Дальневосточный математический журнал. 2014. Том 14. № 1. С. 33–40

УДК 539.3 514
MSC2010 74A05 53B50

© А. И. Гудименко, М. А. Гузев[1]

Об инвариантной форме записи закона сохранения массы

Теория расслоенных пространств используется для представления закона сохранения массы в форме, инвариантной относительно координатных преобразований в пространстве-времени. Предлагается обобщенная формулировка закона, основанная на переходе от обычного дифференцирования к ковариантному. Обсуждаются возможные физические интерпретации обобщенной формулировки.

Ключевые слова: *законы сохранения, производная Ли, расслоения, ковариантная производная.*

Введение

Хорошо известно [1], что при решении задач механики сплошных сред предполагается выполнение законов сохранения, которые являются необходимым ограничением для используемых моделей. Например, полученный в [1] эффективный метрический тензор удовлетворяет классическому закону сохранения массы, хотя сам тензор имеет неклассическую, в частности, неевклидову структуру. Этот пример указывает на то, что поля деформаций могут обладать некоторыми скрытыми свойствами, которые напрямую, при классической формулировке закона сохранения массы, не проявляются.

В связи с необходимостью конструировать новые модели механики сплошных сред естественно поставить задачу о представлении закона сохранения массы в форме, не зависящей от выбора геометрии описания модели. Подходящий для формулировки закона математический аппарат в настоящее время хорошо развит и составляет ядро современной дифференциальной геометрии [2–7].

В данной работе показано, что полученная инвариантная форма записи закона сохранения массы допускает естественное обобщение, связанное с переходом к ковариантному дифференцированию. Предложенная нами формальная реализация закона имеет физический смысл и в отдельных случаях эквивалентна наложению на сплошную среду дополнительных кинематических ограничений.

[1]Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Балтийская, 43; Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: aldud@poi.dvo.ru

1. Основная идея решения проблемы

Известно [8], что в локальной форме закон сохранения массы имеет вид

$$\frac{\partial\sqrt{|g_e|}\rho}{\partial t}+\frac{\partial\sqrt{|g_e|}\rho u^i}{\partial x^i}=0, \tag{1}$$

где g_e — евклидов метрический тензор в $\mathbb{R}^3$, $|g_e| = |\det((g_e)_{ij})|$, ρ — плотность массы, u^i — компоненты скорости в системе отсчета (t, x^i). Формулировка (1) является инвариантной относительно координатных преобразований вида $t = t'$, $x^i = x^i(t', x^{i'})$ [8, раздел 164]. При этом авторы [8] рассматривают левую часть (1) как дивергенцию в пространстве-времени. Однако несмотря на использование указанного дифференциального оператора, геометрическая структура закона (1) не была до конца выявлена.

На то, что при переходе к инвариантной форме записи законов сохранения возникают специальные геометрические структуры, указывают построения, приведенные, например, в [2, § 8.3.6]. Дело в том, что с точки зрения физики при конструировании отображений исследуемых тензорных объектов из начального состояния в конечное важно сохранение их тензорного характера. На этом пути возникает производная Ли, не меняющая типа тензоров.

Поскольку уравнение (1) имеет дивергентный вид, следует ожидать, что бескоординатно оно будет выглядеть как производная Ли вдоль поля 4-скорости сплошной среды (см. раздел 3) от подходящей 4-формы на пространстве-времени. В качестве кандидата на 4-форму можно рассматривать произведение ρ на 4-мерный элемент объема. Однако последнего в классическом (нерелятивистском) пространстве-времени нет, а вместо него в каждый момент времени задан пространственный элемент объема $\omega = \sqrt{|g_e|}dx^1dx^2dx^3$, который не является инвариантным относительно координатных преобразований, включающих время.

Данная трудность преодолевается переходом к представлению области пространства-времени, занятой сплошной средой, как расслоения $\pi\colon X \to I$, где X — пространство событий, отвечающее рассматриваемой области, $I \subset \mathbb{R}$ — соответствующий этой области интервал времени и π — проекция, ставящая в соответствие каждому событию $x \in X$ момент времени $\pi(x)$, когда оно произошло. На расслоениях объекты, к которым относятся g_{ij} и ω, известны как вертикальные тензорные поля и характеризуются тем, что определены послойно [7]. Оказывается, что некоторым вертикальным тензорным полям можно поставить в соответствие тензорные поля на X, которые инвариантны относительно расслоенных координатных преобразований. В частности, элементу объема ω отвечает хорошо определенная форма объема Ω на пространстве-времени.

Уточняя определение области пространства-времени, занятой сплошной средой, будем считать, что X ориентируемо и снабжено вертикальной римановой метрикой (римановой метрикой на слоях)

$$g\colon X \to V^*X \otimes V^*X. \tag{2}$$

где $V^*X \to X$ — расслоение, дуальное к вертикальному касательному расслоению $VX \to X$ [7]. Будем называть X *пространственно-временным континуумом.*

Наглядно расслоение $\pi\colon X \to I$ представляется в виде семейства слоев $\pi^{-1}(t)$, $t \in I$, как показано на рис. 1. Совокупность всех касательных векторов к этим слоям (вертикальная стрелочка на рисунке) вместе с естественной проекцией на X образует вертикальное касательное расслоение $VX \to X$. Произвольный касательный вектор к X, то есть элемент касательного расслоения $TX \to X$, показан на рисунке трансверсальной к слою стрелочкой.

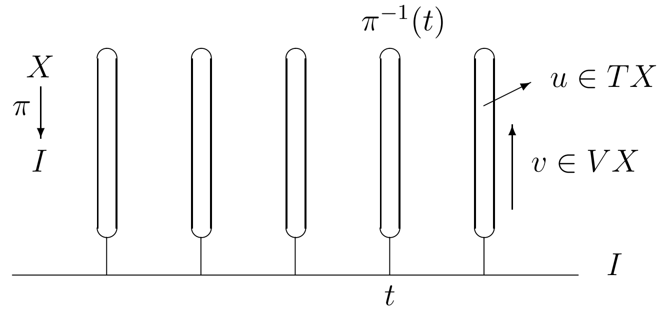

Рис. 1.

Вообще вертикальные векторы $v \in VX$ определяются условием $\pi_*(v) = 0$, где π_* — касательное отображение — линейная часть π. Действуя на обе части этого равенства 1-формой dt на I, получаем $dt(\pi_*(v)) = 0$ или, что эквивалентно, $\pi^*(dt)(v) = 0$, где π^* — отображение дуальное к π_* [9]. Введенная 1-форма $\pi^*(dt)$ на X называется *формой времени* и традиционно обозначается dt. Использование одного и того же символа для формы на I и отвечающей ей формы на X не приводит к недоразумениям.

2. Построение формы объема на пространственно-временном континууме

Подчеркнем, что элемента объема на X в классическом понимании [2] не существует, поскольку на X не определена метрика. В основе нашей конструкции элемента объема лежит специальное соответствие между вертикальными и обычными формами на X.

Напомним [7], что вертикальными векторными полями $X \to VX$ называются произвольные сечения вертикального касательного расслоения $VX \to X$, а вертикальными формами $X \to \bigwedge^p V^*X$ — произвольные сечения расслоения $\bigwedge^p V^*X \to X$, внешней степени $p = 0, 1, 2, 3$ вертикального кокасательного расслоения.

Для произвольной вертикальной p-формы α на X определим $p+1$-форму $dt \wedge \alpha$ на X, полагая

$$dt \wedge \alpha = dt \wedge \beta,$$

где β — произвольное *продолжение* α на X, то есть p-форма на X, совпадающая с α на вертикальных векторных полях. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *1) Форма $dt \wedge \alpha$ определена корректно, то есть не зависит от выбора продолжения β.*

2) Отображение $\alpha \to dt \wedge \alpha$ инъективно.

Доказательство приведено в Приложении. Отображение $\alpha \to dt \wedge \alpha$ устанавливает желаемое соответствие между вертикальными и обычными формами на X.

На X при фиксированной ориентации определена *вертикальная форма объема*

$$\omega\colon X \to \overset{3}{\wedge} V^*X$$

с координатным представлением

$$\omega = \sqrt{|g|}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3,$$

где g — введенная ранее вертикальная риманова метрика (2) на X и $|g| = |\det(g_{ij})|$. Тогда на X определена 4-форма $\Omega = dt \wedge \omega$. Будем рассматривать эту форму в качестве элемента объема на X. В координатах

$$\Omega = dt \wedge \omega = \sqrt{|g|}\, dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3. \tag{3}$$

3. Инвариантная форма закона сохранения массы

Положим $\mu = \rho\, dt \wedge \omega$, где ρ — неотрицательная гладкая функция на X. Сохранение μ вдоль потока векторного поля u на X выражается равенством

$$L_u \mu = 0, \tag{4}$$

где L_u — производная Ли вдоль u. Покажем, что уравнение (4) при определенных ограничениях на u выражает закон сохранения массы, если ρ интерпретировать как плотность массы сплошной среды, а u — как поле 4-скоростей сплошной среды.

Напомним [9], что производной Ли от формы α вдоль векторного поля u называется выражение

$$L_u \alpha = \frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} \phi_\tau^*(\alpha) = \lim_{\tau \to 0} \frac{\phi_\tau^*(\alpha) - \alpha}{\tau},$$

где ϕ_τ — поток поля u. Рис. 2 иллюстрирует вычисление величины

$$\phi_\tau^*(\alpha)|_x = \phi_\tau^*(\alpha|_{\phi_\tau(x)}),$$

которая является значением $\phi_\tau^*(\alpha)$ в произвольной точке $x \in X$. Взяв $\alpha|_x$, мы двигаемся по потоку до $\alpha|_{\phi_\tau(x)}$, а затем возвращаемся в точку x с помощью кокасательного отображения ϕ_τ^*.

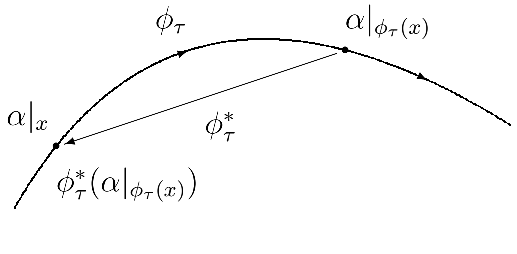

Рис. 2.

В уравнении (4) u является произвольным векторным полем на X. Однако не всякому векторному полю на X можно поставить в соответствие поле скоростей сплошной среды. Выделим класс векторных полей на X, характеризующихся условием $dt(u) = 1$, и назовем такие поля *нормированными векторными полями* или, если речь идет о сплошной среде, — *полями 4-скоростей* сплошной среды. Такие 4-скорости сплошной среды используют авторы [8]. В координатах (t, x^i) нормированное векторное поле имеет вид

$$u = \frac{\partial}{\partial t} + u^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{5}$$

Пространственные компоненты поля (5) мы интерпретируем как поле 3-скоростей движения сплошной среды в системе отсчета (t, x^i).

Следующее утверждение устанавливает связь уравнения (4) с законом сохранения массы.

Теорема 1. *Пусть u — нормированное векторное поле на X и g — вертикальная локально евклидова метрика. В произвольных координатах (t, x^i) уравнение* (4) *имеет вид* (1), *где u^i — пространственные компоненты поля u.*

Доказательство. Используем известное [9] представление производной Ли в виде (анти)коммутатора:

$$L_u = [u\rfloor, d] = u\rfloor \circ d + d \circ u\rfloor, \tag{6}$$

где $u\rfloor$ — оператор внутреннего умножения форм на u и d — внешний дифференциал форм. Поскольку $d\mu = 0$, то условие (4) принимает вид $d(u\rfloor\mu) = 0$. В произвольных координатах, используя (3), имеем

$$u\rfloor\mu = \rho\sqrt{|g|}[dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + dt \wedge (-u^1 dx^2 \wedge dx^3 + u^2 dx^1 \wedge dx^3 - u^3 dx^1 \wedge dx^2)],$$

$$d(u\rfloor\mu) = \Big(\frac{\partial\sqrt{|g|}\rho}{\partial t} + \frac{\partial\sqrt{|g|}\rho u^i}{\partial x^i}\Big) dt \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Приравнивая правую часть последнего равенства нулю, получаем (1). □

4. Обобщенная форма закона сохранения массы

Выше, при доказательстве теоремы, использовалось представление производной Ли вдоль векторного поля u в виде коммутатора (6). Фигурирующие в этом коммутаторе операторы $u\rfloor$ и d являются *дифференцированиями*, то есть они линейны и подчиняются правилу Лейбница. В частности, d является дифференцированием, удовлетворяющим условиям [9]:

1) $d^2 = 0$,

2) на функциях d совпадает с обычным дифференциалом.

Если отказаться от этих условий, то в соответствии с (6) получим обобщение производной Ли и, как следствие, новую математическую реализацию закона сохранения массы.

Снятие с d указанных ограничений приводит к известному понятию ковариантного внешнего дифференциала. В литературе (см., например, [5, 6]) он определяется сразу для векторнозначных форм, то есть форм со значениями в векторном расслоении, и отождествляется с понятием связности на векторном расслоении (Koszul Connection).

Обозначим $\bigwedge^p X$ совокупность всех дифференциальных p-форм на X. *Ковариантный внешний дифференциал* — это произвольное линейное отображение

$$D\colon \overset{p}{\wedge} X \to \overset{p+1}{\wedge} X, \quad p = 0, 1, \ldots, n,$$

подчиненное «правилу Лейбница»

$$D(\alpha \wedge \beta) = D\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d\beta \tag{7}$$

для любых форм α и β на X. Заменяя в (6) символ d на D, получаем обобщение классической производной Ли — *ковариантную производную Ли* вдоль векторного поля u:

$$L_u^D = [u\rfloor, D] = u\rfloor \circ D + D \circ u\rfloor.$$

Ковариантный внешний дифференциал и ковариантная производная Ли связаны со своими классическими аналогами следующими простыми соотношениями.

Утверждение 1. *1) Для любой формы α на X*

$$D\alpha = d\alpha + D(1) \wedge \alpha, \tag{8}$$

так что внешний ковариантный дифференциал полностью определяется 1-формой $D(1)$, которая может быть произвольной.

2) Справедливо тождество

$$L_u^D = L_u + u\rfloor D(1). \tag{9}$$

Доказательство формулы (8) основано на применении правила (18) к $D(1 \wedge \alpha)$, а соотношение (9) проверяется непосредственно.

Заменим теперь производную Ли L_u в формуле (4) на ковариантную производную Ли L_u^D. В результате получаем следующую обобщенную формулировку закона сохранения массы:

$$L_u^D \mu = 0. \tag{10}$$

5. Физическая интерпретация

Пусть закон сохранения массы выполняется в классической и обобщенной трактовках. Тогда из (4), (9) и (10) следует соотношение

$$u\rfloor D(1) = 0. \tag{11}$$

Полагая

$$D(1) = a_0 dt + a_i dx^i, \tag{12}$$

из (11) получаем

$$a_0 + u^i a_i = 0. \tag{13}$$

Отсюда видно, что использование ковариантной производной D приводит к дополнительным кинематическим ограничениям на поток. Например, если $D(1) = d\sigma$, то есть форма $D(1)$ является точной, то из (13) следует

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + u^i \frac{\partial \sigma}{\partial x^i} = 0. \tag{14}$$

Условие (14) представляет собой ограничение на скорость потока при заданной системе гиперповерхностей $\sigma = \mathrm{const}$ в X. Подчинение потока таким ограничениям использовалось, например, при постановке вариационных задач динамики баротропной жидкости [10].

Следует также обратить внимание на интерпретацию уравнения (10) как закона сохранения массы в среде со специальным распределенным источником:

$$L_u \mu = -u \rfloor D(1)\mu. \tag{15}$$

Действительно, в евклидовых координатах соотношение (15) с учетом (12) записывается в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^i}{\partial x^i} = \rho s, \quad s = -a_0 - u^i a_i,$$

и совпадает с классическим выражением [8, формула (157.4)] для закона сохранения массы при наличии источника.

Приложение

Обозначим $\mathrm{pr}\,\alpha$ продолжение α на X.

Утверждение 2. *Для любой формы β на X*

$$\beta = \mathrm{pr}\,0 \Leftrightarrow dt \wedge \beta = 0. \tag{16}$$

Доказательство. В координатах произвольная $(p+1)$-форма β имеет вид

$$\beta = dt \wedge \beta_I dx^I + \beta_J dx^J, \tag{17}$$

где $I = i_1 \dots i_p$ и $J = j_1 \dots j_{p+1}$ — мультииндексы, $dx^I = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ и $dx^J = dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{p+1}}$. Для доказательства прямой импликации в (16) предположим, что $\beta = 0$ на вертикальных векторных полях. Тогда второе слагаемое в правой части равенства (17) равно нулю, поскольку первое слагаемое на вертикальных векторных полях равно нулю тождественно. Таким образом, $\beta = dt \wedge \beta_I dx^I$ и, следовательно, $dt \wedge \beta = 0$. Для доказательства обратной импликации считаем, что $dt \wedge \beta = 0$. Тогда $dt \wedge \beta_J dx^J = 0$ и поэтому $\beta_J dx^J = 0$. Таким образом, $\beta = dt \wedge \beta_I dx^I$ и, следовательно, $\beta = 0$ на вертикальных векторных полях. □

Для доказательства утверждения 1) леммы 1 требуется показать, что

$$\forall\beta_1 = \mathrm{pr}\,\alpha\,\forall\beta_2 = \mathrm{pr}\,\alpha\quad dt\wedge\beta_1 = dt\wedge\beta_2. \tag{18}$$

Легко понять, что (18) эквивалентно

$$\forall\beta = \mathrm{pr}\,0\quad dt\wedge\beta = 0,$$

а последнее следует из (16). Для доказательства утверждения 2) леммы 1 требуется показать, что $dt\wedge\alpha\Rightarrow\alpha = 0$, то есть что

$$\forall\beta\ (dt\wedge\beta = 0\Rightarrow\beta = \mathrm{pr}\,0).$$

Но последнее также есть следствие (16).

Список литературы

[1] С. К. Годунов, Е. И. Роменский, *Элементы механики сплошных сред и законы сохранения*, Научная книга, Новосибирск, 1998.

[2] С. П. Новиков, И. А. Тайманов, *Современные геометрические структуры и поля*, МЦНМО, М, 2005.

[3] М. М. Постников, *Лекции по геометрии. Семестр IV. Дифференциальная геометрия. Учеб. пособие для вузов*, Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., М, 1988.

[4] I. Kolár, P. Michor, J. Slovák, *Natural operations in differential geometry*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1993.

[5] R. Darling, *Differential Forms and Connections*, Cambridge University Press, 1994.

[6] R. Palais, *The geometrization of physics*, National Tsing Hua University, Hsinchu, Taiwan, 1981.

[7] D. Saunders, *The Geometry of Jet Bundles*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.

[8] C. Truesdell, R. Toupin, *The classical field theories. In Encyclopedia of Physics edited by S. Flugge*, Springer-Verlag, Berlin, Gottingen, Heidelberg, 1960.

[9] F. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer, Berlin, 1983.

[10] В. Л. Бердичевский, *Вариационные принципы механики сплошной среды*, Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., М, 1983.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 25 марта 2014 г.

Работа выполнена при частичной поддержке программы «Дальний Восток»

Gudimenko A. I., Guzev M. A. On invariant form of the mass conservation law. Far Eastern Mathematical Journal. 2014. V. 14. № 1. P. 33–40.

ABSTRACT

The theory of fiber bundles is used for representation of the mass conservation law in a form that is invariant under general transformations of the four space-time coordinates. A generalized formulation of the law is proposed on the base of transition to covariant differentiation. Some physical interpretations of the generalized formulation are discussed.

Key words: *conservation laws, Lie derivative, bundles, covariant derivative.*