

УДК 517.95

MSC2010 35K55, 35Q79

© Г. В. Гренкин, А. Ю. Чеботарев<sup>1</sup>

## Устойчивость стационарных решений диффузионной модели сложного теплообмена

Рассмотрена нестационарная модель радиационно-конвективно-кондуктивного теплообмена в трехмерной области в рамках диффузионного  $P_1$ -приближения для уравнения переноса излучения. Установлены достаточные условия асимптотической устойчивости стационарных состояний.

Ключевые слова: уравнения радиационного теплообмена, диффузионное приближение, нелокальная разрешимость, асимптотическая устойчивость.

### 1. Введение

Интегро-дифференциальное уравнение переноса излучения, учитывающее тепловые эффекты, имеет следующий вид [1]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I(x, \omega, t)}{\partial t} + \omega \cdot \nabla_x I(x, \omega, t) + \kappa I(x, \omega, t) = \\ = \frac{\kappa_s}{4\pi} \int_S P(\omega, \omega') I(x, \omega', t) d\omega' + \kappa_a \frac{\sigma n^2 T^4(x, t)}{\pi}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $x \in \Omega$  — точка пространства  $\mathbb{R}^3$ ,  $\omega \in S$  — направление излучения, связанное с точкой единичной сферы  $S = \{\omega \in \mathbb{R}^3 : |\omega| = 1\}$ ,  $I(x, \omega, t)$  — интенсивность излучения,  $T(x, t)$  — температура,  $P(\omega, \omega')$  — фазовая функция,  $c$  — скорость света в среде,  $\kappa = \kappa_s + \kappa_a$  — коэффициент полного взаимодействия, где  $\kappa_s$  — коэффициент рассеяния,  $\kappa_a$  — коэффициент поглощения,  $\sigma$  — постоянная Стефана–Больцмана,  $n$  — показатель преломления.

<sup>1</sup>Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7; Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8. Электронная почта: cheb@iam.dvo.ru

Для получения диффузионного ( $P_1$ ) приближения рассмотрим линейное приближение функции распределения плотности излучения и фазовой функции (с учетом обезразмеривания переменных):

$$I(x, \omega, t) \simeq \frac{\sigma n^2}{\pi} T_{\max}^4 (\varphi(x, t) + \omega \cdot \Phi(x, t)), \quad (2)$$

$$P(\omega, \omega') = 1 + A\omega \cdot \omega'. \quad (3)$$

В (3) коэффициент  $A \in [-1, 1]$  описывает анизотропию рассеяния, случай  $A = 0$  соответствует изотропному рассеянию.

Пусть  $T = T_{\max}\theta$ . Таким образом,  $\theta$  — это нормализованная температура,  $\varphi$  — нормализованная интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям.

Подставив (2) и (3) в (1), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \omega \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \omega \cdot \nabla_x (\varphi + \omega \cdot \Phi) + \kappa (\varphi + \omega \cdot \Phi) = \\ = \kappa_s \left( \varphi + \frac{1}{3} A\omega \cdot \Phi \right) + \kappa_a \theta^4. \end{aligned} \quad (4)$$

Проинтегрируем (4) по  $\omega \in S$ . Тогда

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{3} \nabla \cdot \Phi + \kappa_a \varphi = \kappa_a \theta^4. \quad (5)$$

Умножим (4) на  $\omega$  и проинтегрируем полученное равенство по  $\omega \in S$ .

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (\kappa'_s + \kappa_a) \Phi + \nabla \varphi = 0. \quad (6)$$

Здесь  $\kappa'_s = \kappa_s (1 - A/3)$ .

Разрешив уравнения (5) и (6) относительно  $\varphi$ , получим уравнение  $P_1$  приближения

$$-\alpha \Delta \varphi + \kappa_a \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{3\alpha \kappa_a}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{3\alpha}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \kappa_a \theta^4 + \frac{3\alpha \kappa_a}{c} \frac{\partial (\theta^4)}{\partial t},$$

где  $\alpha = \frac{1}{3(\kappa'_s + \kappa_a)} = \frac{1}{3\kappa - A\kappa_s}$ .

В работе [1] приведены физические соображения, основанные на малости величин  $\nu = 1/c$  и  $\kappa_a$ , позволяющие отбросить в последнем уравнении последние два слагаемых в левой части и последнее слагаемое в правой части. Кроме того, учтем, что в силу неотрицательности температуры нелинейный член  $\theta^4$  можно заменить на  $|\theta|\theta^3$ . В результате получаем для  $\varphi$  следующее параболическое уравнение:

$$\nu \partial \varphi / \partial t - \alpha \Delta \varphi + \kappa_a (\varphi - |\theta|\theta^3) = 0. \quad (7)$$

Соответствующее уравнение для нормализованной температуры  $\theta$  имеет следующий вид [2]:

$$\partial \theta / \partial t - a \Delta \theta + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta + b \kappa_a (|\theta|\theta^3 - \varphi) = 0. \quad (8)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  – заданное поле скоростей,  $a = \frac{k}{\rho c_v}$  – постоянный коэффициент теплопроводности,  $b = \frac{4\sigma n^2 T_{\max}^3}{\rho c_v}$ , где  $k$  – теплопроводность,  $c_v$  – удельная теплоемкость,  $\rho$  – плотность.

Дополнив уравнения (7), (8) условиями на границе  $\Gamma = \partial\Omega$  и при  $t = 0$ , получим следующую начально-краевую задачу, моделирующую радиационный, кондуктивный и конвективный теплообмен в ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ :

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - a\Delta\theta + \mathbf{v} \cdot \nabla\theta + b\kappa_a(|\theta|^3 - \varphi) = 0, \quad \nu \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|^3) = 0, \quad (9)$$

$$a\partial_n\theta + \beta(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_\Gamma = 0, \quad (10)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0. \quad (11)$$

Здесь через  $\partial_n$  обозначаем производную в направлении внешней нормали  $\mathbf{n}$ . Неотрицательная функция  $\theta_b$ , функции  $\beta(x)$ ,  $\gamma(x)$ ,  $x \in \Gamma$ , описывающие, в частности, отражающие свойства границы, и начальные функции  $\theta_0$ ,  $\varphi_0$  являются заданными.

Интерес к задачам сложного теплообмена в рассеивающих средах с отражающими границами связан с прикладной значимостью этих задач, и соответственно значительное внимание уделяется вопросам численного моделирования (см., например, [3]–[10]). Теоретический анализ соответствующих краевых задач важен для оценки соответствия рассматриваемых моделей радиационного теплообмена реальным физическим процессам. Анализу различных эволюционных задач, учитывающих радиационный теплообмен, посвящены работы [11]–[15]. В [10], [16]–[19] получены условия разрешимости стационарных задач сложного теплообмена. Отметим также работы [20]–[24], в которых представлена хорошая библиография работ, посвященных сложному теплообмену.

Настоящая статья посвящена исследованию устойчивости стационарного решения, которое не обязательно является постоянным. Устойчивость по Ляпунову имеет принципиальное значение в связи с вопросом об адекватности стационарных моделей сложного теплообмена, анализу которых посвящено значительное количество работ.

Основной результат статьи состоит в получении достаточных условий устойчивости, которые обеспечиваются малым разбросом значений стационарного температурного поля. Кроме того, для модели движения среды в канале показано, что выполнение достаточного условия устойчивости можно обеспечить за счет выбора скорости движения среды, даже если разброс значений температуры не мал.

## 2. Корректность начально-краевой задачи сложного теплообмена

В дальнейшем считаем, что  $\Omega$  – липшицева ограниченная область,  $Q = \Omega \times (0, T)$ ,  $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$ . Через  $L^p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  обозначаем пространство Лебега, а через  $H^s$  – пространство Соболева  $W_2^s$ . Пространство  $L^s(0, T; X)$  состоит из функций

класса  $L^s$ ,  $s \geq 1$ , определенных на  $(0, T)$  со значениями в банаховом пространстве  $X$ . Будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют условиям

- (i)  $\mathbf{v} \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ ;
- (ii)  $\beta, \gamma \in L^\infty(\Gamma)$ ,  $\beta \geq \beta_0 > 0$ ,  $\gamma \geq \gamma_0 > 0$ ,  $\beta_0, \gamma_0 = \text{Const}$ ,  $0 \leq \theta_b \in L^\infty(\Sigma)$ ;
- (iii)  $0 \leq \theta_0, \varphi_0 \in L^\infty(\Omega)$ ;
- (iv)  $\beta + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \geq 0$  на той части  $\Sigma$ , где  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) < 0$ .

Пусть  $H = L^2(\Omega)$ ,  $V = H^1(\Omega)$ . Через  $V'$  обозначаем пространство, сопряженное с пространством  $V$ . Пространство  $H$  отождествляем с пространством  $H'$ , так что  $V \subset H = H' \subset V'$ . Обозначим, соответственно, через  $\|\cdot\|$ ,  $\|\cdot\|_V$  и  $\|\cdot\|_*$  нормы в  $H$ ,  $V$  и  $V'$ , а через  $(f, v)$  – значение функционала  $f \in V'$  на элементе  $v \in V$ , совпадающее со скалярным произведением в  $H$ , если  $f \in H$ ;  $((\cdot, \cdot))$  – скалярное произведение в пространстве  $V$ ;

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx, \quad ((f, g)) = (f, g) + (\nabla f, \nabla g).$$

Отметим сразу, что в силу вложения  $V \subset L^6(\Omega)$  выражение  $(|u|u^3, v)$  имеет смысл для любых функций  $u, v \in V$  и поэтому  $|u|u^3 \in V'$ .

Также определим пространство

$$W = \{y \in L^2(0, T; V) : y' \in L^2(0, T, V')\}.$$

Здесь и далее  $y' = dy/dt$ .

Определим операторы и функционалы  $A_{1,2}: V \rightarrow V'$ ,  $B(t): V \rightarrow V'$ ,  $f_{1,2} \in L^2(0, T; V')$ , используя следующие равенства, справедливые для любых  $\theta, \varphi, v \in V$ :

$$\begin{aligned} (A_1\theta, v) &= a(\nabla\theta, \nabla v) + \int_{\Gamma} \beta\theta v d\Gamma, & (A_2\varphi, v) &= \alpha(\nabla\varphi, \nabla v) + \int_{\Gamma} \gamma\varphi v d\Gamma, \\ (B(t)\theta, v) &= (\mathbf{v}\nabla\theta, v), \\ (f_1, v) &= \int_{\Gamma} \beta\theta_b v d\Gamma, & (f_2, v) &= \int_{\Gamma} \gamma\theta_b^4 v d\Gamma \quad \text{п.в. на } (0, T). \end{aligned}$$

Определенные выше операторы позволяют стандартным образом записать задачу (9)–(11) в виде задачи Коши для системы уравнений с операторными коэффициентами.

**Определение 1.** Пара  $\{\theta, \varphi\} \in W \times W$  называется решением (слабым) задачи (9)–(11), если

$$\theta' + A_1\theta + B(t)\theta + b\kappa_a (|\theta|\theta^3 - \varphi) = f_1 \text{ п.в. на } (0, T), \quad (12)$$

$$v\varphi' + A_2\varphi + \kappa_a (\varphi - |\theta|\theta^3) = f_2 \text{ п.в. на } (0, T), \quad (13)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0. \quad (14)$$

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия (i)–(iv). Тогда на любом конечном промежутке времени  $(0, T)$ ,  $0 < T < \infty$ , задача (9)–(11) однозначно разрешима, при этом слабое решение принадлежит  $L^\infty(Q)$  и удовлетворяет неравенствам  $0 \leq \theta \leq M$ ,  $0 \leq \varphi \leq M^4$ , где  $M = \max \left\{ \|\theta_b\|_{L^\infty(\Sigma)}, \|\theta_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\varphi_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{1/4} \right\}$ .

Доказательство теоремы основано на глобальных априорных оценках решения  $0 \leq \theta \leq M$ ,  $0 \leq \varphi \leq M^4$ . Приведем здесь схему доказательства теоремы. Для получения оценок сверху необходимо умножить уравнение (12) скалярно на функцию  $\eta = \max\{\theta - M, 0\}$ , а уравнение (13) — на функцию  $\psi = \begin{cases} \varphi^{1/4} - M, & \varphi > M^4, \\ 0, & \varphi \leq M^4, \end{cases}$  где  $\{\theta, \varphi\}$  — слабое решение задачи (9)–(11). Отбросив неотрицательные слагаемые, будем иметь

$$\frac{1}{2} \|\eta(t)\|^2 + b\kappa_a \int_0^t \int_{\theta > M, \varphi > M^4} (\theta^4 - \varphi) (\theta - M) dx d\tau \leq 0, \quad (15)$$

$$\int_0^t \int_{\varphi > M^4, \theta > M} (\varphi - \theta^4) (\varphi^{1/4} - M) dx d\tau \leq 0. \quad (16)$$

Умножая (16) на  $b\kappa_a$  и складывая с (15), получим неравенство

$$\frac{1}{2} \|\eta(t)\|^2 + b\kappa_a \int_0^t \int_{\theta > M, \varphi > M^4} (\theta^4 - \varphi) (\theta - \varphi^{1/4}) dx d\tau \leq 0.$$

Из неотрицательности второго слагаемого следует, что  $\eta = 0$ , т.е.  $\theta \leq M$  п.в. в  $Q$ .

Аналогично, выбрав теперь  $\psi = \max\{\varphi - M^4, 0\}$ , из (13) получим, что  $\varphi \leq M^4$  п.в. в  $Q$ . Оценки снизу доказываются аналогичным образом.

Далее с помощью принципа сжимающих отображений стандартно доказывается локальная по времени разрешимость. Затем, исходя из полученных априорных оценок, которые не зависят от величины интервала локального существования, решение задачи можно продолжить на весь временной интервал  $(0, T)$ . Доказательство единственности решения, с учетом его ограниченности в  $L^\infty(Q)$ , стандартно.  $\square$

### 3. Анализ устойчивости стационарного решения

#### 3.1. Устойчивость для произвольной области

Пусть функция  $\theta_b$  и поле скоростей  $\mathbf{v}$  не зависят от времени. Через  $\{\theta_s, \varphi_s\} \in V \times V$  обозначим стационарное состояние эволюционной системы (9)–(10), которое является решением системы операторных уравнений

$$A_1\theta + B\theta + b\kappa_a (|\theta|\theta^3 - \varphi) = f_1, \quad A_2\varphi + \kappa_a (\varphi - |\theta|\theta^3) = f_2 \quad (17)$$

и такое, что  $0 \leq \theta_s \leq M$ ,  $0 \leq \varphi_s \leq M^4$ , где  $M = \|\theta_b\|_{L^\infty(\Gamma)}$ . Отметим, что используя технику оценки слабых решений для уравнений сложного теплообмена, рассмотренную в [18], нетрудно проверить справедливость указанных неравенств для любого решения системы (17).

Для анализа устойчивости рассмотрим функции  $\{\theta, \varphi\}$ , являющиеся решением задачи (9)–(11) на промежутке  $(0, +\infty)$ , соответствующие граничной функции  $\theta_b$  и начальным условиям  $\theta_0 \in L^\infty(\Omega)$ ,  $\varphi_0 \in L^\infty(\Omega)$ ,  $\theta_0 \geq 0$ ,  $\varphi_0 \geq 0$ . Положим  $\zeta = \theta - \theta_s$ ,  $\xi = \varphi - \varphi_s$ . Тогда, используя (17) и учитывая, что  $\theta \geq 0$ , получаем

$$\zeta' + A_1\zeta + B\zeta + b\kappa_a(g(\zeta, x) - \xi) = 0, \quad \nu\xi' + A_2\xi + \kappa_a(\xi - g(\zeta, x)) = 0, \quad (18)$$

$$\zeta|_{t=0} = \zeta_0 = \theta_0 - \theta_s, \quad \xi|_{t=0} = \xi_0 = \varphi_0 - \varphi_s. \quad (19)$$

Здесь  $g(\zeta, x) = (\zeta + \theta_s)^4 - \theta_s^4$ .

Отметим сразу, что величина  $\theta = \zeta + \theta_s$  в силу теоремы 1 ограничена величиной  $M_0 = \max\{\|\theta_b\|_{L^\infty(\Gamma)}, \|\theta_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\varphi_0\|_{L^\infty(\Omega)}^{1/4}\}$ . Поэтому

$$g(\zeta, x) = g(0, x) + g'_\zeta(0, x)\zeta + h(\zeta, x)\zeta^2 = 4\theta_s^3\zeta + h(\zeta, x)\zeta^2, \quad \text{где } |h(\zeta, x)| \leq 6M_0^2.$$

Обозначим  $f = 4\theta_s^3$ . Пусть  $0 \leq \mu_1 = \text{ess inf } f$ ,  $\mu_2 = \text{ess sup } f$ . Покажем, что если значение  $\mu_2 - \mu_1$  достаточно мало, то стационарное состояние  $\{\theta_s, \varphi_s\}$  асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Умножим скалярно первое уравнение в (18) на  $f_0\zeta$ , а второе — на  $b\xi$  и сложим полученные уравнения. Постоянная  $f_0 > 0$  будет выбрана позже.

$$\begin{aligned} & \frac{f_0}{2} \frac{d}{dt} \|\zeta\|^2 + f_0(A_1\zeta, \zeta) + f_0(B\zeta, \zeta) + \\ & + \frac{\nu b}{2} \frac{d}{dt} \|\xi\|^2 + b(A_2\xi, \xi) + b\kappa_a(f\zeta - \xi + h(\zeta, x)\zeta^2, f_0\zeta - \xi) = 0 \quad \text{п.в. на } (0, +\infty). \end{aligned}$$

Используя условие (iv) и учитывая, что  $(\mathbf{v}\nabla\zeta, \zeta) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \zeta^2 d\Gamma$ , получаем

$$\begin{aligned} & \frac{f_0}{2} \frac{d}{dt} \|\zeta\|^2 + f_0 a \|\nabla\zeta\|^2 + \frac{f_0}{2} \int_{\Gamma} \beta \zeta^2 d\Gamma + \frac{\nu b}{2} \frac{d}{dt} \|\xi\|^2 + b \|\nabla\xi\|^2 + b \int_{\Gamma} \gamma \xi^2 d\Gamma + \\ & + b\kappa_a \int_{\Omega} (f\zeta - \xi)(f_0\zeta - \xi) dx \leq 6M_0^2 b\kappa_a \left( f_0 \int_{\Omega} |\zeta|^3 dx + \int_{\Omega} \zeta^2 |\xi| dx \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Пусть

$$\begin{aligned} k_1 &= \inf_{v \in V, \|v\|=1} \left( a \|\nabla v\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \beta v^2 d\Gamma \right), \quad k_2 = \inf_{v \in V, \|v\|=1} \left( \alpha \|\nabla v\|^2 + \int_{\Gamma} \gamma v^2 d\Gamma \right), \\ k_3 &= \inf_{v \in V, \|v\|_{L^6(\Omega)}=1} \left( a \|\nabla v\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \beta v^2 d\Gamma \right). \end{aligned}$$

Указанные постоянные положительны и зависят только от  $a, \alpha, \beta, \gamma$  и области  $\Omega$ .

Заметим, что для любого  $\varepsilon > 0$

$$\int_{\Omega} |\zeta|^3 dx \leq \|\zeta\|^{3/2} \|\zeta\|_{L^6(\Omega)}^{3/2} \leq \frac{3}{4} \varepsilon \|\zeta\|_{L^6(\Omega)}^2 + \frac{1}{4\varepsilon^3} \|\zeta\|^6, \quad (21)$$

$$\int_{\Omega} \zeta^2 |\xi| dx \leq \|\zeta\|^{1/2} \|\zeta\|_{L^6(\Omega)}^{3/2} \|\xi\| \leq \frac{3}{4} \varepsilon \|\zeta\|_{L^6(\Omega)}^2 + \frac{1}{4\varepsilon^3} \|\zeta\|^2 \|\xi\|^4. \quad (22)$$

Выберем параметр  $\rho \in (0, 1)$  и воспользуемся оценкой

$$a \|\nabla \zeta\|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \beta \zeta^2 d\Gamma \geq (1 - \rho) k_1 \|\zeta\|^2 + \rho k_3 \|\zeta\|_{L^6(\Omega)}^2.$$

Тогда если  $9M_0^2 b \kappa_a \varepsilon / 2k_3 < \rho f_0 / (f_0 + 1)$ , то из (20) следует неравенство

$$\begin{aligned} f_0 \frac{d}{dt} \|\zeta\|^2 + \nu b \frac{d}{dt} \|\xi\|^2 + 2(1 - \rho) f_0 k_1 \|\zeta\|^2 + 2b k_2 \|\xi\|^2 \\ + 2b \kappa_a \int_{\Omega} (f\zeta - \xi)(f_0\zeta - \xi) dx \leq C (\|\zeta\|^6 + \|\zeta\|^2 \|\xi\|^4), \end{aligned} \quad (23)$$

где  $C = 3M_0^2 b \kappa_a \max\{f_0, 1\} / \varepsilon^3$ .

Пусть  $C_1, C_2$  — положительные постоянные такие, что

$$b \kappa_a C_1 < (1 - \rho) k_1, \quad \kappa_a C_2 < k_2. \quad (24)$$

Запишем неравенство (23) в виде

$$\begin{aligned} f_0 \frac{d}{dt} \|\zeta\|^2 + \nu b \frac{d}{dt} \|\xi\|^2 + f_0 (2(1 - \rho) k_1 - 2b \kappa_a C_1) \|\zeta\|^2 + (2b k_2 - 2b \kappa_a C_2) \|\xi\|^2 + \\ + 2b \kappa_a \int_{\Omega} (f_0 C_1 \zeta^2 + C_2 \xi^2 + (f\zeta - \xi)(f_0\zeta - \xi)) dx \leq C (\|\zeta\|^6 + \|\zeta\|^2 \|\xi\|^4). \end{aligned} \quad (25)$$

Для неотрицательности интеграла в (25) достаточно, чтобы квадратичное выражение под знаком интеграла было неотрицательным для любого  $f \in [\mu_1, \mu_2]$ . Достаточное условие неотрицательности имеет вид

$$(f + f_0)^2 - 4f_0(C_1 + f)(C_2 + 1) \leq 0,$$

или

$$f_0^2 - 2[(2C_2 + 1)f + 2C_1(C_2 + 1)]f_0 + f^2 \leq 0.$$

Последнее неравенство выполняется для любого числа  $f \in [\mu_1, \mu_2]$ , если

$$f_0^2 - 2[(2C_2 + 1)\mu_i + 2C_1(C_2 + 1)]f_0 + \mu_i^2 \leq 0, \quad i = 1, 2. \quad (26)$$

Система неравенств (26) имеет решение  $f_0 > 0$ , если

$$f_2 = (2C_2 + 1)\mu_2 + 2C_1(C_2 + 1) - \sqrt{D_2} \leq (2C_2 + 1)\mu_1 + 2C_1(C_2 + 1) + \sqrt{D_1} = f_1.$$

Здесь

$$D_i = [(2C_2 + 1)\mu_i + 2C_1(C_2 + 1)]^2 - \mu_i^2 = 4(C_2 + 1)(\mu_i + C_1)(C_2\mu_i + C_1(C_2 + 1)).$$

Поэтому при выполнении условия

$$(2C_2 + 1)(\mu_2 - \mu_1) \leq \sqrt{D_1} + \sqrt{D_2} \quad (27)$$

интеграл в (25) будет неотрицательным при любом  $f_0 \in [f_2, f_1]$ . Далее в качестве  $f_0$  выберем, например, наименьшее возможное значение  $f_2$ .

Можно получить более простые достаточные условия неотрицательности интеграла в (25). Для этого оценим  $D_i$ . Заметим, что

$$D_i \geq 4 \left( \sqrt{C_2(C_2 + 1)}\mu_i + C_1(C_2 + 1) \right)^2.$$

Таким образом, для выполнения (27) достаточно, чтобы

$$(2C_2 + 1)(\mu_2 - \mu_1) \leq 2\sqrt{C_2(C_2 + 1)}(\mu_1 + \mu_2) + 4C_1(C_2 + 1). \quad (28)$$

Заменив в (28)  $\sqrt{C_2(C_2 + 1)}$  на  $C_2$ , получим другое достаточное условие неотрицательности интеграла:

$$\mu_2 - \mu_1 \leq 4(C_2\mu_1 + C_1 + C_1C_2). \quad (29)$$

Для существования постоянных  $C_1$  и  $C_2$ , которые удовлетворяют (24) при некотором  $\rho$  и для которых выполняется условие (29), достаточно, чтобы

$$\mu_2 - \mu_1 < \frac{4}{\kappa_a} \left( k_2\mu_1 + \frac{k_1}{b} + \frac{k_1k_2}{b\kappa_a} \right). \quad (30)$$

Аналогичные условия на физические параметры и постоянные вложения  $k_1, k_2$  можно получить и для достаточных условий (27) и (28).

Вернемся к неравенству (25), в котором отбросим неотрицательный интеграл. Пусть

$$p(t) = f_0\|\zeta(t)\|^2 + \nu b\|\xi(t)\|^2, \quad t \geq 0.$$

Поскольку  $\|\zeta\|^2\|\xi\|^4 \leq \|\zeta\|^6/3 + 2\|\xi\|^6/3$ , то из (25) при выполнении условия (30) или аналогичного условия следует неравенство

$$p'(t) + 2k_4p(t) \leq k_5p^3(t), \quad t > 0, \quad (31)$$

где  $k_4 = \min\{(1 - \rho)k_1 - b\kappa_a C_1, (k_2 - \kappa_a C_2)/\nu\}$ ,  $k_5 = C \max\{4f_0^{-3}, 2(\nu b)^{-3}\}/3$ . Неравенство (31) запишем в виде

$$p'(t) + k_4p(t) + k_5p(t)(k_4/k_5 - p^2(t)) \leq 0,$$

и тогда, если  $p^2(0) < k_4/k_5$ , то  $p'(t) + k_4p(t) \leq 0$  при  $t > 0$ . Следовательно, справедлива оценка экспоненциальной устойчивости

$$p(t) \leq p(0)e^{-k_4t}, \quad t > 0.$$



**Теорема 2.** Пусть выполняются условия (i)–(iv),  $0 \leq \mu_1 \leq 4\theta_s^3 \leq \mu_2$ , справедливо неравенство (30) и при этом

$$f_0 \|\theta_0 - \theta_s\|^2 + \nu b \|\varphi_0 - \varphi_s\|^2 < (k_4/k_5)^{1/2},$$

где  $\{\theta_s, \varphi_s\} \in V \times V$  — решение стационарной системы (17).

Тогда существует единственное решение  $\{\theta, \varphi\}$  динамической системы

$$\theta' + A_1\theta + B\theta + b\kappa_a (|\theta|\theta^3 - \varphi) = f_1, \quad \nu\varphi' + A_2\varphi + \kappa_a (\varphi - |\theta|\theta^3) = f_2, \quad \{\theta, \varphi\}|_{t=0} = \{\theta_0, \varphi_0\}$$

такое, что  $\{\theta, \varphi\} \in L^\infty(0, +\infty; H)$ ,  $\{\theta, \varphi\}|_{(0, T)} \in L^2(0, T; V)$ ,  $\{\theta', \varphi'\}|_{(0, T)} \in L^2(0, T; V')$  для всех  $T > 0$  и при этом

$$f_0 \|\theta - \theta_s\|^2 + \nu b \|\varphi - \varphi_s\|^2 \leq (f_0 \|\theta_0 - \theta_s\|^2 + \nu b \|\varphi_0 - \varphi_s\|^2) e^{-k_4 t}, \quad t > 0.$$

### 3.2. Анализ устойчивости при движении среды в канале

Рассмотрим теперь движение среды в канале  $\Omega$  длиной  $L$ , поперечное сечение которого является квадратом со стороной  $d$ :

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2, x_3) : 0 < x_1 < L, 0 < x_{2,3} < d\}.$$

Пусть среда движется с постоянной скоростью  $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ ,  $v > 0$ . Покажем, что в этом случае решение задачи сложного теплообмена экспоненциально стабилизируется, если скорость течения  $v$  достаточно большая. Полагаем в равенствах (18)

$$\zeta = (\lambda - e^{-sx_1})q_1, \quad \xi = (\lambda - e^{-sx_1})q_2.$$

В качестве тестовых функций выберем

$$v_1 = f_0(\lambda - e^{-sx_1})^{-1}q_1, \quad v_2 = b(\lambda - e^{-sx_1})^{-1}q_2.$$

Здесь  $\lambda > 1$ ,  $s > 0$ ,  $f_0 > 0$ .

Учитывая условие (iv), получаем из (18) неравенства:

$$\begin{aligned} & \frac{f_0}{2} \frac{d}{dt} \|q_1\|^2 + (1-\rho)f_0k_1\|q_1\|^2 + \rho f_0k_3\|q_1\|_{L^6(\Omega)}^2 + f_0 \int_{\Omega} \left( \frac{vs}{\lambda e^{sx_1} - 1} - \frac{as^2}{(\lambda e^{sx_1} - 1)^2} \right) q_1^2 dx + \\ & + b\kappa_a f_0 \int_{\Omega} (fq_1^2 - q_1q_2) dx \leq 6M_0^2 b\kappa_a f_0 \int_{\Omega} (\lambda - e^{-sx_1}) |q_1|^3 dx, \\ & \frac{\nu b}{2} \frac{d}{dt} \|q_2\|^2 + bk_2\|q_2\|^2 - b \int_{\Omega} \frac{\alpha s^2}{(\lambda e^{sx_1} - 1)^2} q_2^2 dx + \\ & + b\kappa_a \int_{\Omega} (q_2^2 - fq_1q_2) dx \leq 6M_0^2 b\kappa_a \int_{\Omega} (\lambda - e^{-sx_1}) q_1^2 |q_2| dx, \end{aligned}$$

где  $\rho \in (0, 1)$ , постоянные  $M_0, k_1, k_2, k_3$  определяются, как и ранее. Отсюда

$$\begin{aligned} & \frac{f_0}{2} \frac{d}{dt} \|q_1\|^2 + \frac{\nu b}{2} \frac{d}{dt} \|q_2\|^2 + (1 - \rho) f_0 k_1 \|q_1\|^2 + b k_2 \|q_2\|^2 + \\ & + f_0 \left( \frac{\nu s}{\lambda e^{sL} - 1} - \frac{a s^2}{(\lambda - 1)^2} \right) \|q_1\|^2 - \frac{b \alpha s^2}{(\lambda - 1)^2} \|q_2\|^2 + b \kappa_a \int_{\Omega} (f_0 q_1 - q_2)(f q_1 - q_2) dx + \\ & + \rho f_0 k_3 \|q_1\|_{L^6(\Omega)}^2 \leq 6 M_0^2 b \kappa_a (\lambda - e^{-sL}) \left( f_0 \int_{\Omega} |q_1|^3 dx + \int_{\Omega} q_1^2 |q_2| dx \right). \end{aligned}$$

Применив неравенства (21) и (22) и выбрав  $\varepsilon$  таким образом, что  $9 M_0^2 b \kappa_a \varepsilon (\lambda - e^{-sL}) / 2 k_3 < \rho f_0 / (f_0 + 1)$ , получим

$$\begin{aligned} & f_0 \frac{d}{dt} \|q_1\|^2 + \nu b \frac{d}{dt} \|q_2\|^2 + 2 f_0 r_1 \|q_1\|^2 + 2 b r_2 \|q_2\|^2 + \\ & + 2 b \kappa_a \int_{\Omega} (f_0 q_1 - q_2)(f q_1 - q_2) dx \leq C (\|q_1\|^6 + \|q_1\|^2 \|q_2\|^4), \end{aligned}$$

где  $C = 3 M_0^2 b \kappa_a (\lambda - e^{-sL}) \max\{f_0, 1\} / \varepsilon^3$ ,  $r_1 = (1 - \rho) k_1 + \frac{\nu s}{\lambda e^{sL} - 1} - \frac{a s^2}{(\lambda - 1)^2}$ ,

$r_2 = k_2 - \frac{\alpha s^2}{(\lambda - 1)^2}$ . Обозначим  $r = k_1 + \frac{\nu s}{\lambda e^{sL} - 1} - \frac{a s^2}{(\lambda - 1)^2}$ .

Положив, например,  $s = 1/L$ ,  $\lambda = 1 + s \sqrt{2\alpha/k_2}$ , будем иметь

$$r = k_1 + \frac{\nu}{L(e - 1) + e \sqrt{2\alpha/k_2}} - \frac{a k_2}{2\alpha}, \quad r_2 = \frac{k_2}{2}.$$

Рассуждения, аналогичные приведенным в п. 3.1, показывают, что для неотрицательности интеграла в последнем неравенстве и, соответственно, для устойчивости стационарного состояния  $\{\theta_s, \varphi_s\}$  достаточно, чтобы были справедливы неравенства

$$\mu_2 - \mu_1 < \frac{4}{\kappa_a} \left( r_2 \mu_1 + \frac{r}{b} + \frac{r r_2}{b \kappa_a} \right), \quad r > 0. \quad (32)$$

Поскольку величина  $r$  линейно растет при увеличении  $\nu$ , устойчивость можно обеспечить не только за счет малости разброса значений стационарного состояния, но и за счет выбора скорости движения среды.

### 3.3. Заключительные замечания

Вопрос об устойчивости стационарных решений задачи сложного теплообмена, для которых не выполняются полученные выше достаточные условия, является пока открытым. Серия проведенных вычислительных экспериментов показала существование стационарных полей, для которых достаточные условия устойчивости не выполняются, но тем не менее решение эволюционной задачи стабилизируется. В качестве примера приведем результаты расчетов для слоя толщиной  $L$ . Считаем, что физические поля меняются только в направлении, перпендикулярном

границам слоя. Соответствующая одномерная задача имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} - a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + b \kappa_a (\theta^4 - \varphi) &= 0, & \nu \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \kappa_a (\varphi - \theta^4) &= 0, \\ -a \frac{\partial \theta}{\partial x} + \beta_1 (\theta - \theta_{b1}) \Big|_{x=0} &= 0, & a \frac{\partial \theta}{\partial x} + \beta_2 (\theta - \theta_{b2}) \Big|_{x=L} &= 0, \\ -\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \gamma_1 (\varphi - \theta_{b1}^4) \Big|_{x=0} &= 0, & \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \gamma_2 (\varphi - \theta_{b2}^4) \Big|_{x=L} &= 0, \\ \theta|_{t=0} &= \theta_0, & \varphi|_{t=0} &= \varphi_0. \end{aligned}$$

Значения физических параметров соответствуют данным из [19]. Пусть  $L = 5$ ,  $\alpha = 3 \cdot 10^8$ ,  $\kappa_a = 0.01$ ,  $c = 3 \cdot 10^8$ . Все термодинамические характеристики соответствуют воздуху при нормальном атмосферном давлении и температуре  $400^\circ\text{C}$ , так что  $a = 0.0001356$ ,  $b = 0.184$ . Положим  $\beta_1 = \beta_2 = 10$ , рассмотрим 3 случая:

- 1)  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.01$ ,  $\theta_{b1} = 0.1$ ,  $\theta_{b2} = 1$ ;
- 2)  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.01$ ,  $\theta_{b1} = 0.1$ ,  $\theta_{b2} = 1.2$ ;
- 3)  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ ,  $\theta_{b1} = 0.2$ ,  $\theta_{b2} = 1$ .

Все значения указаны в единицах СИ.

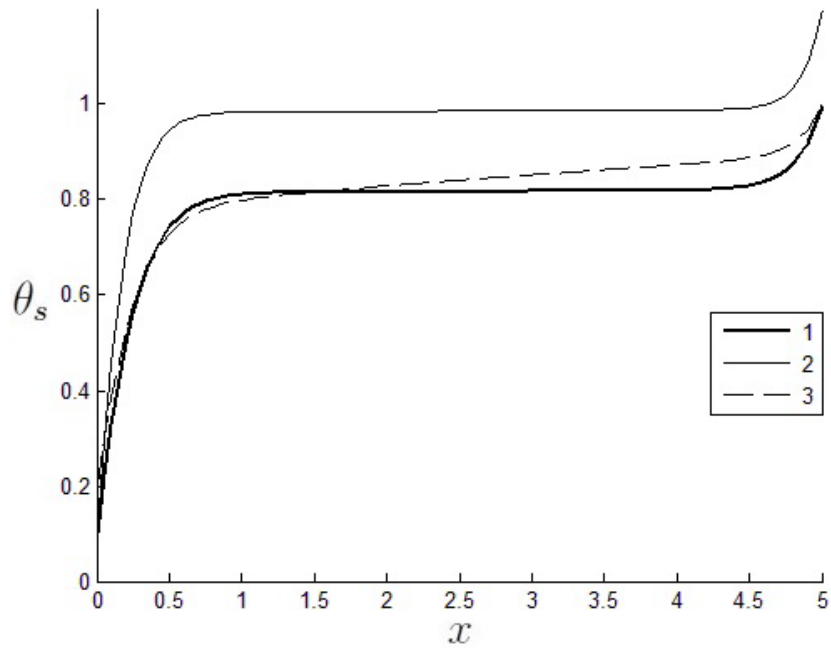
Для численного решения системы используется метод прямых, реализованный в пакете MATLAB [25], который заключается в сведении дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Полученная система ОДУ решается при помощи неявного многошагового метода для жестких систем.

Для проверки достаточного условия устойчивости (27) используем следующие оценки постоянных  $k_1$ ,  $k_2$ :

$$\begin{aligned} \left( 2L \max \left\{ \frac{2}{\beta}, \frac{2L}{a} \right\} \right)^{-1} &\leq k_1 \leq \min \left\{ \frac{\beta}{L}, \frac{a\pi^2}{L^2} \right\}, \\ \left( 2L \max \left\{ \frac{1}{\gamma}, \frac{2L}{\alpha} \right\} \right)^{-1} &\leq k_2 \leq \min \left\{ \frac{2\gamma}{L}, \frac{\alpha\pi^2}{L^2} \right\}. \end{aligned}$$

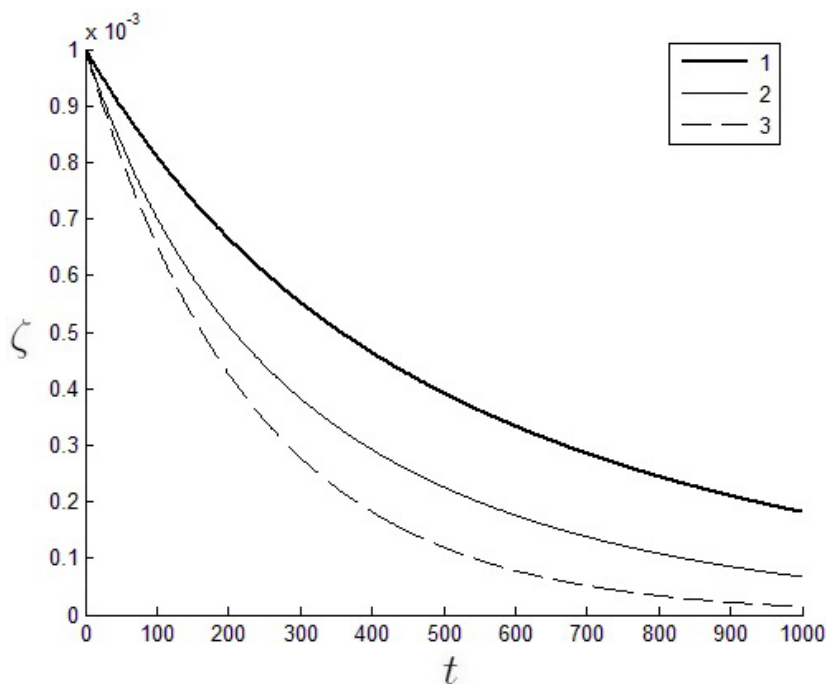
Оказывается, что в случаях 1) и 2) для стационарного температурного поля  $\theta_s$ , график которого представлен на рис. 1, условие (27) не выполняется, а в случае 3) условие (27) выполняется.

Однако представленные на рис. 2, 3 графики временных зависимостей отклонений температуры ( $\zeta$ ) и усредненной интенсивности излучения ( $\xi$ ) от стационарных распределений в центральном сечении слоя демонстрируют стабилизацию решения эволюционной задачи.

Рис. 1. Стационарное распределение температуры  $\theta_s$ 

В качестве начальных условий использовались квадратичные функции с максимумом 0.001 при  $x = L/2$ :

$$\zeta_0(x) = 0.001 \frac{x(L-x) + aL/\beta}{L^2/4 + aL/\beta}, \quad \xi_0(x) = 0.001 \frac{x(L-x) + \alpha L/\gamma}{L^2/4 + \alpha L/\gamma}.$$

Рис. 2. Отклонение температуры ( $\zeta$ ) от стационарного распределения при  $x = L/2$

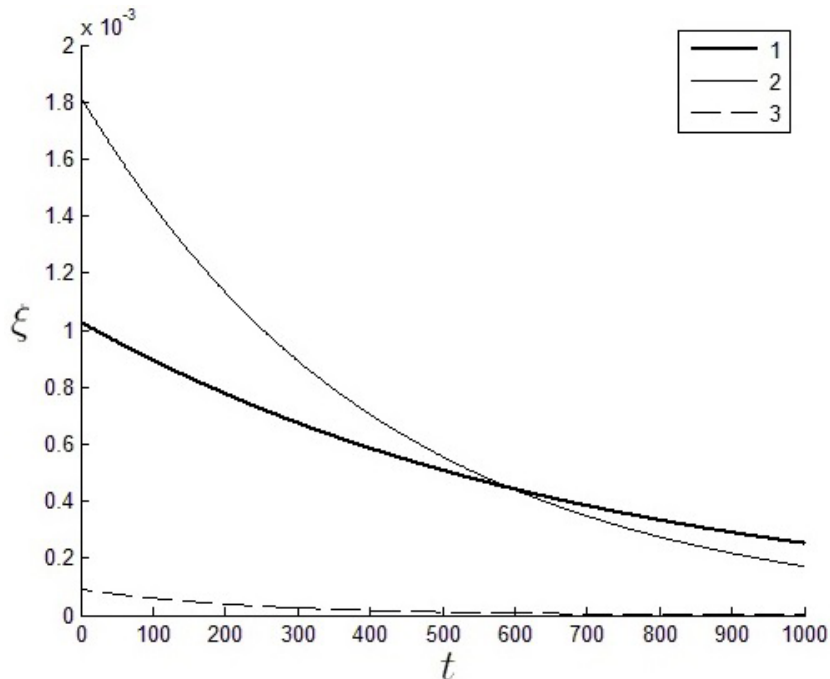


Рис. 3. Отклонение интенсивности излучения ( $\xi$ ) от стационарного распределения при  $x = L/2$

## Список литературы

- [1] D. A. Boas, *Diffuse photon probes of structural and dynamical properties of turbid media: theory and biomedical applications*, A Ph.D. Dissertation in Physics, University of Pennsylvania, 1996.
- [2] M. F. Modest, *Radiative Heat Transfer*, Academic Press, 2003.
- [3] S. E. Siewert, “An improved iterative method for solving a class of coupled conductive-radiative heat-transfer problems”, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer.*, **54**:4 (1995), 599–605.
- [4] J. M. Banoczi, C. T. Kelley, “A fast multilevel algorithm for the solution of nonlinear systems of conductive-radiative heat transfer equations”, *SIAM J. Sci. Comput.*, **19**:1 (1998), 266–279.
- [5] A. Klar, N. Siedow, “Boundary layers and domain decomposition for radiative heat transfer and diffusion equations: applications to glass manufacturing process”, *Eur. J. Appl. Math.*, **9**:4 (1998), 351–372.
- [6] G. Thömes, R. Pinnau, M. Seaid, T. Götz, A. Klar, “Numerical methods and optimal control for glass cooling processes”, *Trans. Theory Stat. Phys.*, **31**:4-6 (2002), 513–529.
- [7] R. Pinnau, M. Seaid, “Simplified PN Models and Natural Convection–Radiation”, *Math. in Industry*, **V. 12** (2008), 397–401..
- [8] A. E. Kovtanyuk, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, “Numerical simulations of a coupled conductive-radiative heat transfer model using a modified Monte Carlo method”, *Int. J. Heat and Mass Transfer.*, **55** (2012), 649–654.
- [9] А. Е. Ковтанюк, “Алгоритмы параллельных вычислений для задач радиационно-кондуктивного теплообмена”, *Компьютерные исследования и моделирование*, **4**:3 (2012), 543–552.
- [10] А. Е. Kovtanyuk, А. Ю. Chebotarev, “An iterative method for solving a complex heat transfer problem”, *Appl. Math. Comput.*, **219** (2013), 956–9362.

- 
- [11] А. А. Амосов, “Глобальная разрешимость одной нелинейной нестационарной задачи с нелокальным краевым условием типа теплообмена излучением”, *Дифференциальные уравнения*, **41**:1 (2005), 93–104.
- [12] R. Pinnau, “Analysis of Optimal Boundary Control for Radiative Heat Transfer Modelled by the  $SP_1$ -System”, *Comm. Math. Sci.*, **5**:4 (2007), 951–969.
- [13] P.-E. Druet, “Existence of weak solutions to the time-dependent MHD-equations coupled to heat transfer with nonlocal radiation boundary conditions”, *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, **10**:5 (2009), 2914–2936.
- [14] B. Ducomet, S. Necasova, “Global Weak Solutions to the 1D Compressible Navier-Stokes Equations with Radiation”, *Commun. Math. Anal.*, **8**:3 (2010), 23–65.
- [15] O. Tse, R. Pinnau, N. Siedow, “Identification of temperature dependent parameters in laser-interstitial thermo therapy”, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **22**:9 (2012), 1–29.
- [16] C. T. Kelley, “Existence and uniqueness of solutions of nonlinear systems of conductive-radiative heat transfer equations”, *Transport Theory Statist. Phys.*, **25**:2 (1996), 249–260.
- [17] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, “The unique solvability of a complex 3D heat transfer problem”, *J. Math. Anal. Appl.*, **409**:2 (2014), 808–815.
- [18] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, “Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive-convective-radiative heat transfer”, *J. Math. Anal. Appl.*, **412**:1 (2014), 520–528.
- [19] А. Е. Ковтанюк, А. Ю. Чеботарев, “Стационарная задача сложного теплообмена”, *Ж. вычисл. матем. физ.*, **54**:4 (2014), 191–199.
- [20] А. А. Амосов, “О разрешимости одной задачи теплообмена излучением”, *Докл. АН СССР*, **245**:6 (1979), 1341–1344.
- [21] M. T. Laitinen, T. Tiihonen, “Heat transfer in conducting, radiating and semitransparent materials”, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **21** (1998), 375–392.
- [22] M. Laitinen, “Asymptotic analysis of conductive-radiative heat transfer”, *Asymptotic Analysis*, **29**:3-4 (2002), 323–342.
- [23] А. А. Амосов, “Stationary nonlinear nonlocal problem of radiative-conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on the radiation frequency”, *Journal of Mathematical Sciences*, **164**:3 (2010), 309–344.
- [24] А. А. Амосов, “Nonstationary nonlinear nonlocal problem of radiative-conductive heat transfer in a system of opaque bodies with properties depending on the radiation frequency”, *Journal of Mathematical Sciences*, **165**:1 (2010), 1–41.
- [25] *Partial Differential Equations — MATLAB & Simulink*.  
<http://www.mathworks.com/help/matlab/math/partial-differential-equations.html>.

*Grenkin G. V., Chebotarev A. Yu.* The stability of steady-state solutions of the diffusion complex heat transfer model. Far Eastern Mathematical Journal. 2014. V. 14. № 1. P. 18–32.

#### ABSTRACT

The nonstationary model of radiative-convective-conductive heat transfer in a three-dimensional domain within the diffusion  $P_1$  approximation of radiative transfer is considered. The sufficient conditions of asymptotic stability of steady states are established.

Key words: *radiative heat transfer equations, diffusion approximation, nonlocal solvability, asymptotic stability.*