$ следует, что $|s(t)| \le c\|s\|_{W_2^1(0,T)}$. В дальнейшем используются следующие неравенства:

$$s(t) = \int\limits_0^t s'(\tau) d\tau + 1 \le \sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)} + 1, \tag{13}$$

$$|u^m| \le \left|\int\limits_x^{s(t)} u_x^m dx\right| \le \sqrt{s(t)\int\limits_0^{s(t)} (u_x^m)^2 dx} \le (\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)} + 1)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\int\limits_0^{s(t)} (u_x^m)^2 dx}. \tag{14}$$

Для преобразования первого слагаемого (11) учтем нецилиндричность Q_s и (12), поэтому, применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int\limits_0^{s(t)} u_t^m u_{xx}^m \, dx = -s'(t)(u_x^m(s(t), t))^2 - \frac{1}{2}\int\limits_0^{s(t)} \frac{\partial}{\partial t}(u_x^m)^2 \, dx = -s'(t)(u_x^m(s(t), t))^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^{s(t)} (u_x^m)^2 \, dx + \frac{1}{2}s'(t)(u_x^m(s(t), t))^2 = -\frac{1}{2}s'(t)(u_x^m(s(t), t))^2 - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^{s(t)} (u_x^m)^2 \, dx.$$

Для преобразования третьего слагаемого (11) используем (7), неравенство Коши с ε, (13) и условие 1 теоремы 1, замечание к теореме

$$\left|\int\limits_0^{s(t)} a u_x^m u_{xx}^m\,dx\right| \le c_a \int\limits_0^{s(t)} \frac{|u_x^m|}{\sqrt{\varphi'(u_x^m)}}\sqrt{\varphi'(u_x^m)}|u_{xx}^m|dx \le c_a\left(\int\limits_0^{s(t)}\frac{|u_x^{m2}|}{\varphi'(u_x^m)}dx\right)^{\frac12}\times$$

$$\times\left(\int\limits_0^{s(t)}\varphi'(u_x^m)u_{xx}^{m\,2}dx\right)^{\frac12} = c_a\left(\int\limits_{|u_x^m|<c_3}\frac{|u_x^{m2}|}{\varphi'(u_x^m)}dx + \int\limits_{|u_x^m|\ge c_3}\frac{|u_x^{m2}|}{\varphi'(u_x^m)}dx\right)^{\frac12}\left(\int\limits_0^{s(t)}\varphi'(u_x^m)u_{xx}^{m\,2}dx\right)^{\frac12}\le$$

$$\le c_a\left(\frac{1}{c_0}\int\limits_{|u_x^m|<c_3}1dx + \frac{1}{\delta_1}\int\limits_{|u_x^m|\ge c_3}u_x^{m2}dx\right)^{\frac12}\left(\int\limits_0^{s(t)}\varphi'(u_x^m)u_{xx}^{m\,2}dx\right)^{\frac12}\le$$

$$\le \frac{c_a}{4\varepsilon_1}\left(\frac{s(t)}{c_0}+\frac{1}{\delta_1}\int\limits_0^{s(t)}u_x^{m2}dx\right) + c_a\varepsilon_1\int\limits_0^{s(t)}\varphi'(u_x^m)u_{xx}^{m\,2}dx.$$

Во второй и третьей строке последнего неравенства предполагается, что в слагаемых $x \le s(t)$. Для случая $c_3 = +\infty$ эти две строки пропускаются и в последнем выражении слагаемого с δ_1 не будет.

Для оценки четвертого слагаемого используем (13), (14), неравенство Коши с ε и неравенство Гельдера

$$\left|\int\limits_0^{s(t)} b u^m u_{xx}^m\,dx\right| \le \left(\frac{c_{b_x}}{2}\left((\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)}+1)^2+1\right)+c_b\right)\int\limits_0^{s(t)}(u_x^m)^2dx.$$

В итоге получим

$$\frac12\frac{d}{dt}\int\limits_0^{s(t)}(u_x^m)^2\,dx \le \frac12\frac{d}{dt}\int\limits_0^{s(t)}(u_x^m)^2\,dx + (1-c_a\varepsilon_1)\int\limits_0^{s(t)}\varphi'(u_x^m)(u_{xx}^m)^2dx\le$$

$$\le\left(\frac{c_{b_x}}{2}\left((\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)}+1)^2+1\right)+c_b\right)\int\limits_0^{s(t)}(u_x^m)^2dx + \frac{c_a}{4\varepsilon_1}\left(\frac{s(t)}{c_0}+\frac{1}{\delta_1}\int\limits_0^{s(t)}u_x^{m2}dx\right)+$$

$$+\frac12|s'(t)|(u_x^m(s(t),t))^2.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по t:

$$\tfrac12\int\limits_0^{s(t)}(u_x^m)^2\,dx + (1-c_a\varepsilon_1)\int\limits_0^t\int\limits_0^{s(\tau)}\varphi'(u_x^m)(u_{xx}^m)^2dxd\tau\le$$

$$\le\tfrac12\int\limits_0^1(u_x^m(x,0))^2dx + \left(\tfrac{c_{b_x}}{2}\left((\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)}+1)^2+1\right)+c_b\right)\int\limits_0^t\int\limits_0^{s(\tau)}(u_x^m)^2dxd\tau+$$

$$+\tfrac{c_a}{4\varepsilon_1}\int\limits_0^t\left(\tfrac{s(\tau)}{c_0}+\tfrac{1}{\delta_1}\int\limits_0^{s(\tau)}u_x^{m2}dx\right)d\tau + \tfrac12\int\limits_0^t|s'(\tau)|\,(u_x^m(s(\tau),\tau))^2d\tau.$$

Оценим последнее слагаемое в правой части последнего неравенства (используем условие 1 теоремы 1, неравенство Гельдера, (13), неравенство Коши с ε) и представление $(u_x^m(s(\tau),\tau)))^2 = \int\limits_0^{s(\tau)} \frac{\partial}{\partial x}(u_x^m(\xi,\tau))^2 d\xi = 2\int\limits_0^{s(\tau)} u_x^m(\xi,\tau)u_{xx}^m(\xi,\tau)d\xi$. Действуя по аналогии с преобразованием третьего слагаемого (11), получим

$$\left|\int\limits_0^t s'(\tau)(u_x^m(s(\tau),\tau))^2 d\tau\right| \le 2\|s'\|_{L_2(0,T)} \left(\int\limits_0^t \left(\int\limits_0^{s(\tau)} u_x^m u_{xx}^m\right)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le 2\|s'\|_{L_2(0,T)} \left(\int\limits_0^t \left(\left(\frac{s(\tau)}{c_0} + \frac{1}{\delta}\int\limits_0^{s(\tau)} |u_x^m|^{2-\beta}dx\right)\int\limits_0^{s(t)} \varphi'(u_x^m)(u_{xx}^m)^2 dx\right) d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Определим $y_\beta(\tau) = \int\limits_0^{s(\tau)} |u_x^m|^{2-\beta}dx \le \max\limits_{\nu\le\tau} y_\beta(\nu) = Y_\beta(\tau) \le Y_\beta(t),\ \tau \le t$, тогда

$$\left|\int\limits_0^t s'(\tau)(u_x^m(s(\tau),\tau))^2 d\tau\right| \le$$

$$\le 2\|s'\|_{L_2(0,T)} \left(\frac{\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)}+1}{c_0} + \frac{1}{\delta}Y_\beta(t)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^t\int\limits_0^{s(t)} \varphi'(u_x^m)(u_{xx}^m)^2 dx\ d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \frac{\|s'\|^2_{L_2(0,T)}}{\varepsilon_2} \left(\frac{\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)}+1}{c_0} + \frac{1}{\delta}Y_\beta(t)\right) + \varepsilon_2 \left(\int\limits_0^t\int\limits_0^{s(t)} \varphi'(u_x^m)(u_{xx}^m)^2 dx\ d\tau\right).$$

В итоге получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{s(t)} (u_x^m)^2\ dx + (1 - c_a\varepsilon_1 - \tfrac{\varepsilon_2}{2})\int\limits_0^t\int\limits_0^{s(\tau)} \varphi'(u_x^m)(u_{xx}^m)^2 dxd\tau \le$$
$$\le \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (u_x^m(x,0))^2dx + \left(\tfrac{c_{b_x}}{2}\left((\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)}+1)^2+1\right)+c_b\right)\int\limits_0^t\int\limits_0^{s(\tau)} (u_x^m)^2dxd\tau +$$
$$+\frac{c_a}{4\varepsilon_1}\int\limits_0^t \left(\frac{\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)}+1}{c_0} + \frac{1}{\delta_1}\int\limits_0^{s(\tau)} u_x^{m2}dx\right)d\tau + \frac{\|s'\|^2_{L_2(0,T)}}{2\varepsilon_2}\left(\frac{\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)}+1}{c_0} + \frac{1}{\delta}Y_\beta(t)\right).$$

Определим $\int\limits_0^t\int\limits_0^{s(\tau)} (u_x^m)^2dxd\tau \le \int\limits_0^t \max\limits_{\nu\le\tau}\int\limits_0^{s(\nu)} (u_x^m)^2dxd\tau = \int\limits_0^t Y_0(\tau)d\tau$, тогда

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{s(t)} (u_x^m)^2\ dx + (1 - c_a\varepsilon_1 - \tfrac{\varepsilon_2}{2})\int\limits_0^T\int\limits_0^{s(\tau)} \varphi'(u_x^m)(u_{xx}^m)^2 dxd\tau \le$$
$$\le \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (u_x^m(x,0))^2dx + \left(\tfrac{c_{b_x}}{2}\left((\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)}+1)^2+1\right)+c_b\right)\int\limits_0^t Y_0(\tau)d\tau +$$
$$+\frac{c_a}{4\varepsilon_1}\int\limits_0^t \left(\frac{\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)}+1}{c_0} + \frac{1}{\delta_1}Y_0(\tau)\right)d\tau + \frac{\|s'\|^2_{L_2(0,T)}}{2\varepsilon_2}\left(\frac{\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)}+1}{c_0} + \frac{1}{\delta}Y_\beta(t)\right).$$

Далее считаем, что $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ выбраны так,чтобы $1 - c_a\varepsilon_1 - \frac{\varepsilon_2}{2} > 0$. Оценим $Y_\beta(t)$ (используем неравенство $a \le \varepsilon_3 a^p + \frac{1}{(\varepsilon_3 p)^{\frac{p}{q}} q}$, $1/p + 1/q = 1$, $p = \frac{2}{2-\beta}$):

$$y_\beta(t) = \int\limits_0^{s(t)} |u_x|^{2-\beta} dx \le \int\limits_0^{s(t)} \left(\varepsilon_3 (u_x^m)^2 + c(\varepsilon_3)\right) dx \le \varepsilon_3 y_0(t) + s(t)c(\varepsilon_3).$$

Следовательно,

$$Y_\beta(t) = \max_{\tau \le t} y_\beta(\tau) \le \max_{\tau \le t} \left(\varepsilon_3 y_0(t) + s(t)c(\varepsilon_3)\right) \le \varepsilon_3 Y_0(t) + c(\varepsilon_3)(\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)} + 1).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\int\limits_0^{s(t)} (u_x^m)^2\,dx + (1 - c_a\varepsilon_1 - \tfrac{\varepsilon_2}{2})\int\limits_0^T\int\limits_0^{s(\tau)} \varphi'(u_x^m)(u_{xx}^m)^2 dx d\tau \le \\
&\le \tfrac{1}{2}\int\limits_0^1 (u_x^m(x,0))^2 dx + \left(\tfrac{c_{b_x}}{2}\left((\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)} + 1)^2 + 1\right) + c_b\right)\int\limits_0^t Y_0(\tau)d\tau + \\
&+\tfrac{c_a}{4\varepsilon_1}\int\limits_0^t \left(\tfrac{\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)}+1}{c_0} + \tfrac{1}{\delta_1}Y_0(\tau)\right)d\tau + \\
&+\tfrac{\|s'\|^2_{L_2(0,T)}}{2\varepsilon_2}\left(\tfrac{\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)}+1}{c_0} + \tfrac{c(\varepsilon_3)(\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)}+1)}{\delta} + Y_0(t)\tfrac{\varepsilon_3}{\delta}\right).
\end{aligned} \tag{15}$$

Так как $\max\limits_{\nu \le t}\int\limits_0^{\nu} Y_0(\tau)d\tau \le \int\limits_0^t Y_0(\tau)d\tau$ и $\max\limits_{\nu\le t} y_0(\nu) = Y_0(t)$, тогда, переходя к $\max\limits_{\nu \le t}$ в (15), получим

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon_3\|s'\|^2_{L_2(0,T)}}{2\delta\varepsilon_2}\right) Y_0(t) \le \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (u_x^m(x,0))^2 dx +$$

$$+\left(\frac{c_a}{4\varepsilon_1\delta_1} + \frac{c_{b_x}}{2}\left((\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)} + 1)^2 + 1\right) + c_b\right)\int\limits_0^t Y_0(\tau)d\tau +$$

$$+\frac{c_a}{4\varepsilon_1}\left(\frac{\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)}+1}{c_0}\right)T + \frac{\|s'\|^2_{L_2(0,T)}}{2\varepsilon_2}\left(\frac{\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)}+1}{c_0} + \frac{c(\varepsilon_3)(\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)}+1)}{\delta}\right).$$

Выбирая ε_3 таким, чтобы $\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon_3\|s'\|^2_{L_2(0,T)}}{2\delta\varepsilon_2} > 0$, и применяя к последнему неравенство Гронуолла, получим

$$Y_0(t) \le \sigma_1,$$

где σ_1 не зависит от m, так как $\int\limits_0^1 (u_x^m(x,0))^2\,dx$ можно оценить равномерно по m. Действительно, по построению приближенного решения $u^m_{0\,x}(x) \to u_{0x}(x)$ в $L_2(0,1)$. Значит, в силу выбора (10):

$$\int\limits_0^1 (u_x^m(x,0))^2\,dx \le c_{u_{0x}}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{s(t)} (u_x^m)^2 \, dx \le Y_0(t) \le \sigma_1. \tag{16}$$

Кроме того, из (148) следует

$$|u^m| \le \sqrt{\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)}+1}\sqrt{\sigma_1} = \sigma_2, \tag{17}$$

а из (15) неравенство

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^{s(\tau)} \varphi'\left(u_x^m\right)\left(u_{xx}^m\right)^2 \, dx d\tau \le \sigma_4. \tag{18}$$

5. Оценка производной по времени

Получим оценку u_t^m. Для этого умножим (9) на $c_j'^m(t)$ и просуммируем по j от 0 до m

$$\begin{gathered}\int\limits_0^{s(t)} u_t^m \sum_{j=0}^m c_j'^m \omega_j \, dx - \int\limits_0^{s(t)} \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\left(u_x^m\right)\right) \sum_{j=0}^m c_j'^m \omega_j \, dx \\ - \int\limits_0^{s(t)} a u_x^m \sum_{j=0}^m c_j'^m \omega_j \, dx - \int\limits_0^{s(t)} b u^m \sum_{j=0}^m c_j'^m \omega_j \, dx = 0.\end{gathered} \tag{19}$$

Очевидно, что

$$\sum_{j=0}^m c_j'^m \omega_j = \left(u_t^m + \frac{s'(t)}{s(t)} x u_x^m\right).$$

Тогда (19) примет вид

$$\begin{gathered}\int\limits_0^{s(t)} \left(u_t^m\right)^2 \, dx - \int\limits_0^{s(t)} \tfrac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\left(u_x^m\right)\right) u_t^m \, dx = -\tfrac{s'(t)}{s(t)} \int\limits_0^{s(t)} u_t^m x u_x^m \, dx + \int\limits_0^{s(t)} a u_x^m u_t^m \, dx \\ + \int\limits_0^{s(t)} b u^m u_t^m \, dx + \tfrac{s'(t)}{s(t)} \int\limits_0^{s(t)} \tfrac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\left(u_x^m\right)\right) x u_x^m \, dx + \tfrac{s'(t)}{s(t)} \int\limits_0^{s(t)} x\left(a\left(u_x^m\right)^2 + b u^m u_x^m\right) dx.\end{gathered} \tag{20}$$

Существование интегралов следует из условия 1 теоремы 1, и того, что $s \in W_2^1(0,T)$. Учитывая нецилиндричность Q_s и (12), получим

$$\begin{gathered}-\int\limits_0^{s(t)} \tfrac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\left(u_x^m\right)\right) u_t^m \, dx = \\ = \int\limits_0^{s(t)} \varphi\left(u_x^m\right) u_{tx}^m \, dx - \varphi\left(u_x^m(s(t),t)\right) u_t^m(s(t),t) + \varphi\left(u_x^m(0,t)\right) u_t^m(0,t) = \\ = \tfrac{d}{dt} \int\limits_0^{s(t)} \Phi\left(u_x^m\right) dx + s'(t)\Big(\varphi\left(u_x^m(s(t),t)\right) u_x^m(s(t),t) - \Phi\left(u_x^m(s(t),t)\right)\Big).\end{gathered}$$

Оценим последнее слагаемое в правой части последнего равенства:

$$
\begin{gathered}
\left|\left|s'(t)\right|\left(\varphi\left(u_x^m(s(t),t)\right)u_x^m(s(t),t)-\Phi\left(u_x^m(s(t),t)\right)\right)\right| = \\
= \left|\left|s'(t)\right|\int\limits_0^{s(t)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\varphi\left(u_x^m(\xi,t)\right)u_x^m(\xi,t)-\Phi\left(u_x^m(\xi,t)\right)\right)d\xi\right| \le \\
\le |s'(t)|\left(\int\limits_0^{s(t)}\varphi'(u_x^m)\left(u_x^m\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_0^{s(t)}\varphi'(u_x^m)\left(u_{xx}^m\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{gathered}
$$

Оценим правую часть в (20), учитывая (7), (16)–(18) и $\frac{x}{s(t)} \le 1$:

$$
\begin{gathered}
-\tfrac{s'(t)}{s(t)}\int\limits_0^{s(t)}u_t^m x u_x^m\ dx \le |s'(t)|\sigma_1^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_0^{s(t)}(u_t^m)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}, \\
\int\limits_0^{s(t)}a u_x^m u_t^m\ dx \le \sigma_1^{\frac{1}{2}}c_a\left(\int\limits_0^{s(t)}\left(u_t^m\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}, \\
\int\limits_0^{s(t)}b u^m u_t^m\ dx \le \sigma_2 c_b\left(\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)}+1\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_0^{s(t)}\left(u_t^m\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}, \\
\tfrac{s'(t)}{s(t)}\int\limits_0^{s(t)}\tfrac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\left(u_x^m\right)\right)x u_x^m\ dx \le |s'(t)|\left(\int\limits_0^{s(t)}\varphi'(u_x^m)\left(u_x^m\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_0^{s(t)}\varphi'(u_x^m)\left(u_{xx}^m\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}, \\
\tfrac{s'(t)}{s(t)}\int\limits_0^{s(t)}a x\left(u_x^m\right)^2\ dx \le \sigma_1 c_a|s'(t)|, \\
\tfrac{s'(t)}{s(t)}\int\limits_0^{s(t)}b x u^m u_x^m dx \le \sigma_2\sigma_1^{\frac{1}{2}}|s'(t)|\left(\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)}+1\right)^{\frac{1}{2}}c_b.
\end{gathered}
$$

Тогда

$$
\begin{gathered}
\int\limits_0^{s(t)}\left(u_t^m\right)^2\ dx+\tfrac{d}{dt}\int\limits_0^{s(t)}\Phi\left(u_x^m\right)dx \le \\
\left(\sigma_1^{\frac{1}{2}}|s'(t)|+\sigma_1^{\frac{1}{2}}c_a+\sigma_2 c_b\left(\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)}+1\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left(\int\limits_0^{s(t)}\left(u_t^m\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}+ \\
+2|s'(t)|\left(\int\limits_0^{s(t)}\varphi'(u_x^m)\left(u_x^m\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_0^{s(t)}\varphi'(u_x^m)\left(u_{xx}^m\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}+ \\
+\left(\sigma_1 c_a+\sigma_2\sigma_1^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)}+1\right)c_b\right)^{\frac{1}{2}}|s'(t)|.
\end{gathered}
\tag{21}
$$

Обозначим

$$
\beta_1=\sqrt{T}\left(\sigma_1^{\frac{1}{2}}c_a+\sigma_2 c_b\left(\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)}+1\right)^{\frac{1}{2}}\right),
$$

$$
\beta_2=\left(\sigma_1 c_a+\sigma_2\sigma_1^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)}+1\right)^{\frac{1}{2}}c_b\right)\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)}.
$$

Интегрируя (21) по t, применив неравенство Гельдера и (18), получим

$$\begin{gathered}\int\limits_0^t\int\limits_0^{s(\tau)}\left(u_t^m\right)^2\ dxd\tau+\int\limits_0^{s(t)}\Phi\left(u_x^m\right)dx\le\int\limits_0^1\Phi\left(u_x^m(x,0)\right)dx+\\+\left(\beta_1+\sigma_1^{\frac12}\|s'(t)\|_{L_2(0,t)}\right)\left(\int\limits_0^t\int\limits_0^{s(\tau)}\left(u_t^m\right)^2dxd\tau\right)^{\frac12}+\\+2\sigma_4^{\frac12}\left(\int\limits_0^t(s'(\tau))^2\int\limits_0^{s(\tau)}\varphi'(u_x^m)\left(u_x^m\right)^2dxd\tau\right)^{\frac12}+\beta_2.\end{gathered}\tag{22}$$

Применим условие 3 Теоремы 1 и используем (16) к предпоследнему слагаемому правой части (22):

$$\int\limits_0^{s(\tau)}\varphi'(u_x^m)\left(u_x^m\right)^2dx\le c_5\int\limits_0^{s(\tau)}\Phi(u_x^m)dx+c_6\sigma_1+c_7(\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)}+1).$$

Обозначим $\beta_3=c_6\sigma_1+c_7(\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)}+1)$. Тогда (22) примет вид

$$\begin{gathered}\int\limits_0^t\int\limits_0^{s(\tau)}\left(u_t^m\right)^2\ dxd\tau+\int\limits_0^{s(t)}\Phi\left(u_x^m\right)dx\le\int\limits_0^1\Phi\left(u_x^m(x,0)\right)dx+\\+\left(\beta_1+\sigma_1^{\frac12}\|s'\|_{L_2(0,T)}\right)\left(\int\limits_0^t\int\limits_0^{s(\tau)}\left(u_t^m\right)^2dxd\tau\right)^{\frac12}+\\+2\sigma_4^{\frac12}\left(c_5\int\limits_0^t(s'(\tau))^2\left(\int\limits_0^{s(\tau)}\Phi(u_x^m)dx\right)d\tau\right)^{\frac12}+\sqrt{\sigma_4}\sqrt{\beta_3}\|s'\|_{L_2(0,T)}+\beta_2.\end{gathered}$$

Добавив во второй множитель второго слагаемого правой части последнего неравенства величину $\int\limits_0^{s(\tau)}\Phi(u_x^m)dx$, а в предпредпоследнее слагаемое правой части – интеграл $\int\limits_0^t\int\limits_0^{s(\tau)}\left(u_t^m\right)^2\ dxd\tau$, получим

$$\begin{gathered}\int\limits_0^t\int\limits_0^{s(\tau)}\left(u_t^m\right)^2\ dxd\tau+\int\limits_0^{s(t)}\Phi\left(u_x^m\right)dx\le\int\limits_0^1\Phi\left(u_x^m(x,0)\right)dx+\\+\left(\beta_1+\sigma_1^{\frac12}\|s'\|_{L_2(0,T)}\right)\left(\int\limits_0^t\int\limits_0^{s(\tau)}\left(u_t^m\right)^2dxd\tau+\int\limits_0^{s(\tau)}\Phi(u_x^m)dx\right)^{\frac12}+\\+2\sigma_4^{\frac12}\left(c_5\int\limits_0^t(s'(\tau))^2\left(\int\limits_0^{s(\tau)}\Phi(u_x^m)dx+\int\limits_0^t\int\limits_0^{s(\tau)}\left(u_t^m\right)^2\ dxd\tau\right)d\tau\right)^{\frac12}+\\+\sqrt{\beta_3}\sqrt{\sigma_4}\|s'\|_{L_2(0,T)}+\beta_2.\end{gathered}\tag{23}$$

Обозначим

$$y(t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^{s(\tau)}\left(u_t^m\right)^2\ dxd\tau+\int\limits_0^{s(t)}\Phi\left(u_x^m\right)dx$$

и $Y(t)=\max\limits_{0\le r\le t}y(r)$, тогда (23) примет вид

$$y(t)\le Y(t)\le\int\limits_0^1\Phi\left(u_x^m(x,0)\right)dx+$$

$$+\left(\beta_1+\sigma_1^{\frac12}\|s'\|_{L_2(0,T)}+\sqrt{2}\sigma_4^{\frac12}\sqrt{c_5}\|s'\|_{L_2(0,T)}\right)(Y(t))^{\frac12}+\sqrt{\beta_3}\sqrt{\sigma_4}\|s'\|_{L_2(0,T)}+\beta_2.$$

Введение $Y(t)$ позволило вынести за знак интеграла по t в (23) множитель $(s'(\tau))^2$.

Для оценки $\int\limits_0^1\Phi\left(u_x^m(x,0)\right)dx$ воспользуемся условием 2 Теоремы 1, тогда

$$\int\limits_0^1\Phi(u^m(x,0))dx\le k_4+k_5\int\limits_0^1|u^m(x,0)|^q dx$$

По построению $u^m(x,0)\to u_0(x)$ в $\widetilde{W}_2^1\bigcap W_q^1$, $u_x^m(x,0)\to u_{0x}$ в $L_q(0,1)\bigcap L_2(0,1)$, поэтому

$$\int\limits_0^1\Phi(u^m(x,0))dx\le\sigma. \tag{24}$$

Теперь можно показать, что

$$0\le Y(t)\le\beta_4, \tag{25}$$

где β_4 не зависит от m и t.

Из (24) и (25) получим равномерно по m

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^{s(\tau)}\left(u_t^m\right)^2\ dxd\tau+\int\limits_0^{s(t)}\Phi\left(u_x^m\right)dx\le\beta_5, \tag{26}$$

где β_5 не зависит от m и t. Взяв $t=T$, получим следующую равномерную по m оценку

$$\|u_t^m\|_{L_2(Q_s)}\le\beta_5. \tag{27}$$

Из равенства $\varphi(u_x^m)=\int\limits_0^x\frac{\partial}{\partial x}\varphi(u_x^m)dx=\int\limits_0^x\varphi'(u_x^m)u_{xx}^m dx$ получаем

$$|\varphi(u_x^m)|^2\le\int\limits_0^{s(t)}\varphi'(u_x^m)dx\int\limits_0^{s(t)}\varphi'(u_x^m)u_{xx}^{m\,2}dx.$$

Поэтому (применяя условие 1 теоремы 1, (13), (26))

$$\int\limits_0^{s(t)} |\varphi(u_x^m)|^2 dx \le \int\limits_0^{s(t)}\int\limits_0^{s(t)} \varphi'(u_x^m)dx \int\limits_0^{s(t)} \varphi'(u_x^m){u_{xx}^m}^2 dxdx =$$
$$= s(t)\int\limits_0^{s(t)} \varphi'(u_x^m)dx \int\limits_0^{s(t)} \varphi'(u_x^m){u_{xx}^m}^2 dx \le$$
$$\le \left(\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)}+1\right)\int\limits_0^{s(t)} \left(c_1\Phi(u_x^m)+c_2\right)dx \int\limits_0^{s(t)} \varphi'(u_x^m){u_{xx}^m}^2 dx \le$$
$$\le \left(\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)}+1\right)\left(c_1\beta_5+c_2\left(\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)}+1\right)\right)\int\limits_0^{s(t)} \varphi'(u_x^m){u_{xx}^m}^2 dx.$$

Пусть $\sigma_5 = \left(\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)}+1\right)\left(c_1\beta_5+c_2\left(\sqrt{T}\|s'\|_{L_2(0,T)}+1\right)\right)$. Следовательно (применяя (18)), $\int\limits_0^{t}\int\limits_0^{s(\tau)} |\varphi(u_x^m)|^2 d\tau dx \le \sigma_5\sigma_4$. Таким образом,

$$\|\varphi(u_x^m)\|_{L_2(Q_s)} \le \sqrt{\sigma_5\sigma_4} = \sigma_6. \tag{28}$$

В дальнейшем нам понадобится следующий результат.

Лемма 1. *Пусть $s(t)$ такая, что $s \in W_2^1(0,T)$; $s(0)=1; s(t)>0$, $t\in[0,T)$, отрезок $[0,T]$ можно разбить на конечное число интервалов, на каждом из которых $s'(t)\ge 0$ п.в. либо $s'(t)\le 0$ п.в. (случай $s(T)=0$ допустим). Тогда $(W_2^1(Q_s)\cap L_\infty(0,T;\tilde W_2^1(0,s(t))))\subset C_{t,x}^{\frac14,\frac12}(\overline{Q}_s)\subset C^{\frac14}(\overline{Q}_s)$.*

Доказательство. Пусть $v\in (W_2^1(Q_s)\cap L_\infty(0,T;\tilde W_2^1(0,s(t))))=X$ и $M=\max\limits_{t\in[0,T]} s(t)$. Определим

$$\Pi = \{(x,t):\ x\in(0,M),\ t\in(0,T)\},$$
$$\overline{v}(x,t) = \begin{cases} v(x,t), 0<x<s(t);\\ 0,\ s(t)\le x\le M.\end{cases}$$

Заметим, что $\overline{v}\in C^{\frac14}(\overline{\Pi})$ тогда и только тогда, когда $v\in C^{\frac14}(\overline{Q}_s)$.

Покажем, что обобщенная производная по x функции $\overline{v}$ определяется по формуле

$$(\overline{v})_x(x,t) = \begin{cases} v_x,\ 0<x<s(t);\\ 0,\ s(t)\le x\le M.\end{cases}$$

Пусть $\eta\in \overset{0}{C}{}^{\infty}(0,M)$. Так как $v\in L_\infty(0,T;\tilde W_2^1(0,s(t)))$, то для п.в. $t\in[0,T]$ $v(\cdot,t)\in \tilde W_2^1(0,s(t))$. Поэтому для п.в. $t\in(0,T)$

$$\int\limits_0^M \overline{v}(\xi,t)\eta'(\xi)d\xi = \int\limits_0^{s(t)} v(\xi,t)\eta'(\xi)d\xi = -\int\limits_0^{s(t)} v_\xi(\xi,t)\eta(\xi)d\xi + v\eta|_0^{s(t)} = -\int\limits_0^M (\overline{v})_\xi(\xi,t)\eta(\xi)d\xi.$$

Покажем, что

$$|\overline{v}(x,t_1)-\overline{v}(x,t_2)| \le c|t_2-t_1|^{\frac14}.$$

Предположим, что $s(t_1) \geq s(t_2)$. Для доказательства последнего неравенства понадобится следующая оценка:

$$\int\limits_0^{s(t_2)} |v(\xi,t_1) - v(\xi,t_2)|^2 d\xi \leq c|t_1 - t_2|.$$

Согласно (1) отрезок $[0,T]$ можно разбить на конечное число интервалов, на каждом из которых функция $s(t)$ либо невозрастающая, либо неубывающая, либо постоянна. Обозначим $K = [\min\{t_1,t_2\}, \max\{t_1,t_2\}]$. Пусть $\xi_0 = \min\limits_{t\in K} s(t)$. Тогда

$$\int\limits_0^{s(t_2)} |v(\xi,t_1) - v(\xi,t_2)|^2 d\xi \leq \int\limits_0^{\xi_0} |v(\xi,t_1) - v(\xi,t_2)|^2 d\xi + \int\limits_{\xi_0}^{s(t_2)} |v(\xi,t_1) - v(\xi,t_2)|^2 d\xi.$$

Заметим, что $[0,\xi_0] \times K \subset \overline{Q}_s$, тогда первое слагаемое в правой части последнего неравенства можно оценить следующим образом:

$$\begin{gathered}\int\limits_0^{\xi_0} |v(\xi,t_1) - v(\xi,t_2)|^2 d\xi \leq \int\limits_0^{\xi_0} \left| \int\limits_{t_1}^{t_2} v_t(\xi,\tau) d\tau \right|^2 d\xi \leq \\ \leq |t_1 - t_2| \int\limits_{Q_s} v_t^2 dQ_s \leq \|v\|_X^2 |t_1 - t_2|.\end{gathered} \tag{29}$$

Оценим второе слагаемое в правой части предпоследнего неравенства. Если $\xi_0 = s(t_2)$, то

$$\int\limits_{\xi_0}^{s(t_2)} |v(\xi,t_1) - v(\xi,t_2)|^2 d\xi = 0 \leq \|v\|_X^2 |t_1 - t_2|.$$

Пусть $\xi_0 < s(t_2)$. Для любого $\xi \in [\xi_0, s(t_2)]$ определим $t_{1,2}(\xi) \in K$ как ближайшую к t_1 точку, для которой $s(t_{1,2}) = \xi$, и $t_{2,1}(\xi) \in K$ как ближайшую к t_2 точку, для которой $s(t_{2,1}) = \xi$. Если хотя бы одна из ближайших точек $t_{1,2},\ t_{2,1}$ не существует, то не существует и вторая и в этом случае $\xi_0 = s(t_2)$.

Итак, ближайшие точки $t_{1,2},\ t_{2,1}$ существуют (возможно совпадают). Тогда при данном ξ $v(\xi,\tau)$ определена для $\tau \in [\min\{t_{1,2}(\xi), t_1\}, \max\{t_{1,2}(\xi), t_1\}]$ и для $\tau \in [\min\{t_2, t_{2,1}(\xi)\}, \max\{t_2, t_{2,1}(\xi)\}]$.

Рассмотрим, например, случай $s(t_1) > s(t_2), t_2 > t_1$. График $s(t)$ лежит правее прямой $x = \xi_0,\ t \in [t_{2,1}, t_2]$ по построению ξ_0. График $s(t)$ лежит правее прямой $x = \xi$ на $[t_{2,1}, t_2]$ так как $t_{2,1(\xi)}$ – ближайшая для t_2 точка, в которой $s(t_{2,1}(\xi)) = \xi$. Таким образом $s(\tau) \geq s(t_{2,1}(\xi)) = \xi$ на $[t_{2,1}, t_2]$.

Аналогично рассуждению в предыдущем обзаце, график $s(t)$ лежит правее прямой $x = \xi_0$ для $t \in [t_1, t_{1,2}(\xi)]$ и график $s(t)$ лежит правее прямой $x = \xi$ на $[t_1, t_{1,2}(\xi)]$, так как $t_{1,2}(\xi)$ – ближайшая для t_1 точка, в которой $s(t_{1,2}(\xi)) = \xi$. Таким образом, $s(\tau) \geq s(t_{1,2}(\xi)) = \xi$ на $[t_1, t_{1,2}]$; при данном ξ $v(\xi,\tau)$ определены для $\tau \in [t_{2,1}(\xi), t_2] \cup [t_1, t_{1,2}(\xi)]$.

Тогда, учитывая $v(\xi, t_{1,2}) = v(\xi, t_{2,1}) = 0$, получим

$$\int\limits_{\xi_0}^{s(t_2)} |v(\xi, t_1) - v(\xi, t_{1,2}) + v(\xi, t_{2,1}) - v(\xi, t_2)|^2 d\xi \leq$$

$$\leq 2|t_1 - t_2| \int\limits_{\xi_0}^{s(t_2)} \left(\left| \int\limits_{t_{1,2}}^{t_1} v_t^2 d\tau \right| + \left| \int\limits_{t_2}^{t_{2,1}} v_t^2 d\tau \right| \right) d\xi \leq 4|t_1 - t_2| \int\limits_{Q_s} v_t^2 dQ_s \leq 4\|v\|_X^2 |t_1 - t_2|$$

и в итоге, используя неравенство Гельдера и условия леммы,

$$|\overline{v}(x, t_1) - \overline{v}(x, t_2)|^2 = \int\limits_x^M \frac{d}{d\xi} |\overline{v}(\xi, t_1) - \overline{v}(\xi, t_2)|^2 d\xi \leq$$

$$\leq 2 \int\limits_x^M |\overline{v}(\xi, t_1) - \overline{v}(\xi, t_2)||\overline{v}_x(\xi, t_1) - \overline{v}_x(\xi, t_2)| d\xi \leq$$

$$\leq 2 \left(\int\limits_x^M |\overline{v}(\xi, t_1) - \overline{v}(\xi, t_2)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\left(\int\limits_0^M |\overline{v}_x(\xi, t_1)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int\limits_0^M |\overline{v}_x(\xi, t_2)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right) \leq$$

$$\leq 4\|v\|_X \left(\int\limits_0^M |\overline{v}(\xi, t_1) - \overline{v}(\xi, t_2)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$4\|v\|_X \left(\int\limits_0^{s(t_2)} |v(\xi, t_1) - v(\xi, t_2)|^2 d\xi + \int\limits_{s(t_2)}^{s(t_1)} |v(\xi, t_1)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq 4\|v\|_X \left(5\|v\|_X^2 |t_1 - t_2| + \int\limits_{s(t_2)}^{s(t_1)} |\int\limits_{\xi}^{s(t_1)} v_\xi(\eta, t_1) d\eta|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq 4\|v\|_X^2 \left(5|t_1 - t_2| + |s(t_1) - s(t_2)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 4\|v\|_X^2 \left(5 + \|s'\|_{L_2(0,T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}}.$$

Покажем, что

$$|\overline{v}(x_1, t) - \overline{v}(x_2, t)| \leq c|x_2 - x_1|^{\frac{1}{2}}.$$

Используя неравенство Гельдера и условия леммы, получим

$$|\overline{v}(x_1, t) - \overline{v}(x_2, t)| \leq |x_1 - x_2|^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^M \overline{v}_x^2(\xi, t) d\xi \right) \leq \|v\|_X |x_2 - x_1|^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда

$$|v(x_1, t_1) - v(x_2, t_2)| = |\overline{v}(x_1, t_1) - \overline{v}(x_2, t_2)| \leq$$
$$\leq |\overline{v}(x_1, t_1) - \overline{v}(x_1, t_2)| + |\overline{v}(x_1, t_2) - \overline{v}(x_2, t_2)| \leq$$
$$\leq 2\|v\|_X \left(5 + \|s'\|_{L_2(0,T)}^2 \right)^{\frac{1}{4}} |t_2 - t_1|^{\frac{1}{4}} + \|v\|_X |x_2 - x_1|^{\frac{1}{2}} \leq$$
$$\leq c\|v\|_X \left((t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 \right)^{\frac{1}{8}}.$$

Неравенство $\sup\limits_{(x,t) \in Q_s} |v(x, t)| \leq \left(\int\limits_0^{s(t)} v_x^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{s(t)} \leq c\|v\|_X$, где $c = c(\|s'\|_{L_2})$ очевидно. Поэтому неравенство $\|v\|_{C_{t,x}^{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}(\overline{Q}_s)} \leq c\|v\|_X$ для $c = c(\|s'\|_{L_2})$ обосновано.

Изменяя v на множестве меры 0, получим функцию v из $C_{t,x}^{\frac{1}{4},\frac{1}{2}}(\overline{Q}_s)$. Лемма доказана. □

6. Предельный переход по m в уравнении

В силу выбора $s(t)$, удовлетворяющей условиям (1), область Q_s можно разбить сечениями $t = const,\ t \in [0,T]$ на конечное число частей, в которых $s'(t) \geq 0$ почти всюду на $[0,T]$ (далее п.в.) или $s'(t) \leq 0$ п.в. Докажем предельный переход по m, предполагая, что Q_s разбивается на две части, общий случай доказывается аналогично.

Пусть $s(t)$ такая, что интервал $[0,T]$ можно разбить на два интервала $[0,T] = [0,t_0] \cup [t_0,T]:\ s'(t) \geq 0,\ t \in [0,t_0];\ s'(t) \leq 0,\ t \in [t_0,T]$.

Определим $Q_s^1 = \{(x,t) : 0 \leq x \leq s(t),\ 0 \leq t \leq t_0\}$. Пусть $u_1^m(x,t)$ – сужение $u^m(x,t)$ в Q_s^1.

Сначала покажем, что из u_1^m можно выбрать подпоследовательность (оставим для неё обозначение u_1^m), для которой

$$u^m_{1\ x} \to u_{1x},\ \text{п.в. в } Q_s^1.$$

6.1. Об одном результате о компактности

Нам понадобится один результат о компактности, доказанный в [17], и обоснование возможности его применения.

В качестве B_1^t выберем пространства $L_2(0,s(t)),\ t \in (0,t_0)$, а в качестве B^t – пространства функций из $W_p^1(0,s(t)),\ 1 \leq p < 2,\ t \in (0,t_0)$ с нормой

$$\|v\|_{B^t} = \left(\int\limits_0^{s(t)} (|v_x|^p + |v|^p)\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Неубывание $s(t),\ t \in (0,t_0)$ дает $B_1^{t_1} \subseteq B_1^{t_2},\ B^{t_1} \subseteq B^{t_2},\ t_1 > t_2$.

Определим S^t как подмножество пространства B^t, состоящее из функций класса $C^2[0,s(t)]$, для которых $v(s(t)) = v_x(0) = 0$. Кроме того, важную роль играет величина $M_t(v) : S^t \to R^+$

$$M_t(v) = \int\limits_0^{s(t)} \left(v_x^2 + v^2\right) dx + \int\limits_0^{s(t)} \varphi'(v_x) v_{xx}^2 dx,\ t \in [0,t_0].$$

В силу неубывания $s(t)$ на $[0,t_0]$ выполняется $M_{t_2}(v) \leq M_{t_1}(v),\ t_1 > t_2, \forall\ v \in S^{t_1}$. Так как u_1^m гладкая по x, то для $v(x) = u_1^m(x,t)$ из равенства $\frac{\partial}{\partial x}\psi(u^m_{1\ x}) = \sqrt{\varphi'(u^m_{1\ x})}u^m_{1\ xx}$, получим:

$$M_t(u_1^m) = \|u_1^m\|^2_{W_2^1(0,s(t))} + \int\limits_0^{s(t)} \left|\frac{\partial}{\partial x}\psi(u^m_{1\ x})\right|^2 dx.$$

Из оценок u^m следует, что существует константа c_M : $\int\limits_0^{t_0} M_t(u_1^m)dt \le c_M$ равномерно по m.

Обозначим $S_\alpha^t = \{\theta(x) \in S^t : M_t(\theta) \le \alpha\}$. Чтобы применить результат [17] нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть числа α, t заданы, тогда $\forall t \in [0, t_0]$ множество S_α^t относительно компактно в $B^t = W_p^1(0, s(t))$, $1 \le p < 2$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций θ^k из S_α^t и определим $\theta_1^k = \psi(\theta_x^k)$, тогда $\int\limits_0^{s(t)} \left|(\theta_1^k)_x\right|^2 dx \le \alpha$. При этом $\theta_1^k(0) = \psi(\theta_x^k(0)) = \psi(0) = 0$ и

$$\left|\theta_1^k(x)\right| = \left|\int\limits_0^x \frac{\partial}{\partial x}\psi(\theta_x^k)dx\right| \le \|\frac{\partial}{\partial x}\psi(\theta_x^k)\|_{L_2(0,s(t))}\sqrt{s(t)}.$$

Следовательно,

$$\|\theta_1^k\|_{L_2(0,s(t))} \le \|\frac{\partial}{\partial x}\psi(\theta_x^k)\|_{L_2(0,s(t))} s(t) \le \alpha s(t_0),$$

т.е. последовательность $\{\theta_1^k\}$ ограничена в $W_2^1(0, s(t))$ и поэтому относительно компактна в $L_2(0, s(t))$ (и даже в $C[0, s(t)]$).

Извлекая подпоследовательность, можно считать, что $\theta_1^k \to g$ в $L_2(0, s(t))$ и п.в. на $(0, s(t))$. Однако $\theta_1^k = \psi(\theta_x^k)$ и ψ^{-1} существует и, в силу непрерывности ψ непрерывна. Тогда $\psi^{-1}(\theta_1^k) = \theta_x^k$ и (так как $\theta_1^k \to g$ п.в.) $\theta_x^k \to \psi^{-1}(g)$ п.в. на $(0, s(t))$.

Из определения S_α^t следует, что $\int\limits_0^{s(t)} (\theta_x^k)^2 dx \le \alpha$ равномерно по k. Это с условием поточечной сходимости ([19]) дает то, что $\theta_x^k \to \psi^{-1}(g)$ слабо в $L_2(0, s(t))$ и сильно в $L_p(0, s(t))$, $1 \le p < 2$ [20]. Но θ^k равномерно ограничена в $\tilde{W}_2^1(0, s(t)) \subset W_2^1(0, s(t))$. Следовательно, существуют такая подпоследовательность θ^{k_n} и функция $\theta \in \tilde{W}_2^1(0, s(t))$, что $\theta^{k_n} \to \theta$ слабо в $L_2(0, s(t))$ и $\theta_x^{k_n} \to \theta_x$ слабо в $L_2(0, s(t))$. Тогда $\psi^{-1}(g) = \theta_x$ и $g = \psi(\theta_x)$.

Из оценки

$$\int\limits_0^{s(t)} |\theta^{k_n} - \theta|^p dx \le \beta \int\limits_0^{s(t)} |\theta_x^{k_n} - \theta_x|^p dx, \qquad (\beta > 0),$$

следует сильная сходимость $\{\theta^{k_n}\}$ в $L_p(0, s(t))$. Таким образом, $\{\theta^{k_n}\}$ сходится в $W_p^1(0, s(t)) = B^t$. Лемма доказана. □

Также определим множества функций F, F_1, необходимые для применения результата о компактности [17].

$$F_1 = \left\{ u(t) : \forall t \in (0, t_0)\ u(t) \in B^t\ ,\ \operatorname*{vrai\,max}_{t \in (0,t_0)} \|u(t)\|_{B^t} \le L_1,\ \int\limits_0^{t_0} M_t(u)dt \le L_2 \right\},$$

$$F = \left\{ u(t) : u(t) \in F_1, \int\limits_0^{t_0} \|u_t(t)\|^2_{B_1^t} dt \le L_3 \right\}.$$

Постоянные L_1, L_2, L_3 — общие для всех $u(t)$ из F. В качестве элементов $F,\ F_1$ достаточно взять множество $\{u_1^m\}_{m=0}^{\infty}$ для $t \in [0, t_0]$.

Для использования указанной теоремы необходимо доказать существование такой функции $\eta(t_1, t_2)$, что для всех пар элементов $u_1^{m_1},\ u_1^{m_2} \in F_1$ и всех их разностей $U = u_1^{m_1} - u_1^{m_2}$ для $t_1 \ge t_2$ выполнено $|\|U(t_1)\|_{B^{t_2}} - \|U(t_1)\|_{B^{t_1}}| \le \eta(t_1, t_2) \to 0$ при $t_1 - t_2 \to 0$. Здесь $\eta(t_1, t_2)$ не зависит от $u_1^{m_1},\ u_1^{m_2}$ из F_1. Действительно, из неравенств

$$\left| a^{\frac{1}{p}} - b^{\frac{1}{p}} \right| \le c(p)|a-b|^{\frac{1}{p}}, \qquad |a+b|^{\frac{1}{p}} \le c_1(p)|a^{\frac{1}{p}} + b^{\frac{1}{p}}|$$

и так как $s(t),\ t \in (0, t_0)$ неубывающая функция и $t_1 \ge t_2$, имеем, взяв $p \in (1, 2)$,

$$|\|U(t_1)\|_{B^{t_2}} - \|U(t_1)\|_{B^{t_1}}| =$$

$$= \left| \left(\int\limits_0^{s(t_2)} (|U_x(t_1)|^p + |U(t_1)|^p)\, dx \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int\limits_0^{s(t_1)} (|U_x(t_1)|^p + |U(t_1)|^p)\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \right| \le$$

$$\le c(p) \left| \int\limits_0^{s(t_2)} (|U_x(t_1)|^p + |U(t_1)|^p)\, dx - \int\limits_0^{s(t_1)} (|U_x(t_1)|^p + |U(t_1)|^p)\, dx \right|^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le c(p) \left| \int\limits_{s(t_1)}^{s(t_2)} |U_x(t_1)|^p\, dx + \int\limits_{s(t_1)}^{s(t_2)} |U(t_1)|^p\, dx \right|^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le c(p)c_1(p) \left(\left| \int\limits_{s(t_1)}^{s(t_2)} |U_x(t_1)|^p\, dx \right|^{\frac{1}{p}} + \left| \int\limits_{s(t_1)}^{s(t_2)} |U(t_1)|^p\, dx \right|^{\frac{1}{p}} \right) \le$$

$$\le c(p)c_1(p) \left(\left| \left(\int\limits_{s(t_1)}^{s(t_2)} |U_x(t_1)|^2\, dx \right)^{\frac{p}{2}} |s(t_2) - s(t_1)|^{\frac{1}{\left(\frac{2}{p}\right)'}} \right|^{\frac{1}{p}} + 2\sigma_2 |s(t_2) - s(t_1)|^{\frac{1}{p}} \right) \le$$

$$\le c(p)c_1(p) \left(2\sigma_1^{\frac{1}{2}} \left| \int\limits_0^{t_0} (s'(\tau))^2 d\tau \right|^{\frac{1}{2p\left(\frac{2}{p}\right)'}} |t_2 - t_1|^{\frac{1}{2p\left(\frac{2}{p}\right)'}} + 2\sigma_2 \left| \int\limits_0^{t_0} (s'(\tau))^2 d\tau \right|^{\frac{1}{2p}} |t_2 - t_1|^{\frac{1}{2p}} \right) =$$

$$= c(p)c_1(p) \left(2\sigma_1^{\frac{1}{2}} \|s'\|^{\frac{2-p}{2p}}_{L_2(0,t_0)} |t_2 - t_1|^{\frac{2-p}{4p}} + 2\sigma_2 \|s'\|^{\frac{1}{p}}_{L_2(0,t_0)} |t_2 - t_1|^{\frac{1}{2p}} \right) \to 0$$

равномерно по m при $t_1 - t_2 \to 0$.

Следовательно, на множестве F_1 семейство элементов $\{\|U\|_{B^t}, m_1, m_2 \in N\}$ равностепенно непрерывно по t.

Таким образом, условия [17] выполнены, следовательно, есть сходимость некоторой подпоследовательности, (обозначим ее снова $\{u_1^m\}$), для которой $u_1^m \to u_1$ в $L_{p_1}(0, t_0; B^t)$, $\forall p_1 \geq 1$. Взяв $p_1 = p$, можно считать, что

$$u_{1\ x}^m \to u_{1x}, \text{ в } L_p(0, t_0; L_p(0, s(t))), \ 1 \leq p < 2. \tag{30}$$

Тогда (выделяя еще одну подпоследовательность, которую снова обозначим через u_1^m)

$$u_{1\ x}^m \to u_{1x}, \text{ п.в. в } Q_s^1. \tag{31}$$

Определим

$$Q_s^2 = \{(x, t) : 0 \leq x \leq s(t), \ t_0 \leq t \leq T\}$$

и пусть $\tau = T - t, \ \tau \in (0, T - t_0)$. Тогда

$$\tilde{Q}_s^2 = \{(x, \tau) : 0 \leq x \leq s_1(\tau), \ 0 \leq \tau \leq T - t_0\},$$

где $s_1(\tau) = s(T-\tau), \ \tau \in (0, T-t_0)$ – неубывающая функция. Определим $u_2^m(x, t), \ t \in (t_0, T)$ – сужение $u^m(x, t), \ t \in (t_0, T)$, в Q_s^2. При этом мы считаем, что для u^m в Q_s^1 выполнены (30)–(31). Покажем, что из $\{u^m\}$ можно выделить еще одну подпоследовательность (обозначим ее снова $\{u^m\}$), для сужения которой в Q_s^2 выполнено

$$u_{2\ x}^m \to u_{2x}, \text{ п.в. в } Q_s^2.$$

Доказательства построим аналогично выводу сходимостей (30)–(31). Определим $\tilde{u}_2^m(x, \tau) = \tilde{u}_2^m(x, T - t) = u_2^m(x, t), \ t \in (t_0, T), \ \tau \in (0, T - t_0)$.

Для $\tau \in (0, T - t_0)$ введем пространства $B^\tau = W_p^1(0, s_1(\tau)), \ 1 \leq p < 2, \ B_1^\tau = L_2(0, s_1(\tau))$. Неубывание $s_1(\tau)$ даёт $B_1^{\tau_1} \subseteq B_1^{\tau_2}, \ B^{\tau_1} \subseteq B^{\tau_2}, \ \tau_1 > \tau_2$.

Введем величину

$$M_\tau(u) = \int\limits_0^{s_1(\tau)} \left(u_x^2 + u^2\right) dx + \int\limits_0^{s_1(\tau)} \varphi'(u_x) u_{xx}^2 dx, \qquad u = \tilde{u}_2^m(x, \tau),$$

и множество

$$S_\gamma^\tau = \left\{\theta(x) \in C^2[0, s_1(\tau)] : \theta(s_1(\tau)) = \theta_x(0) = 0, M_\tau(\theta) \leq \gamma\right\}.$$

Из леммы 2 получим, что для заданных $\gamma, \ \tau$ множество S_γ^τ относительно компактно в B^τ.

Определим

$$F_1 = \left\{u(\tau) : \forall \tau \in (0, T - t_0) \ u(\tau) \in B^\tau, \ \operatorname*{vrai\,max}_{\tau \in (0, T - t_0)} \|u(\tau)\|_{B^\tau} \leq \tilde{L}_1, \int\limits_0^{T-t_0} M_\tau(u) d\tau \leq \tilde{L}_2\right\},$$

$$F = \left\{u(\tau) : u(\tau) \in F_1, \ \int\limits_0^{T-t_0} \|u_t(\tau)\|_{B_1^\tau}^2 d\tau \leq \tilde{L}_3\right\}.$$

В качестве элементов $F,\ F_1$ будем брать множество $\{\tilde{u}_2^m\}$. Равностепенная непрерывность норм в B^τ по параметру τ пар элементов из F_1 доказывается аналогично случаю $t \le t_0$. Тогда из [17] следует существование некоторой функции $\tilde{u}_2(x,\tau)$, для которой получим (рассуждая аналогично тому как выводим (30)–(31))

$$(\tilde{u}_2^m)_x \to (\tilde{u}_2)_x, \ \text{в } L_p(0,T-t_0;L_p(0,s_1(\tau))),\ 1 \le p < 2, \tag{32}$$

$$(\tilde{u}_2^m)_x \to (\tilde{u}_2)_x, \ \text{п.в. в } \tilde{Q}_s^2. \tag{33}$$

В силу связи $u^m(x,t) = u_2^m(x,t) = \tilde{u}_2^m(x,T-t),\ t \in (t_0,T)$, поэтому $u_x^m(x,t) = (u_2^m)_x(x,t) = (\tilde{u}_2^m)_x(x,T-t)$. Тогда из (33) следует, что

$$u_x^m(x,t) \to \chi_1(x,t) \text{ для п.в. } (x,t) \in Q_s^2. \tag{34}$$

Из оценок (16), (17) и (27) следует существование

$$u \in W_2^1(Q_s) \cap L_\infty(0,T;W_2^1(0,s(t)))$$

такой, что некоторая подпоследовательность (считаем ее выбранной из той, для которой выполнены (31) и (34))

$$\begin{aligned} &u^m \to u,\ \text{слабо в } L_2(Q_s),\\ &u_x^m \to u_x,\ \text{слабо в } L_2(Q_s),\\ &u_t^m \to u_t,\ \text{слабо в } L_2(Q_s). \end{aligned} \tag{35}$$

Таким образом, $u_1(x,t) = u(x,t)$ в Q_s^1. $\chi_1 = u_x(x,t)$ в Q_s^2. Тогда из (31) и (34)

$$u_x^m(x,t) \to u_x(x,t),\ \text{п.в. в } Q_s. \tag{36}$$

Так как функция $\varphi(\xi)$ – непрерывна, то делаем вывод о том, что $\varphi(u_x^m) \to \varphi(u_x)$ п.в. в Q_s. Поэтому из (28) $\varphi(u_x) \in L_2(Q_s)$ и

$$\varphi(u_x^m) \to \varphi(u_x) \text{ слабо в } L_2(Q_s). \tag{37}$$

6.2. Предельный переход

Пусть $b_i(t), i = 0,1,2,...$ образуют полную систему в $L_2[0,T]$. Умножая все члены (9) на $b_i(t)$, суммируя по j,i от 0 до $M, M \le m$ и интегрируя по t, получим для $F_M(x,t) = \sum\limits_{i,j=0}^{M} b_i(t)\omega_j(x,t)$

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^{s(t)} u_t^m F_M\,dxdt + \int\limits_0^T\int\limits_0^{s(t)} \varphi\left(u_x^m\right) F_{Mx}\,dxdt - \int\limits_0^T\int\limits_0^{s(t)} a u_x^m F_M\,dxdt -$$
$$- \int\limits_0^T\int\limits_0^{s(t)} b u^m F_M\,dxdt = 0,\ M \le m.$$

Применяя (35)–(37) к последнему уравнению, получим

$$\int_0^T\int_0^{s(t)} u_tF_M\;dxdt+\int_0^T\int_0^{s(t)}\varphi\left(u_x\right)F_{Mx}\;dxdt-\int_0^T\int_0^{s(t)} au_xF_M\;dxdt-$$
$$-\int_0^T\int_0^{s(t)} buF_M\;dxdt=0,\;\;M\le m.$$

Так как $\{\omega_j\}$ — ортогональный базис в $L_2(0,s(t))$ и в $\widetilde{W}_2^1(0,s(t))$, $\forall t\in[0,T]$ и $b_i(t)$ — полная система в $L_2[0,T]$, то, по теореме 2 из [2], получим плотность F_M в $L_2(0,T;\widetilde{W}_2^1(0,s(t)))$. Поэтому

$$\int_0^T\int_0^{s(t)} u_tF\;dxdt+\int_0^T\int_0^{s(t)}\varphi\left(u_x\right)F_x\;dxdt-\int_0^T\int_0^{s(t)} au_xF\;dxdt-\int_0^T\int_0^{s(t)} buF\;dxdt=0\quad(38)$$

для любой гладкой функции $F\in C(\overline{Q}_s)$ такой, что $F_x\in C(\overline{Q}_s)$, $F(s(t),t)=0$. Из этого равенства следует, что существует $\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\left(u_x\right)\right)\in L_2(Q_s)$ и уравнение (2) выполнено п.в. в Q_s, поэтому функция $\varphi(u_x)$ имеет след при $x=0$.

Из леммы 1 и компактности вложения $C^{\frac14}\overline{Q}_s$ в $C(\overline{Q}_s)$ следует, что некоторая подпоследовательность u^m сходится к u по норме $C(\overline{Q}_s)$ и что выполнение условий (3), (5) в обычном смысле очевидно.

Обоснуем выполнение условия (4) для построенного решения. Из (38), выбрав $F=h(t)\omega_1(x,t)$ $(h(t)\in \overset{0}{C}{}^{\infty}(0,T))$, интегрируя по частям, получим

$$\int_0^T\left(\varphi\left(u_x\right)F\right)\Big|_0^{s(t)}\;dt=0.$$

В силу леммы Дюбуа–Реймона, получим $\varphi(u_x)|_{x=0}=0$.

Обоснуем единственность решения. Предполагаем, что (8) выполено. Пусть существуют $u_1,\;u_2$ – решения (2)–(5). Тогда для любой $F\in L_2(0,T;\tilde{W}_2^1)$.

$$\int_0^{s(t)}(u_{1t}-u_{2t})Fdx+\int_0^{s(t)}\left(\varphi(u_{1x})-\varphi(u_{2x})\right)F_xdx-\int_0^{s(t)}a(u_{1x}-u_{2x})Fdx-\int_0^{s(t)}b(u_1-u_2)Fdx=0.$$

Обозначим $u=u_1-u_2$. Пусть $F=u$, тогда

$$\int_0^{s(t)}u_tudx+\int_0^{s(t)}\left(\varphi(u_{1x})-\varphi(u_{2x})\right)u_xdx-\int_0^{s(t)}au_xudx-\int_0^{s(t)}bu^2dx=0.$$

Преобразуем первое слагаемое последнего равенства, учитывая нецилиндричность Q_s:

$$\int_0^{s(t)}u_tudx=\frac12\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)}u^2dx.$$

Второе слагаемое предпоследнего равенства (существование интеграла следует из (28)), в силу монотонности φ неотрицательно. Преобразуем третье слагаемое равенства (интегрируя по частям, (8)):

$$\int\limits_0^{s(t)} au_x u dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{s(t)} a_x u^2 dx \leq \frac{1}{2}c_{a_x}\int\limits_0^{s(t)} u^2 dx.$$

Таким образом

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_0^{s(t)} u^2 dx \leq \left(\frac{1}{2}c_{a_x} + c_b\right)\int\limits_0^{s(t)} u^2 dx.$$

Далее, применяя неравенство Гронуолла и учитывая, что $u(x,0) = 0$, получим $\int\limits_0^{s(t)} u^2 dx \leq 0$. Следовательно, $u_1 = u_2$.

Замечание. В силу Леммы 1 решение задачи принадлежит классу $C^{\frac{1}{4}}(\overline{Q}_s)$ и сходимость подпоследовательности приближенных решений будет иметь место в пространствах $C^{\alpha}(\overline{Q}_s),\ \alpha \in [0, \frac{1}{4})$.

Список литературы

[1] К. В. Лисенков, “Проекционый метод решения задачи для квазилинейного параболического уравнения в нецилиндрической области с границей класса W_2^1”, *Дальневост. матем. журн.*, **12**:1 (2012), 48–59.

[2] Н. Е. Истомина, А. Г. Подгаев, “О разрешимости задачи для квазилинейного вырождающегося параболического уравнения в области с нецилиндрической границей”, *Дальневост. матем. журн.*, **1**:1 (2000), 63–73.

[3] И. Г. Петровский, *Composito mathematica*, 1935.

[4] П. В. Виноградова, А. Г. Зарубин, “О методе Галеркина для квазилинейных параболических уравнений в нецилиндрической области”, *Дальневост. матем. журн.*, **3**:1 (2002), 3–17.

[5] J. Ferreira, N. A. Lar'kin, “Global solvability of a mixed problem for a nonlinear hyperbolic-parabolic equation in noncylindrical domains”, *Portugaliae mathematica*, **53**:4 (1996), 381–395.

[6] A. I. Kozhanov, N. A. Lar'kin, “On solvability of boundary-value problems for the wave equation with a nonlinear dissipation in noncylindrical domains”, *Siberian Mathematical Journal*, **42**:6 (2001), 1062–1081.

[7] А. И. Кожанов, Н. А. Ларькин, “О разрешимости краевых задач для сильно нелинейных уравнений вязкоупругости в нецилиндричеких областях”, *Математические заметки ЯГУ*, **6**:1 (1999), 36.

[8] С. Н. Глазатов, “О некоторых задачах для дважды нелинейных параболических уравнений и уравнений переменного типа”, *Siberian Adv. Math.*, **11**:1 (2001), 45–83.

[9] Р. Г. Зайнуллин, “Об одном аналитическом подходе к решению одномерной задачи переноса тепла со свободными границами”, *Изв. Высш. Учеб. Зав. Математика*, **2** (2008), 24–31.

[10] Е. А. Бадерко, “О разрешимости граничных задач для параболических уравнений высокого порядка в областях с криволинейными боковыми границами”, *Дифференциальные уравнения*, **12**:10 (1976), 1780–1792.

[11] Ю. Т. Сильченко, “Одна краевая задача для области с подвижной границей”, *Изв. Высш. Учеб. Зав. Математика*, **3** (1998), 44–46.

[12] D. C. Antonopoulou, “Discontinuous Galerkin methods for the linear Schrodinger equation in non-cylindrical domains”, *Numer.Math.*, **115**:2 (2010), 585–608.

[13] P. Jamet, “Galerkin-type approximations which are discontinuous in time for parabolic equations in a variable domain”, *SIAM J.Numer.Anal.*, **15**:5 (1978), 912–928.

[14] Н. А. Драгиева, “Применение метода Галеркина к решению волнового уравнения в области с подвижными границами”, *Журн. Выч. Мат. и Мат. Физ.*, **15**:4 (1975), 946–956.

[15] Л. Ф. Воеводин, “Численное моделирование роста ледяного покрова в водоеме”, *Сиб. журн. инд. матем.*, **9**:1 (2006), 47–54.

[16] Р. А. Мустафаев, “Решение обобщенным методом интегральных соотношений одной нестационарной задачи фильтрации с подвижной границей”, *Журн. Выч. Мат. и Мат. Физ.*, **48**:2 (2008), 282–287.

[17] А. Г. Подгаев, “Об относительной компактности множества абстрактных функций из шкалы банаховых пространств”, *Сиб. матем. журн.*, **34**:2 (1993), 135—145.

[18] Ю. А. Дубинский, “Нелинейные эллиптические и параболические уравнения”, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж.*, **9** (1976), 1–130.

[19] Ж. Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972, 587 с.

[20] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967, 736 с.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 3 июля 2013

Podgaev A. G., Lisenkov K. V. Solvability of a quasi-linear parabolic equation in the domain with a piecewise monotone boundary. Far Eastern Mathematical Journal. 2013. V. 13. № 2. P. 250–272.

ABSTRACT

We investigate the existence of regular solutions for the quasilinear parabolic equation in non-cylindrical domain with a boundary of class W_2^1. The equation can degenerate but point degenerates depend from solution. Approximate solutions are constructed using the projection method of the family of projectors depending on the time parameter. We prove that a limit of these solutions will be the solution of the problem. To justify the existence of the limit solution are used compactness methods functions from scale of Banach spaces.

Key words: *existence, a quasi-linear parabolic equation, non-cylindrical domains, the projection method, the compactness, the scale of Banach spaces*