Дальневосточный математический журнал. 2014. Том 14. № 1. С. 41–47

УДК 517.983.8
MSC2010 46B70

© М. А. Гузев[1]

Спектральные характеристики поля самоуравновешенных напряжений

Исследуется класс самоуравновешенных полей напряжений сплошной среды, параметризуемых функцией напряжений. Предлагается рассматривать эту функцию как элемент спектра бигармонического оператора. Для цилиндрического образца и различных типов краевых условий построены спектральные характеристики оператора.

Ключевые слова: *самоуравновешенные поля напряжений, неевклидова модель сплошной среды, бигармоническое уравнение*

1. Постановка задачи

При моделировании различных физических явлений исследователям часто приходится решать проблему вычисления спектральных характеристик оператора, соответствующего рассматриваемой задаче. Последние зависят от структуры этого оператора и условий, определяемых физическими требованиями исследуемой проблемы. В данной работе мы будем изучать спектральные характеристики оператора равновесия в механике сплошной среды, приводящего к самоуравновешенным (self-balanced) полям напряжений. Потребность в решении таких задач для тел различной формы обусловлена использованием получаемых результатов в различных исследовательских областях [1–6]. В технике самоуравновешенные поля называют остаточными (residual) напряжениями, и необходимость их изучения явно подчеркнута в процессе анализа инженерных проблем при измерении уровня внутренних напряжений в сварных конструкциях [7, 8]. Получение аналитических решений важно и актуально для разработки методов уточненного прочностного анализа, для тестирования численных алгоритмов решения задач и других приложений.

Хорошо известно, что дифференциальные условия равновесия при отсутствии массовых сил внутри объема V материала совпадают с уравнениями Коши:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \tag{1}$$

[1]Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: guzev@iam.dvo.ru

подразумевается, что по любой паре повторяющихся индексов $i, j = 1, 2, 3$ выполняется суммирование. Самоуравновешенными полями σ_{ij} называются решения уравнения (1), удовлетворяющие краевым условиям

$$\int\limits_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j dS = 0, \tag{2}$$

где Γ — поверхность, ограничивающая произвольный объем внутри материала. Класс этих решений достаточно широк [9], однако мы рассмотрим случай минимальной параметризации, определяемой одной функцией F. Рассмотрим набор функций T_{ij}, задаваемых формулой

$$T_{ij} = \delta_{ij} \Delta F - \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{3}$$

Ясно, что T_{ij} удовлетворяют системе уравнений (1). В справедливости выполнения краевого условия (2) нетрудно убедиться, если (3) переписать в виде

$$T_{ij} = \varepsilon_{ikp} \varepsilon_{jsq} \frac{\partial^2 g_{ks}}{\partial x_p \partial x_q} = [\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\, g)_i]_j, \qquad g_{ks} = \delta_{ks} F, \tag{4}$$

(ε_{ikp} — символ Леви–Чивита) и подставить (4) в (2). В результате получим интеграл от нормальной компоненты ротора по замкнутой поверхности, который равен нулю в силу теоремы Стокса.

Выбор уравнения для определения функции F зависит от типа модели сплошной среды. В классической теории упругости величина $F = F_{cl}$ называется функцией напряжения и удовлетворяет бигармоническому уравнению $\Delta^2 F_{cl} = 0$. В неевклидовой модели сплошной среды [10] объект F допускает интерпретацию как скалярная кривизна связности на многообразии, порождаемом внутренней дефектной структурой материала. При этом в стационарном случае соответствующее уравнение для F имеет вид

$$\Delta^2 F = \lambda^2 F \tag{5}$$

с некоторым феноменологическим параметром λ. Соотношение (5) является спектральным уравнением для бигармонического оператора, при этом классическая функция напряжений соответствует значению параметра $\lambda = 0$.

Для вычисления спектральных характеристик бигармонического оператора необходимо сформулировать дополнительные условия, учитывающие геометрию рассматриваемой среды. С этой целью рассмотрим в качестве материала цилиндр с высотой $2h$ и радиусом $r = R$. Выберем систему координат, в которой ось z совпадает с осью образца, а начало координат располагается в его середине. Поскольку цилиндр находится в равновесии, то суммарная сила на его поверхности обращается в нуль. С точки зрения физики естественно потребовать обращение в нуль суммарной силы на торце образца и его боковой поверхности по отдельности. Условие на торце записывается в следующем виде:

$$\int\limits_0^R r dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi T_{iz} \Bigg|_{z=\pm h} = 0. \tag{6}$$

Обращение в нуль суммарной силы на боковой поверхности цилиндра дается соотношением

$$\int\limits_{-h}^{h} dz \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi T_{ir}\Big|_{r=R} = 0. \tag{7}$$

Возможно задавать смешанные краевые условия, полагая на торцах образца поточечное обращение в нуль касательных напряжений и усредненного по радиусу значения нормальных напряжений. Тогда вместо (6), (7) следует записать

$$T_{z\varphi}\big|_{z=\pm h} = 0, \quad T_{zr}\big|_{z=\pm h} = 0, \quad \int\limits_{0}^{R} rdrT_{zz}\Big|_{z=\pm h} = 0, \quad \int\limits_{-h}^{h} dz \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi T_{ir}\Big|_{r=R} = 0. \tag{8}$$

Таким образом, задача вычисления спектральных характеристик бигармонического оператора связана с построением решения уравнения (5), которое определяет самоуравновешенное поле напряжений, обладающее дополнительным свойством (6), (7) или (8).

2. Структура решения для F

Представим (5) в виде

$$(\Delta - \lambda)(\Delta + \lambda) F = 0. \tag{9}$$

Введем в рассмотрение функции $F^{\pm}$, удовлетворяющие уравнениям

$$(\Delta + \lambda) F^{+} = 0, \qquad (\Delta - \lambda) F^{-} = 0. \tag{10}$$

Справедливо утверждение: решение уравнения (9) представляет линейную комбинацию функций $F^{\pm}$. Действительно, из (9) следует, что

$$(\Delta + \lambda) F^{+} = \alpha F^{-} \tag{11}$$

с некоторым произвольным коэффициентом α. Общее решение (11) дается формулой

$$F = (\Delta + \lambda)^{-1} F^{-} + \alpha F^{+}. \tag{12}$$

Учитывая второе уравнение (10), можно переписать первое слагаемое в (12) следующим образом:

$$(\Delta + \lambda)^{-1} F^{-} = (\Delta + \lambda)^{-1} \frac{\Delta F^{-}}{\lambda} = \frac{F^{-}}{\lambda} - (\Delta + \lambda)^{-1} F^{-}.$$

Отсюда и из (12) получаем

$$F = \frac{F^{-}}{2\lambda} + \alpha F^{+}. \tag{13}$$

Формула (13) соответствует доказываемому утверждению.

В цилиндрической системе координат рассмотрим частные решения $F^{\pm}_{nq}$ уравнения (10) в виде $F^{\pm}_{nq} = y^{\pm}_{nq}(r)\cos(n\phi + \phi_0)\cos qz$ с неизвестной функцией $y^{\pm}_{nq}(r)$. Подстановка $F^{\pm}_{nq}$ в (10) дает уравнение для цилиндрической функции $Z_n(kr)$

$$\frac{\partial^2 y^{\pm}_{nq}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial y^{\pm}_{nq}}{\partial r} + \left(\pm\lambda - q^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) y^{\pm}_{nq} = 0, \qquad y^{\pm}_{nq} = Z_n(kr), \quad k = \sqrt{\pm\lambda - q^2}. \tag{14}$$

Аргумент $Z_n(kr)$ может быть вещественным и мнимым, но мы рассмотрим решения, удовлетворяющие естественному, с точки зрения физики, требованию отсутствия особенности на оси $r = 0$.

Вещественные значения аргумента k соответствуют выбору параметра $\lambda > q^2$ и $+\lambda > 0$. Тогда решение y^{+}_{nq}, обладающее свойством регулярного поведения при $r = 0$, имеет осциллирующий характер и определяется через функцию Бесселя J_n:

$$y^{+}_{nq} = J_n(kr). \tag{15}$$

Мнимые значения аргумента k достигаются при $+\lambda < q^2$ и $-\lambda < 0$. Тогда

$$y^{\pm}_{nq} = I_n(|k|r), \tag{16}$$

где $I_n(x)$ — цилиндрическая функция мнимого аргумента.

3. Построение решения

В цилиндрической системе координат компоненты поля (3) равны

$$\begin{aligned}
T_{rr} &= \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \quad T_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) \quad T_{rz} = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial z},\\
T_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \qquad T_{z\varphi} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right), \quad T_{zz} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Функции T_{ij}, соответствующие $F^{\pm}_{nq}$, даются формулами:

$$\begin{aligned}
T_{rr} &= \left(\frac{1}{r}\frac{dy^{\pm}_{nq}}{dr} - \frac{n^2}{r^2}y^{\pm}_{nq} - q^2 y^{\pm}_{nq}\right)\cos(n\varphi + \varphi_0)\cos qz,\\
T_{r\varphi} &= n\frac{d}{dr}\left(\frac{y^{\pm}_{nq}}{r}\right)\sin(n\varphi + \varphi_0)\cos qz,\\
T_{rz} &= q\frac{d}{dr}\left(y^{\pm}_{nq}\right)\cos(n\varphi + \varphi_0)\sin qz.
\end{aligned} \tag{18}$$

Рассмотрим поля с номером $n = 0$. Краевое условие (6) для T_{rz}, $T_{\varphi z}$ приводит к требованию $\sin qh = 0$, откуда получаем дискретный набор для параметра q:

$$q_m = \frac{\pi m}{h}, \qquad m \geq 1. \tag{19}$$

Интегральное условие (7) для T_{ir}, вычисленных по формулам (17), (18), выполняется тождественно, а условие (6) для T_{zz} редуцируется к виду

$$\int\limits_0^R y_{0q}^{\pm} r dr = 0. \tag{20}$$

Поскольку функция $y_{0q}^{\pm}$ (16) является монотонной, то она не может удовлетворить условию (20). Тогда выполнение требования (20) можно обеспечить за счет выбора функции y_{0q}^{+} (15). Учитывая в (20) соотношение для цилиндрических функций

$$\frac{d}{dz}(zJ_1(z)) = zJ_0(z), \tag{21}$$

получаем следующее условие

$$J_1(kR) = 0. \tag{22}$$

Из (22) видно, что параметр k не может быть произвольным, а определяется корнями z_{1s} функции Бесселя $J_1(z)$: $k_s = z_{1s}/R,\ s \geq 1$. Это позволяет, используя (14), получить представление для спектрального параметра

$$\lambda_{0m}(s) = \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2 + \left(\frac{z_{1s}}{R}\right)^2. \tag{23}$$

При $n \geq 1$ функции (17), (18) удовлетворяют всем краевым условиям (6), (7) тождественно, поэтому дополнительной информации о структуре спектра получить нельзя.

Подставим решения (17), (18) в краевые условия (8). Необходимость выполнения первых два из них приводят к тому же дискретному набору (19) для q_m. Интегральное условие (8) для T_{ir} удовлетворяется тождественно. Интегральное требование (8) для T_{zz} после подстановки решения (17) приводит к соотношению

$$\int\limits_0^R rJ_n(kr)dr = \frac{1}{k^2}\int\limits_0^{kR} zJ_n(z)dz = 0. \tag{24}$$

Чтобы вычислить интеграл (24), воспользуемся соотношением для цилиндрических функций

$$zJ_n(z) = z\frac{dJ_{n+1}(z)}{dz} + (n+1)J_{n+1}(z), \tag{25}$$

которое совпадает с (21) при $n = 0$. Проинтегрировав (25), найдем

$$\int\limits_0^a zJ_n(z)dz = aJ_{n+1}(a) + n\int\limits_0^a J_n(z)dz. \tag{26}$$

Подставляя (26) в (24), получаем уравнение для определения k:

$$kRJ_{n+1}(kR) + n\int\limits_0^{kR} J_n(z)dz = 0. \tag{27}$$

Можно выполнить асимптотический анализ поведения корней k в пределе $kR \to +\infty$. В этом случае

$$\int\limits_0^{kR} J_n(z)dz = \int\limits_0^{\infty} J_n(z)dz + \int\limits_{\infty}^{kR} J_n(z)dz = 1 + O\left(1/\sqrt{k}R\right). \tag{28}$$

Из (27), (28) следует, что с точностью до $O\left(n/\sqrt{kR}\right)$ корни k определяются из уравнения

$$J_{n+1}(kR) = 0. \tag{29}$$

Ясно, что (29) совпадает с (22) при $n = 0$. Асимптотическое поведение корней $z_{(n+1)s}$ функции Бесселя $J_{n+1}(z)$ дается формулой $z_{(n+1)s} \approx \pi(n+2)/2 + \pi/4 + \pi s$. Тогда, используя (14), получаем представление для спектрального параметра

$$\lambda_{nm}(s) \approx \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2 + \left(\frac{z_{(n+1)s}}{R}\right)^2 \approx \left(\frac{\pi m}{h}\right)^2 + \frac{1}{R^2}\left(\frac{\pi}{2}(n+2) + \frac{\pi}{4} + \pi s\right)^2.$$

Любопытно заметить, что в общем случае интегральное условие для T_{zz} приводит к соотношению

$$\int\limits_0^R rJ_n(kr)dr = R^2\left(\frac{kR}{2}\right)^n \frac{1}{(n+2)n!}\,{}_1F_2\left(1+\frac{n}{2}, 2+\frac{n}{2}, n+1, -(kR)^2\right) = 0,$$

где ${}_1F_2\left(a_1, b_1, b_2, x\right)$ — обобщенный гипергеометрический ряд. Отсюда видно, что k определяется корнями x_{sn} функции ${}_1F_2\left(a_1, b_1, b_2, x\right)$, исследование которых является отдельной задачей.

Список литературы

[1] K. S. Alan, S. D. Akbarov, “The Self-Balanced Shear Stresses in the Elastic Body with a Locally Curved Covered Fiber”, *Advances in Mechanical Engineering*, **2010** (2010), 1–14.

[2] I. P. Mazur, S. M. Bel’skii, “The St Venant Zone Extent of the Self-Balancing Longitudinal Elastic”, *Materials Science Forum*, **704–705** (2011), 33–39.

[3] A. Carpinteri, L. Montanari, A. Spagnoli, *Fatigue Fractal Crack Propagating in a Self-Balanced Microstress Field*, http://www.gruppofrattura.it/ocs/index.php/esis/CP2012/paper/view/9206.

[4] A. Perelmuter,V. I. Slivker, *Numerical Structural Analysis: Methods, Models and Pitfalls*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2003, 501 с.

[5] S. D. Akbarov, A. N. Guz, *Mechanics of Curved Composites*, Kluwer Academic Publishers, 2001, 448 с.

[6] Zongjin Li, *Advanced Concrete Technology*, John Wiley & Sons, 2011, 624 с.

[7] G. H. Farrahi, G. Z. Voyiadjis, S. H. Hoseini, E. Hosseinian, “Residual Stress Analysis of the Autofrettaged Thick-Walled Tube Using Nonlinear Kinematic Hardening”, *Journal of Pressure Vessel Technology*, **135**:2 (2013).

[8] S. Feli, M. E. A. Aaleagha, M. Foroutan, E. B. Farahani, “Finite Element Simulation of Welding Sequences Effect on Residual Stresses in Multipass Butt-Welded Stainless Steel Pipes”, *Journal of Pressure Vessel Technology*, **134**:1 (2011).

[9] V. P. Myasnikov, M. A. Guzev, A. A. Ushakov, “Structure of self-balanced stresses in continuum”, *FEMJ*, **3**:2 (2002), 231–241.

[10] M. A. Guzev, “Structure of Kinematic and Force Field in the Riemannian Coninuum Model”, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, **52**:5 (2011), 709–716.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 9 января 2014 г.

Guzev M. A. Spectral characteristics of the self-balanced stress fields. Far Eastern Mathematical Journal. 2014. V. 14. № 1. P. 41–47.

ABSTRACT

We investigate a class of self-balanced stress fields which is parameterized by a stress function. The fuction is considered to be an element of the spectrum of the biharmonic operator. For different types of boundary conditions we constructed the spectral characteristics of the operator.
Key words: *self-balanced stress fields, non-Euclidean continuum model, biharmonic equation*