Дальневосточный математический журнал. 2014. Том 14. № 1. С. 48–65

УДК 517.95
MSC2010 35B65, 35H10, 35Q99

© А. И. Кожанов, С. В. Потапова[1]

Задача Дирихле для одного класса уравнений составного типа с разрывным коэффициентом при старшей производной

В работе исследована разрешимость задачи Дирихле в классах регулярных или почти регулярных решений для уравнения с разрывным знакопеременным коэффициентом. Методом регуляризации и методом продолжения по параметру доказаны теоремы существования и единственности.

Ключевые слова: *уравнения составного типа с разрывным коэффициентом, регулярная разрешимость.*

1. Постановка задачи

Пусть Ω есть ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей Γ, Q есть цилиндр $\Omega \times (-T, T)$ с $0 < T < +\infty$, $S = \Gamma \times (-T, T)$ есть его боковая граница, $a^{ij}(x)$ с $i, j = 1, \dots, n$, $a_0(x)$ — заданные при $x \in \overline{\Omega}$ функции, $f(x,t)$ — функция, заданная при $(x,t) \in \overline{Q}$, $h(t)$ — разрывная функция такая, что $h(t) > 0$ при $t > 0$, $h(t) < 0$ при $t < 0$ и $h(t) \in C^1([-T, 0])$, $h(t) \in C^1([0, T])$, $h(+0) \neq h(-0)$, функции $\alpha_k(x)$, $\beta_k(x)$, $k = \overline{1,4}$, заданы при $x \in \overline{\Omega}$ и векторы $(\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x), \alpha_4(x))$, $(\beta_1(x), \beta_2(x), \beta_3(x), \beta_4(x))$ линейно независимы при всех $x \in \overline{\Omega}$.

Обозначим

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a^{ij}(x) u_{x_j}) + a_0(x) u,$$

$Q^+ = \{(x,t) : (x,t) \in Q, t > 0\}$, $Q^- = \{(x,t) : (x,t) \in Q,\ t < 0\}$, $Q_1 = Q^+ \cup Q^-$.

Краевая задача: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся на множестве Q решением уравнения*

$$u_{tt} - h(t)\Delta u_t + Lu = f(x,t) \tag{1}$$

[1]Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 630090, г. Новосибирск, пр. ак. Коптюга, 8; Научно-исследовательский институт математики СВФУ, 677010, г. Якутск, ул. Кулаковского, 48. Электронная почта: kozhanov@math.nsc.ru, sargyp@inbox.ru

и такую, что для нее выполняются граничные условия

$$u(x,t)\big|_S = 0, \tag{2}$$

$$u(x,T) = u(x,-T) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

а также условия сопряжения

$$\alpha_1(x)u(x,+0) + \alpha_2(x)u(x,-0) + \alpha_3(x)u_t(x,+0) + \alpha_4(x)u_t(x,-0) = 0, \tag{4}$$

$$\beta_1(x)u(x,+0) + \beta_2(x)u(x,-0) + \beta_3(x)u_t(x,+0) + \beta_4(x)u_t(x,-0) = 0. \tag{5}$$

Уравнение (1) принадлежит к классу уравнений, называемых в последнее время уравнениями соболевского типа. Эти уравнения исследованы, например, в работах [1, 7], где приведены многочисленные математические модели вязкоупругости, электродинамики, физики полупроводников, механики полимеров, в которых участвуют уравнения третьего порядка вида (1). В работе [3] для уравнений вида (1) с непрерывными коэффициентами показано, что корректной может быть как начально-краевая задача, так и задача с данными на всей границе (в частности, задача Дирихле). В случае разрывных коэффициентов разрешимость тех или иных краевых задач для уравнений соболевского типа вида (1) ранее практически не изучалась; отметим лишь работу [4]. С другой стороны, различные краевые задачи для уравнений с разрывными коэффициентами изучаются с давних времен. Они изучаются, например, как задачи дифракции [5]–[10], как краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов [11]–[17], как задачи сопряжения [18]–[20]. Из работ последнего времени, посвященных исследованию разрешимости краевых задач для уравнений с разрывными коэффициентами, отметим работы [21]–[27]. Уточним, что здесь приведена лишь очень малая часть публикаций по проблемам, затрагивающим уравнения с разрывными коэффициентами, и в то же время разрешимость задачи Дирихле в классах регулярных или почти регулярных (точные формулировки см. ниже) решений для уравнения (1) с разрывным знакопеременным коэффициентом $h(t)$ и с условиями сопряжения (4) и (5) ранее не изучались.

2. Единственность решения краевой задачи

Пусть V_0, V_1 есть линейные пространства

$$\begin{aligned} V_0 = \{v(x,t) :\ & v(x,t) \in L_2(Q^+), \quad v_{tt}(x,t) \in L_2(Q^+), \quad v_{x_ix_jt}(x,t) \in L_2(Q^+), \\ & v(x,t) \in L_2(Q^-), \quad v_{tt}(x,t) \in L_2(Q^-), \quad v_{x_ix_jt}(x,t) \in L_2(Q^-), \\ & i,j = \overline{1,n}.\ \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_1 = \{v(x,t) :\ & v(x,t) \in L_2(Q^+), \quad t^{\frac{1}{2}} v_{tt}(x,t) \in L_2(Q^+), \quad v_{x_it}(x,t) \in L_2(Q^+), \\ & v_{x_ix_j}(x,t) \in L_2(Q^+), \quad t^{\frac{1}{2}} \Delta v_t(x,t) \in L_2(Q^+), \quad v_{x_i}(x,t) \in L_2(Q^+), \\ & v_t(x,t) \in L_2(Q^+), \quad v_t(x,+0) \in L_2(\Omega), \\ & v(x,t) \in L_2(Q^-), \quad |t|^{\frac{1}{2}} v_{tt}(x,t) \in L_2(Q^-), \quad v_{x_it}(x,t) \in L_2(Q^-), \\ & v_{x_ix_j}(x,t) \in L_2(Q^-), \quad |t|^{\frac{1}{2}} \Delta v_t(x,t) \in L_2(Q^-), \quad v_{x_i}(x,t) \in L_2(Q^-), \\ & v_t(x,t) \in L_2(Q^-), \quad v_t(x,-0) \in L_2(\Omega), \qquad i,j = \overline{1,n}.\} \end{aligned}$$

Введем в этих пространствах нормы

$$\|v\|_{V_0} = \Bigg(\int\limits_{Q^+} (v^2 + v_{tt}^2 + \textstyle\sum_{i,j=1}^n v_{x_ix_jt}^2)\, dx\, dt + \int\limits_{Q^-} (v^2 + v_{tt}^2 + \sum_{i,j=1}^n v_{x_ix_jt}^2)\, dx\, dt \Bigg)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|v\|_{V_1} = \Bigg(\int\limits_{Q^+} \left[tv_{tt}^2 + \sum_{i=1}^n v_{x_it}^2 + \sum_{i,j=1}^n u_{x_ix_j}^2 + t(\Delta v_t)^2 + \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 + v_t^2 + v^2 \right] dxdt +$$
$$+ \int\limits_{Q^-} \left[|t|v_{tt}^2 + \sum_{i=1}^n v_{x_it}^2 + \sum_{i,j=1}^n u_{x_ix_j}^2 + |t|(\Delta v_t)^2 + \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 + v_t^2 + v^2 \right] dxdt +$$
$$+ \int\limits_{\Omega} v_t^2(x,+0)dx + \int\limits_{\Omega} v_t^2(x,-0)dx \Bigg)^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что пространства V_0, V_1 с такими нормами являются банаховыми пространствами.

Обозначим

$$a_1(x) = \tfrac{\alpha_2(x)\beta_3(x)-\alpha_3(x)\beta_2(x)}{\alpha_1(x)\beta_2(x)-\alpha_2(x)\beta_1(x)}, \qquad a_2(x) = \tfrac{\alpha_4(x)\beta_2(x)-\alpha_2(x)\beta_4(x)}{\alpha_1(x)\beta_2(x)-\alpha_2(x)\beta_1(x)},$$

$$a_3(x) = \tfrac{\alpha_4(x)\beta_1(x)-\alpha_1(x)\beta_4(x)}{\alpha_3(x)\beta_4(x)-\alpha_4(x)\beta_3(x)}, \qquad a_4(x) = \tfrac{\alpha_4(x)\beta_2(x)-\alpha_2(x)\beta_4(x)}{\alpha_3(x)\beta_4(x)-\alpha_4(x)\beta_3(x)},$$

$$a_5(x) = \tfrac{\alpha_1(x)\beta_2(x)-\alpha_2(x)\beta_1(x)}{\alpha_2(x)\beta_3(x)-\alpha_3(x)\beta_2(x)}, \qquad a_6(x) = \tfrac{\alpha_4(x)\beta_2(x)-\alpha_2(x)\beta_4(x)}{\alpha_2(x)\beta_3(x)-\alpha_3(x)\beta_2(x)},$$

$$b_1(x) = \tfrac{\alpha_3(x)\beta_1(x)-\alpha_1(x)\beta_3(x)}{\alpha_1(x)\beta_2(x)-\alpha_2(x)\beta_1(x)}, \qquad b_2(x) = \tfrac{\alpha_1(x)\beta_4(x)-\alpha_4(x)\beta_1(x)}{\alpha_1(x)\beta_2(x)-\alpha_2(x)\beta_1(x)},$$

$$b_3(x) = \tfrac{\alpha_1(x)\beta_3(x)-\alpha_3(x)\beta_1(x)}{\alpha_3(x)\beta_4(x)-\alpha_4(x)\beta_3(x)}, \qquad b_4(x) = \tfrac{\alpha_2(x)\beta_3(x)-\alpha_3(x)\beta_2(x)}{\alpha_3(x)\beta_4(x)-\alpha_4(x)\beta_3(x)},$$

$$b_5(x) = \tfrac{\alpha_3(x)\beta_1(x)-\alpha_1(x)\beta_3(x)}{\alpha_2(x)\beta_3(x)-\alpha_3(x)\beta_2(x)}, \qquad b_6(x) = \tfrac{\alpha_3(x)\beta_4(x)-\alpha_4(x)\beta_3(x)}{\alpha_2(x)\beta_3(x)-\alpha_3(x)\beta_2(x)}$$

(всюду считается, что знаменатели всех дробей не обращаются в нуль) и

$$F_k(x,\lambda_1,\lambda_2) = a_{2k-1}(x)\lambda_1^2 + [a_{2k}(x) - b_{2k-1}(x)]\lambda_1\lambda_2 - b_{2k}(x)\lambda_2^2, \qquad k = \overline{1,3}, \lambda \in \mathbb{R}^2.$$

Отметим, что функции $a_1(x)b_2(x) - a_2(x)b_1(x)$, $a_3(x)b_4(x) - a_4(x)b_3(x)$ и $a_5(x)b_6(x) - a_6(x)b_5(x)$ могут обращаться в нуль при $x \in \Omega$. Квадратичные формы $F_2(x,\lambda_1,\lambda_2)$, $F_3(x,\lambda_1,\lambda_2)$ представим в виде суммы двух квадратичных форм:

$$\begin{aligned} F_2(x,\lambda_1,\lambda_2) &= F_{20}(x,\lambda_1,\lambda_2) + F_{21}(x,\lambda_1,\lambda_2), \\ F_3(x,\lambda_1,\lambda_2) &= F_{30}(x,\lambda_1,\lambda_2) + F_{31}(x,\lambda_1), \end{aligned} \tag{6}$$

где для квадратичных форм $F_{21}(x,\lambda_1,\lambda_2), F_{31}(x,\lambda_1)$ справедливы неравенства

$$|F_{21}(x,\lambda_1,\lambda_2)| \le m_2\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\right), \qquad m_2 > 0, \tag{7}$$

$$|F_{31}(x,\lambda_1)| \le m_3\lambda_1^2, \qquad m_3 > 0. \tag{8}$$

Ограничения же для форм F_{20} и F_{30} будут указаны ниже.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq k_0|\xi|^2, \qquad k_0>0, \qquad \xi\in\mathbb{R}^n, \qquad x\in\overline{\Omega}, \tag{9}$$

$$a_0(x)\leq -\bar{a}_0<0, \qquad \bar{a}_0>0, \qquad x\in\overline{\Omega}, \tag{10}$$

$$k_0+h_t(t)\geq 0 \text{ при } t\in[-T,0], \qquad k_0+h_t(t)\geq 0 \text{ при } t\in[0,T], \tag{11}$$

$$h(+0)\geq 0, \qquad h(-0)\leq 0, \tag{12}$$

$$\alpha_i(x)\in C(\overline{\Omega}), \qquad \beta_i(x)\in C(\overline{\Omega}), \qquad i=\overline{1,4}, \qquad f(x,t)\in L_2(Q), \tag{13}$$

и одна из трех групп условий

$$\alpha_1(x)\beta_2(x)-\alpha_2(x)\beta_1(x)\neq 0, \qquad x\in\overline{\Omega}, \tag{14}$$

$$F_1(x,\lambda_1,\lambda_2)\geq 0, \qquad \lambda\in\mathbb{R}^2; \tag{15}$$

или

$$\alpha_3(x)\beta_4(x)-\alpha_4(x)\beta_3(x)\neq 0, \qquad x\in\overline{\Omega}, \tag{16}$$

$$F_{20}(x,\lambda_1,\lambda_2)\geq 0, \qquad x\in\overline{\Omega}, \qquad \lambda\in\mathbb{R}^2, \tag{17}$$

$$m_2^2<\bar{a}_0 \tag{18}$$

или

$$\alpha_2(x)\beta_3(x)-\alpha_3(x)\beta_2(x)\neq 0, \qquad x\in\overline{\Omega} \tag{19}$$

$$F_{30}(x,\lambda_1,\lambda_2)\geq 0, \qquad x\in\overline{\Omega}, \qquad \lambda\in\mathbb{R}^2, \tag{20}$$

$$m_3^2<\bar{a}_0. \tag{21}$$

Тогда краевая задача (1)–(5) имеет не более одного решения $u(x,t)$ из пространства V_0.

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ есть решение краевой задачи (1)–(5) такое, что $u(x,t)\in V_0$. Уравнение (1) умножим на функцию $-u(x,t)$ и проинтегрируем по цилиндру Q^+, затем его же умножим на функцию $-u(x,t)$ и проинтегрируем по Q^-. Сложив равенства получим

$$\begin{gathered}
\int\limits_{Q^+}\left(u_t^2(x,t)+\frac{1}{2}h_t(t)\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2(x,t)\right)dxdt+\int\limits_{Q^-}\left(u_t^2(x,t)+\frac{1}{2}h_t(t)\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2(x,t)\right)dxdt+\\
+\int\limits_{Q^+}\left(\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}(x)u_{x_j}(x,t)u_{x_i}(x,t)-a_0(x)u^2(x,t)\right)dxdt+\\
+\int\limits_{Q^-}\left(\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}(x)u_{x_j}(x,t)u_{x_i}(x,t)-a_0(x)u^2(x,t)\right)dxdt+\\
+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}h(+0)\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2(x,+0)dx-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}h(-0)\sum_{i=1}^{n}u_{x_i}^2(x,-0)dx+\int\limits_{\Omega}\Big[u(x,+0)u_t(x,+0)-\\
-u(x,-0)u_t(x,-0)\Big]dx=-\int\limits_{Q^+}f(x,t)u(x,t)dxdt-\int\limits_{Q^-}f(x,t)u(x,t)dxdt.
\end{gathered} \tag{22}$$

В граничном интеграле из равенства (22)

$$I \equiv \int\limits_{\Omega} [u(x,+0)u_t(x,+0) - u(x,-0)u_t(x,-0)]\, dx \tag{23}$$

преобразуем подынтегральное выражение. Для этого условия сопряжения (4)–(5) перепишем в виде

$$\begin{aligned} u(x,+0) &= a_1(x)u_t(x,+0) + a_2(x)u_t(x,-0), \\ u(x,-0) &= b_1(x)u_t(x,+0) + b_2(x)u_t(x,-0), \end{aligned} \tag{24}$$

если выполняется (14), в виде

$$\begin{aligned} u_t(x,+0) &= a_3(x)u(x,+0) + a_4(x)u(x,-0), \\ u_t(x,-0) &= b_3(x)u(x,+0) + b_4(x)u(x,-0), \end{aligned} \tag{25}$$

если выполняется (16) и в виде

$$\begin{aligned} u_t(x,+0) &= a_5(x)u(x,+0) + a_6(x)u_t(x,-0), \\ u(x,-0) &= b_5(x)u(x,+0) + b_6(x)u_t(x,-0), \end{aligned} \tag{26}$$

если выполняется (19). Вследствие условий теоремы это возможно. Подставив представления (24)–(26) в I получим, что подынтегральное выражение из (23) в каждом из трех случаев имеет вид $F_1(u_t(x,+0), u_t(x,-0))$, $F_2(u(x,+0), u(x,-0))$ и $F_3(u(x,+0), u_t(x,-0))$ соответственно.

Пусть выполнены условия (9)–(13). Рассмотрим случай (14). Из условия (15) следует, что квадратичная форма $F_1(u_t(x,+0), u_t(x,-0))$ неотрицательно определена для всех $x \in \Omega$. Для правой части равенства (22) применим неравенство Юнга

$$\begin{aligned} \int\limits_{Q^+} f(x,t)u(x,t)dxdt &\le \frac{\delta^2}{2}\int\limits_{Q^+} u^2(x,t)dxdt + \frac{1}{2\delta^2}\int\limits_{Q^+} f^2(x,t)dxdt, \\ \int\limits_{Q^-} f(x,t)u(x,t)dxdt &\le \frac{\delta^2}{2}\int\limits_{Q^-} u^2(x,t)dxdt + \frac{1}{2\delta^2}\int\limits_{Q^-} f^2(x,t)dxdt, \end{aligned} \tag{27}$$

где постоянную δ нужно выбрать так, чтобы $\delta^2/2 < \bar{a}_0$. Тогда справедливо неравенство

$$\begin{aligned} &\int\limits_{Q^+} \left[u_t^2(x,t) + \left[k_0 + \frac{1}{2}h_t(t)\right]\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,t) + \frac{\bar{a}_0}{2}u^2(x,t)\right] dxdt+ \\ &+\int\limits_{Q^-} \left[u_t^2(x,t) + \left[k_0 + \frac{1}{2}h_t(t)\right]\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,t) + \frac{\bar{a}_0}{2}u^2(x,t)\right] dxdt+ \\ &+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} h(+0)\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,+0)dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} h(-0)\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,-0)dx \le \\ &\le \frac{1}{2\bar{a}_0}\int\limits_{Q^+} f^2(x,t)dxdt + \frac{1}{2\bar{a}_0}\int\limits_{Q^-} f^2(x,t)dxdt. \end{aligned} \tag{28}$$

Для случаев (16) и (19) получим неравенство аналогичное (28). Заметим, что для квадратичных форм $F_2(u(x,+0),u(x,-0))$ и $F_3(u(x,+0),u_t(x,-0))$ имеет место представление в виде суммы (6), где квадратичные формы $F_{20}(u(x,+0),u(x,-0))$, $F_{30}(u(x,+0),u_t(x,-0))$ по условию теоремы будут неотрицательно определенными, а для квадратичных форм $F_{21}(u(x,+0),u(x,-0))$, $F_{31}(u(x,+0))$ справедливы неравенства (7), (8).

Известно, что для функций $v(x,t)$, обращающихся в нуль при $t=T$, и для функций $v(x,t)$, обращающихся в нуль при $t=-T$, выполняются неравенства

$$\int\limits_{\Omega} v^2(x,0)dx \le \delta_0^2 \int\limits_{Q^+} v_t^2(x,t)dxdt + \frac{1}{\delta_0^2}\int\limits_{Q^+} v^2(x,t)dxdt, \tag{29}$$

$$\int\limits_{\Omega} v^2(x,0)dx \le \delta_0^2 \int\limits_{Q^-} v_t^2(x,t)dxdt + \frac{1}{\delta_0^2}\int\limits_{Q^-} v^2(x,t)dxdt, \tag{30}$$

где δ_0 — произвольное положительное число. Используя эти неравенства и неравенство (7), оценим интеграл от квадратичной формы $|F_{21}|$:

$$\left|\int\limits_{\Omega} F_{21}(u(x,+0),u(x,-0))dx\right| \le m_2 \int\limits_{\Omega}\left[u^2(x,+0)+u^2(x,-0)\right]dx \le$$
$$\le m_2\delta_0^2\int\limits_{Q^+} u_t^2(x,t)dxdt + \frac{m_2}{\delta_0^2}\int\limits_{Q^+} u^2(x,t)dxdt + m_2\delta_0^2\int\limits_{Q^-} u_t^2(x,t)dxdt + \frac{m_2}{\delta_0^2}\int\limits_{Q^-} u^2(x,t)dxdt.$$

Таким же образом оценим интеграл от $|F_{31}|$, используя неравенство (8):

$$\left|\int\limits_{\Omega} F_{31}(u(x,+0))dx\right| \le m_3\int\limits_{\Omega} u^2(x,+0)dx \le m_3\delta_0^2\int\limits_{Q^+} u_t^2(x,t)dxdt + \frac{m_3}{\delta_0^2}\int\limits_{Q^+} u^2(x,t)dxdt.$$

Пусть выполнено условие (18) или (21), тогда постоянную δ_0 можно выбрать так, чтобы выполнялись неравенства $\frac{m_2}{\bar a_0} < \delta_0^2 < \frac{1}{m_2}$ или $\frac{m_3}{\bar a_0} < \delta_0^2 < \frac{1}{m_3}$. Постоянную δ в неравенстве (27) нужно выбрать так, чтобы $\delta^2/2 < \bar a_0 - \frac{m_2}{\delta_0^2}$ или $\delta^2/2 < \bar a_0 - \frac{m_3}{\delta_0^2}$, например, $\delta^2 = \bar a_0 - \frac{m_2}{\delta_0^2}$ или $\delta^2 = \bar a_0 - \frac{m_3}{\delta_0^2}$. Тогда для случая (16) справедливо следующее неравенство:

$$\int\limits_{Q^+}\left[\left(1-m_2\delta_0^2\right)u_t^2(x,t) + \left[k_0 + \frac{h_t(t)}{2}\right]\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,t) + \frac{1}{2}\left(\bar a_0 - \frac{m_2}{\delta_0^2}\right)u^2(x,t)\right]dxdt+$$

$$+\int\limits_{Q^-}\left[\left(1-m_2\delta_0^2\right)u_t^2(x,t)+\left[k_0+\frac{h_t(t)}{2}\right]\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,t)+\frac{1}{2}\left(\bar a_0-\frac{m_2}{\delta_0^2}\right)u^2(x,t)\right]dxdt+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_\Omega h(+0)\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,+0)dx-\frac{1}{2}\int\limits_\Omega h(-0)\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,-0)dx\le \tag{31}$$
$$\le\frac{1}{2(\bar a_0-m_2/\delta_0^2)}\left(\int\limits_{Q^+}f^2(x,t)dxdt+\int\limits_{Q^-}f^2(x,t)dxdt\right).$$

В случае, когда выполняется (19), справедливо неравенство

$$\int\limits_{Q^+}\left[\left(1-m_3\delta_0^2\right)u_t^2(x,t)+\left[k_0+\frac{h_t(t)}{2}\right]\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,t)+\frac{1}{2}\left(\bar a_0-\frac{m_3}{\delta_0^2}\right)u^2(x,t)\right]dxdt+$$
$$+\int\limits_{Q^-}\left[u_t^2(x,t)+\left[k_0+\frac{h_t(t)}{2}\right]\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,t)+\frac{\bar a_0}{2}u^2(x,t)\right]dxdt+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_\Omega h(+0)\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,+0)dx-\frac{1}{2}\int\limits_\Omega h(-0)\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,-0)dx\le \tag{32}$$
$$\le\frac{1}{2(\bar a_0-m_3/\delta_0^2)}\int\limits_{Q^+}f^2(x,t)dxdt+\frac{1}{2\bar a_0}\int\limits_{Q^-}f^2(x,t)dxdt.$$

Из неравенств (28), (31) и (32) нетрудно получить окончательную первую априорную оценку

$$\int\limits_{Q^+}\left(u_t^2(x,t)+\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,t)+u^2(x,t)\right)dxdt+$$
$$+\int\limits_{Q^-}\left(u_t^2(x,t)+\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,t)+u^2(x,t)\right)dxdt+ \tag{33}$$
$$+h(+0)\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,+0)dx+|h(-0)|\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,-0)dx\le C\|f\|^2_{L_2(Q)},$$

где положительное число C определяется функциями $\alpha_k(x)$, $\beta_k(x)$, $h(t)$, $k=\overline{1,4}$ и числами k_0, $\bar a_0$ и T.

Таким образом, из априорной оценки (33) следует, что если выполняется $f(x,t)\equiv 0$, то функция $u(x,t)$ будет тождественно равна нулю в Q. Это означает, что решение краевой задачи (1)–(5) единственно. Теорема доказана. □

3. Существование решения краевой задачи

Известно, что если область Ω ограничена и имеет дважды ограниченно дифференцируемую границу $\partial\Omega$, то для любой функции $v(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Omega} Lv(x) \cdot \Delta v(x)dx \geq k_1 \int\limits_{\Omega} [\Delta v(x)]^2 dx - K_1 \|v(x)\|^2_{W_2^1(\Omega)}, \tag{34}$$

где $k_1 > 0$, $K_1 \geq 0$ – некоторые постоянные, определяющиеся лишь областью Ω (см. [30]).

Положим

$$\delta(x,\lambda) = [1 + \lambda T a_3(x)]\,[1 - \lambda T b_4(x)] + \lambda^2 T^2 a_4(x) b_3(x).$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия (9), (10), (16)–(18), а также*

$$\begin{gathered} \bar{k} + h_t(t) \geq 0 \ \textit{при} \ t \in [-T, 0], \\ \bar{k} + h_t(t) \geq 0 \ \textit{при} \ t \in [0, T], \qquad 0 < \bar{k} < \min\{k_0, k_1\}, \end{gathered} \tag{35}$$

$$h(t) \geq h_1 > 0 \ \textit{при} \ t > 0, \qquad h(t) \leq -h_2 < 0 \ \textit{при} \ t < 0, \tag{36}$$

$$\alpha_i(x) \in C^1(\overline{\Omega}),\ \beta_i(x) \in C^1(\overline{\Omega}),\ i = \overline{1,4}, \qquad f(x,t) \in L_2(Q), \tag{37}$$

$$\delta(x,\lambda) \neq 0 \ \textit{при} \ x \in \overline{\Omega},\ \lambda \in [0,1]. \tag{38}$$

Тогда краевая задача (1)–(5) разрешима в пространстве V_0.

Доказательство. Воспользуемся методом продолжения по параметру.

Пусть λ есть число из отрезка [0,1]. Рассмотрим семейство краевых задач: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в Q решением уравнения (1), и такую, что выполняются условия (2), (3), а также условия сопряжения*

$$\begin{gathered} u_t(x,+0) = \lambda[a_3(x)u(x,+0) + a_4(x)u(x,-0)], \\ u_t(x,-0) = \lambda[b_3(x)u(x,+0) + b_4(x)u(x,-0)]. \end{gathered} \tag{39}$$

Обозначим через Λ множество тех чисел λ из отрезка [0,1], для которых краевая задача (1)–(3), (39) имеет решение, принадлежащее пространству V_0. Если окажется, что множество Λ не пусто, открыто и замкнуто, то оно будет совпадать со всем отрезком [0,1] (см. [28]).

Краевая задача (1)–(3), (39) при $\lambda = 0$ распадается на две независимые задачи в областях Q^+ и Q^-. Разрешимость каждой из полученных задач в классах регулярных решений установлена (см. [29]). Тем самым получаем, что при $\lambda = 0$ краевая задача (1)–(3), (39) разрешима в пространстве V_0.

Для доказательства открытости и замкнутости множества Λ достаточно показать, что для всевозможных решений $u(x,t) \in V_0$ краевой задачи (1)–(3), (39) справедлива равномерная по λ априорная оценка

$$\|u\|_{V_0} \leq N \|f\|_{L_2(Q)}. \tag{40}$$

Покажем, что искомая оценка действительно выполняется.

Отметим, что справедлива оценка, аналогичная (33):

$$\int\limits_{Q^+}\left[u_t^2(x,t)+\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,t)+u^2(x,t)\right]dxdt+\int\limits_{Q^-}\left[u_t^2(x,t)+\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,t)+u^2(x,t)\right]dxdt+$$
$$+h(+0)\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,+0)dx+|h(-0)|\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x,-0)dx\leq N_1\|f\|^2_{L_2(Q)},\tag{41}$$

где положительное число N_1 определяется функциями $\alpha_k(x)$, $\beta_k(x)$, $h(t)$, $k=\overline{1,4}$, и числами k_0, $\bar{a}_0$ и T.

Пусть выполнены условия (9), (10), (35)–(37). Уравнение (1) умножим на функцию $\Delta u(x,t)$, проинтегрируем по цилиндрам Q^+ и Q^-. Сложиd полученные интегралы, придем к равенству

$$\int\limits_{Q^+}\left\{\sum_{i=1}^n u_{x_it}^2(x,t)+Lu\cdot\Delta u(x,t)+\frac{1}{2}h_t(t)[\Delta u(x,t)]^2\right\}dxdt+$$
$$+\int\limits_{Q^-}\left\{\sum_{i=1}^n u_{x_it}^2(x,t)+Lu\cdot\Delta u(x,t)+\frac{1}{2}h_t(t)[\Delta u(x,t)]^2\right\}dxdt+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}h(+0)[\Delta u(x,+0)]^2dx-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}h(-0)[\Delta u(x,-0)]^2dx+\tag{42}$$
$$+\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^n[u_{x_i}(x,+0)u_{x_it}(x,+0)-u_{x_i}(x,-0)u_{x_it}(x,-0)]dx=$$
$$=\int\limits_{Q^+}f(x,t)\Delta u(x,t)dxdt+\int\limits_{Q^-}f(x,t)\Delta u(x,t)dxdt.$$

Рассмотрим третий граничный интеграл в равенстве (42):

$$I\equiv\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^n[u_{x_i}(x,+0)u_{x_it}(x,+0)-u_{x_i}(x,-0)u_{x_it}(x,-0)]dx.\tag{43}$$

Пусть выполнено условие (16). Используя условие сопряжения (39), получим

$$I=\lambda\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^n\big[F_2(u_{x_i}(x,+0),u_{x_i}(x,-0))+$$
$$+\Phi(u(x,+0),u_{x_i}(x,+0),u(x,-0),u_{x_i}(x,-0))\big]dx,$$

где для функции $F_2(u_{x_i}(x,+0),u_{x_i}(x,-0))$ справедливо представление (6) и

$$\Phi(u(x,+0),u_{x_i}(x,+0),u(x,-0),u_{x_i}(x,-0))=$$
$$=a_{3x_i}(x)u(x,+0)u_{x_i}(x,+0)+a_{4x_i}(x)u_{x_i}(x,+0)u(x,-0)-$$
$$-b_{3x_i}(x)u(x,+0)u_{x_i}(x,-0)-b_{4x_i}(x)u(x,-0)u_{x_i}(x,-0),\qquad i=\overline{1,n}.$$

Используя неравенство (7), неравенство Юнга, элементарное неравенство

$$\int\limits_{\Omega} u^2(x,0)dx \le C_0 \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2(x,0)dx, \tag{44}$$

где положительная постоянная C_0 определяется лишь областью Ω, а также оценку (41), получим

$$\begin{gathered} \Big| \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \big[F_{21}(u_{x_i}(x,+0), u_{x_i}(x,-0))dx + \\ +\Phi(u(x,+0), u_{x_i}(x,+0), u(x,-0), u_{x_i}(x,-0))\big]dx \Big| \le C_1 \|f\|^2_{L_2(Q)}, \end{gathered} \tag{45}$$

где число C_1 определяется функциями $\alpha_i(x)$, $\beta_i(x)$, $h(t)$, $i = \overline{1,4}$, и числами k_0, $\bar{a}_0$, C_0 и T.

Тогда из равенства (42), используя (34) и неравенства Юнга, а также оценку (45), получим неравенство

$$\begin{gathered} \int\limits_{Q^+} \left(\sum_{i=1}^{n} u_{x_i t}^2(x,t) + \left(\frac{1}{2}h_t(t) + \bar{k}\right) [\Delta u(x,t)]^2 \right) dxdt + \\ + \int\limits_{Q^-} \left[\sum_{i=1}^{n} u_{x_i t}^2(x,t) + \left(\frac{1}{2}h_t(t) + \bar{k}\right) [\Delta u(x,t)]^2 \right] dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} h(+0)[\Delta u(x,+0)]^2 dx - \\ - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} h(-0)[\Delta u(x,-0)]^2 dx \le C_1 \|f\|^2_{L_2(Q)} + K_1 \|u\|^2_{L_2(Q)}. \end{gathered} \tag{46}$$

Таким образом, в случае (16) справедлива вторая априорная оценка

$$\begin{gathered} \int\limits_{Q^+} \left[(\Delta u)^2 + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i t}^2 \right] dxdt + \int\limits_{Q^-} \left[(\Delta u)^2 + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i t}^2 \right] dxdt + \\ + \int\limits_{\Omega} [\Delta u(x,+0)]^2 dx + \int\limits_{\Omega} [\Delta u(x,-0)]^2 dx \le N_2 \|f\|^2_{L_2(Q)} \end{gathered} \tag{47}$$

с постоянной N_2, определяющейся функциями $\alpha_k(x)$, $\beta_k(x)$, $h(t)$, $k = \overline{1,4}$, и числами $\bar{k}$, $\bar{a}_0$, C_0 и T.

Чтобы получить третью априорную оценку, уравнение (1) умножим на функцию $-\Delta u_t(x,t)$, проинтегрируем по цилиндру Q^+, затем умножим на $\Delta u_t(x,t)$, проинтегрируем по Q^- и сложим полученные интегралы. Придем к равенству

$$\int\limits_{Q^+} h(t)[\Delta u_t(x,t)]^2 dxdt - \int\limits_{Q^-} h(t)[\Delta u_t(x,t)]^2 dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}[u^2_{x_it}(x,T)+u^2_{x_it}(x,-T)]dx =$$

$$= \int\limits_{Q^+} Lu\cdot\Delta u_t(x,t)dxdt - \int\limits_{Q^-} Lu\cdot\Delta u_t(x,t)dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}[u^2_{x_it}(x,+0)+u^2_{x_it}(x,-0)]dx - \quad (48)$$

$$-\int\limits_{Q^+} f(x,t)\Delta u_t(x,t)dxdt + \int\limits_{Q^-} f(x,t)\Delta u_t(x,t)dxdt.$$

Условия (37), (39), неравенство Юнга и оценка (41) означают, что справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}[u^2_{x_it}(x,+0)+u^2_{x_it}(x,-0)]dx \le C_2\|f\|^2_{L_2(Q)}.$$

с постоянной $C_2 > 0$, определяющейся функциями $\alpha_k(x)$, $\beta_k(x)$, $h(t)$, $k = \overline{1,4}$ и числами $\bar{k}$, $\bar{a}_0$, C_0 и T.

Первые два слагаемых в правой части равенства (48) оцениваем, используя неравенство Юнга и второе основное неравенство для эллиптических операторов, остальные слагаемые оцениваем с помощью неравенства Юнга. Произвольные постоянные δ в неравенствах Юнга выбираем равными между собой и так, чтобы выполнялось неравенство $0 < \delta^2 < \min(h_1, h_2)$. Тогда получим третью априорную оценку

$$\int\limits_{Q^+}(\Delta u_t)^2 dxdt + \int\limits_{Q^-}(\Delta u_t)^2 dxdt \le N_3\|f\|^2_{L_2(Q)}, \quad (49)$$

с постоянной N_3, определяющейся функциями $\alpha_k(x)$, $\beta_k(x)$, $h(t)$, $k = \overline{1,4}$, и числами $\bar{k}$, $\bar{a}_0$, C_0 и T.

На следующем шаге умножим уравнение (1) на функцию $u_{tt}(x,t)$, проинтегрируем по цилиндрам Q^+, Q^- и сложим. Получим равенство

$$\int\limits_{Q^+} u^2_{tt}(x,t)dxdt + \int\limits_{Q^-} u^2_{tt}(x,t)dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n} h(T)u^2_{x_it}(x,T)dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} h(-T)u^2_{x_it}(x,-T)dx = -\int\limits_{Q^+} Lu\cdot u_{tt}(x,t)dxdt - \int\limits_{Q^-} Lu\cdot u_{tt}(x,t)dxdt +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{Q^+}\sum_{i=1}^{n} h_t(t)u^2_{x_it}(x,t)dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{Q^-} h_t(t)u^2_{x_it}(x,t)dx + \quad (50)$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}[h(+0)u^2_{x_it}(x,+0) - h(-0)u^2_{x_it}(x,-0)]dx +$$

$$+\int\limits_{Q^+} f(x,t)u_{tt}(x,t)dxdt + \int\limits_{Q^-} f(x,t)u_{tt}(x,t)dxdt.$$

Чтобы оценить правую часть данного равенства, для третьего и четвертого слагаемых применяем вторую априорную оценку (47), с остальными слагаемыми поступаем так же, как при получении третьей оценки. Справедлива четвертая априорная оценка

$$\int\limits_{Q^+} u_{tt}^2 dxdt + \int\limits_{Q^-} u_{tt}^2 dxdt \leq N_4 \|f\|^2_{L_2(Q)} \tag{51}$$

с постоянной N_4, определяющейся функциями $\alpha_k(x)$, $\beta_k(x)$, $h(t)$, $k = \overline{1,4}$ и числами $\bar{k}$, $\bar{a}_0$, C_0 и T.

Из оценок (41), (47), (49) и (51) следует, что для решений краевой задачи (1)–(3), (39) справедлива равномерная по λ априорная оценка (40). Покажем, что из данной оценки вытекает открытость и замкнутость множества Λ.

Определим составную функцию $\omega(x,t)$:

$$\omega(x,t) = \begin{cases} u(x,t) + \lambda(T-t)\big[a_3(x)u(x,+0) + a_4(x)u(x,-0)\big], & (x,t) \in Q^+, \\ u(x,t) - \lambda(T+t)\big[b_3(x)u(x,+0) + b_4(x)u(x,-0)\big], & (x,t) \in Q^-. \end{cases} \tag{52}$$

В силу условия (38) функция $u(x,t)$ однозначно вычисляется через функцию $\omega(x,t)$:

$$u(x,t) = \begin{cases} \omega(x,t) - & \frac{\lambda}{\delta}(T-t)\big[a_3(x) - \lambda T\{a_3(x)b_4(x) - a_4(x)b_3(x)\}\big]\omega(x,+0) + \\ & \frac{\lambda}{\delta}(T-t)a_4(x)\omega(x,-0), \qquad (x,t) \in Q^+, \\ \omega(x,t) + & \frac{\lambda}{\delta}(T+t)\big[b_4(x) + \lambda T\{a_3(x)b_4(x) - a_4(x)b_3(x)\}\big]\omega(x,-0) + \\ & \frac{\lambda}{\delta}(T+t)b_3(x)\omega(x,+0), \qquad (x,t) \in Q^-; \end{cases} \tag{53}$$

кроме того, выполняются равенства

$$\begin{aligned} &\omega(x,t)|_S = 0,\ \omega(x,T) = \omega(x,-T) = 0, \\ &\omega_t(x,+0) = \omega_t(x,-0) = 0, \qquad x \in \Omega. \end{aligned} \tag{54}$$

Уравнение (1) преобразуется в следующее уравнение для функции $\omega(x,t)$:

$$\omega_{tt} - h(t)\Delta\omega_t + L\omega = F(x,t), \tag{55}$$

где

$$F(x,t) =$$

$$= \begin{cases} f(x,t) + \frac{\lambda}{\delta}h(t)\Delta\big[\{a_3(x) - \lambda T[a_3(x)b_4(x) - a_4(x)b_3(x)]\}\omega(x,+0) + \\ +a_4(x)\omega(x,-0)\big] - \frac{\lambda}{\delta}(T-t)L\big[\{a_3(x) - \lambda T[a_3(x)b_4(x) - a_4(x)b_3(x)]\}\omega(x,+0) + \\ +a_4(x)\omega(x,-0)\big], \qquad (x,t) \in Q^+, \\ f(x,t) + \frac{\lambda}{\delta}h(t)\Delta\big[\{b_4(x) + \lambda T[a_3(x)b_4(x) - a_4(x)b_3(x)]\}\omega(x,-0) + \\ +b_3(x)\omega(x,+0)\big] - \frac{\lambda}{\delta}(T+t)L\big[\{b_4(x) + \lambda T[a_3(x)b_4(x) - a_4(x)b_3(x)]\}\omega(x,-0) + \\ +b_3(x)\omega(x,+0)\big], \qquad (x,t) \in Q^-; \end{cases}$$

Краевая задача для уравнения (55) с условиями (54) эквивалентна краевой задаче (1), (2), (3) и (39). Для решения $\omega(x,t)$ этой задачи сохранится оценка (40). Из этой оценки и непрерывности по параметру λ семейства задач (55), (54) следуют открытость и замкнутость множества Λ на семействе задач (55), (54) (см. [28]), а из этого вытекают открытость и замкнутость множества Λ для краевой задачи (1)–(3), (25). Следовательно, краевая задача (1)–(3), (25) разрешима в пространстве V_0. Теорема доказана. $\square$

Обозначим

$$\begin{aligned} F_i(x,\xi,\eta,\xi_0,\eta_0) &= a_1(x)\xi^2 + [a_2(x)-b_1(x)]\xi\eta - b_2(x)\eta^2 - \frac{1}{2}a_{1x_ix_i}(x)\xi_0^2 + \\ &+ \frac{1}{2}b_{2x_ix_i}(x)\eta_0^2 + a_{2x_i}(x)\eta_0\xi - b_{1x_i}(x)\xi_0\eta, \qquad i=\overline{1,n}, \\ \Phi_i(x,\xi,\eta,\xi_0,\eta_0) &= a_5(x)\xi^2 + [a_6(x)-b_5(x)]\xi\eta - b_6(x)\eta^2 - \frac{1}{2}a_{5x_ix_i}(x)\xi_0^2 + \\ &+ \frac{1}{2}b_{6x_ix_i}(x)\eta_0^2 + a_{6x_i}(x)\eta_0\xi - b_{5x_i}(x)\xi_0\eta, \qquad i=\overline{1,n}. \end{aligned}$$

Теорема 3. *Пусть выполняются условия (9), (10), (35), (36), (14), (15) и пусть дополнительно выполняются условия*

$$a_1(x)b_2(x) - a_2(x)b_1(x) \le 0, \qquad x\in\Omega, \tag{56}$$

$$\alpha_i(x)\in C^2(\overline{\Omega}),\ \beta_i(x)\in C^2(\overline{\Omega}), \qquad i=\overline{1,4}, \qquad f(x,t)\in L_2(Q), \tag{57}$$

$$F_i(x,\xi,\eta,\xi_0,\eta_0)\ge 0 \ \text{при} \qquad x\in\overline{\Omega}, \lambda\in[0,1], \qquad i=\overline{1,n}. \tag{58}$$

Тогда краевая задача (1)–(5) разрешима в пространстве V_1.

Доказательство. Воспользуемся методом регуляризации.

Пусть ε есть положительное число. Рассмотрим краевую задачу: *найти решение уравнения (1) такое, что для него выполняются условия (2), (3) и условия сопряжения*

$$\begin{aligned} u(x,+0) &= [a_1(x)+\varepsilon]u_t(x,+0) + a_2(x)u_t(x,-0), \\ u(x,-0) &= b_1(x)u_t(x,+0) + [b_2(x)-\varepsilon]u_t(x,-0). \end{aligned} \tag{59}$$

Условия сопряжения (59) сводятся к рассмотренным условиям сопряжения (25) в силу условий (56) и (58). Кроме того, в силу этих же условий выполняется условие (38). Тогда, согласно теореме 2, решение регуляризованной задачи $u^\varepsilon(x,t)$ существует и принадлежит пространству V_0.

Покажем, что для всевозможных решений $u^\varepsilon(x,t)\in V_1$ краевой задачи (1), (2), (3), (59) имеют место равномерные по ε априорные оценки. Для удобства вывода оценок индекс "ε" у решений опустим.

Отметим, что справедлива оценка (41) с некоторой постоянной M_1. Покажем, что справедлива вторая априорная оценка (47). В граничный интеграл (43) подставим условия сопряжения (59):

$$\begin{aligned} I = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \big\{&[a_1(x)+\varepsilon]u_{x_it}^2(x,+0) + [a_2(x)-b_1(x)]u_{x_it}(x,+0)u_{x_it}(x,-0) - \\ &- [b_2(x)-\varepsilon]\,u_{x_it}^2(x,-0) - a_{1x_ix_i}(x)u_t^2(x,+0) + b_{2x_ix_i}(x)u_t^2(x,-0) + \\ &+ a_{2x_i}(x)u_t(x,-0)u_{x_it}(x,+0) - b_{1x_i}(x)u_t(x,+0)u_{x_it}(x,-0)\big\}dx = \end{aligned}$$

$$=\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\Big\{F_i(x,u_{x_it}(x,+0),u_{x_it}(x,-0),u_t(x,+0),u_t(x,-0))+\varepsilon u_{x_it}^2(x,+0)+\varepsilon u_{x_it}^2(x,-0)\Big\}dx.$$

Из условия (58) получаем, что этот интеграл будет неотрицательным. Тогда из равенства (42), используя (34) и неравенство Юнга, получим, что выполняется неравенство аналогичное (46). Следовательно, когда выполняется условие (14), также имеет место вторая априорная оценка (47) с постоянной M_2.

Для того, чтобы получить третью априорную оценку, уравнение (1) умножим на функцию $-t\Delta u_t(x,t)$, проинтегрируем по цилиндрам Q^+ и Q^- и сложим полученные интегралы. Несложные выкладки дадут оценку

$$\int\limits_{Q^+} t(\Delta u_t)^2dxdt+\int\limits_{Q^-}|t|(\Delta u_t)^2dxdt\le M_3. \tag{60}$$

Следующая априорная оценка очевидна:

$$\int\limits_{Q^+} tu_{tt}^2dxdt+\int\limits_{Q^-}|t|u_{tt}^2dxdt\le M_4\|f\|^2_{L_2(Q)}. \tag{61}$$

Далее получим оценку на следы решения

$$\int\limits_{\Omega} u_t^2(x,+0)dx+\int\limits_{\Omega}u_t^2(x,-0)dx\le M_5\|f\|^2_{L_2(Q)}. \tag{62}$$

Все постоянные M_i, $i=\overline{1,5}$, определяются функциями $\alpha_i(x)$, $\beta_i(x)$, $h(t)$, $i=\overline{1,4}$, и числами k_0, $\bar a_0$, C_0 и T.

Уравнение (1) проинтегрируем по отрезку $[t,T]$ при $t>0$, затем умножим на функцию $u_t(x,t)$ и проинтегрируем по области Ω. Получим равенство

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega} u_t^2(x,t)dx=\int\limits_{\Omega}u_t(x,T)u_t(x,t)dx+\\+\int\limits_{\Omega}h(t)\Delta u(x,t)u_t(x,t)dx-\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_t^T h_\tau(\tau)\Delta u(x,\tau)d\tau\right)u_t(x,t)dx+\\+\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_t^T Lu(x,\tau)d\tau\right)u_t(x,t)dx+\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_t^T f(x,\tau)d\tau\right)u_t(x,t)dx.\end{gathered} \tag{63}$$

Используя неравенство Юнга и переходя к пределу при $t\to+0$, придем к неравенству

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Omega} u_t^2(x,+0)dx\le C_3\Big(\int\limits_{\Omega}u_t^2(x,T)dx+\int\limits_{\Omega}\Delta u^2(x,+0)dx+\int\limits_{Q^+}(\Delta u)^2dxdt+\\+\int\limits_{Q^+}(Lu)^2dxdt+\int\limits_{Q^+}f^2(x,t)dxdt\Big).\end{gathered} \tag{64}$$

Таким же образом интегрируя уравнение (1) по отрезку $[-T, t]$ при $t < 0$ и переходя к пределу при $t \to -0$, получим

$$\int\limits_{\Omega} u_t^2(x,-0)dx \le C_4\Big(\int\limits_{\Omega} u_t^2(x,-T)dx + \int\limits_{\Omega} \Delta u^2(x,-0)dx + \int\limits_{Q^-} (\Delta u)^2 dxdt + \\ + \int\limits_{Q^-} (Lu)^2 dxdt + \int\limits_{Q^-} f^2(x,t)dxdt\Big). \tag{65}$$

В силу оценок (41), (47), (61) и второго основного неравенства для эллиптических операторов из неравенств (64) и (65) следует оценка (62). Из оценок (41), (47), (60), (61) и (62) следует, что для решений краевой задачи (1)–(3), (59) справедлива равномерная по ε априорная оценка

$$\|u\|_{V_1} \le M\|f\|_{L_2(Q)}, \tag{66}$$

где положительное число M определяется функциями $\alpha_k(x)$, $\beta_k(x)$, $h(t)$, $k = \overline{1,4}$, и числами k_0, $\bar{a}_0$ и T.

Из оценки (66) и свойства рефлексивности пространства L_2 следует, что существуют последовательность $\{\varepsilon_m\}$ положительных чисел и функция $u(x,t)$ такие, что при $m \to \infty$ выполняется $\varepsilon_m \to 0$, $u_{\varepsilon_m}(x,t) \to u(x,t)$, $\sqrt{t}u_{\varepsilon_m tt}(x,t) \to \sqrt{t}u_{tt}(x,t)$, $\sqrt{t}\Delta u_{\varepsilon_m t}(x,t) \to \sqrt{t}\Delta u_t(x,t)$, $u_{\varepsilon_m}(x,+0) \to u(x,+0)$, $u_{\varepsilon_m}(x,-0) \to u(x,-0)$, $u_{\varepsilon_m t}(x,+0) \to u_t(x,+0)$, $u_{\varepsilon_m t}(x,-0) \to u_t(x,-0)$ слабо в пространстве $L_2(Q)$. Очевидно, что предельная функция $u(x,t)$ будет принадлежать пространству V_1, для нее в областях Q^+ и в Q^- будет выполнено уравнение (1), а также краевые условия (1)–(3) и условия сопряжения (4), (5). Другими словами, функция $u(x,t)$ дает решение краевой задачи (1)–(5) из требуемого класса, когда выполняется условие (14).

Теорема доказана. □

Теорема 4. *Пусть выполняются условия (9), (10), (35), (36), (19)–(21), (57) и пусть дополнительно выполняются условия*

$$a_5(x)b_6(x) - a_6(x)b_5(x) \le 0, \qquad x \in \Omega, \tag{67}$$

$$\Phi_i(x,\xi,\eta,\xi_0,\eta_0) \ge 0 \text{ при } x \in \overline{\Omega}, \lambda \in [0,1], \qquad i = \overline{1,n}. \tag{68}$$

Тогда существует решение краевой задачи (1)–(5) из пространства V_1.

Доказательство. Вновь воспользуемся методом регуляризации.

Пусть ε — положительное число. Рассмотрим краевую задачу: *найти решение уравнения (1) такое, что для него выполняются условия (2), (3) и условия сопряжения*

$$\begin{gathered} u_t(x,+0) = a_5(x)u(x,+0) + a_6(x)u_t(x,-0), \\ u(x,-0) = b_5(x)u(x,+0) + [b_6(x) - \varepsilon]u_t(x,-0). \end{gathered} \tag{69}$$

Условия сопряжения (69) сводятся к рассмотренным условиям сопряжения (25) в силу условий (67) и (68). Кроме того, в силу этих же условий выполняется условие

(38). Тогда, согласно теореме 2, решение регуляризованной задачи $u^{\varepsilon}(x,t)$ существует из пространства V_0.

Так же, как при доказательстве теоремы 3, можно показать, что для всевозможных решений $u^{\varepsilon}(x,t) \in V_1$ регуляризованной краевой задачи (1)–(3), (69) выполняется равномерная по ε априорная оценка, аналогичная (66), с постоянной K, которая будет определяться функциями $\alpha_i(x)$, $\beta_i(x)$, $h(t)$, $i = \overline{1,4}$, и числами k_0, $\bar{a}_0$, C_0 и T.

Отметим лишь, что граничный интеграл (43) в этом случае имеет вид

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \big\{\Phi_i(x, u_{x_i}(x,+0), u_{x_it}(x,-0), u(x,+0), u_t(x,-0)) + \varepsilon u^2_{x_it}(x,-0)\big\} dx,$$

и в силу условия (68) этот интеграл будет неотрицательным для всех $x \in \overline{\Omega}$. Дальнейшие рассуждения аналогичны доказательству теоремы 3. $\square$

Заметим, что классическому условию непрерывности решения и градиента решения при переходе через линию разрыва (в данном случае – линию $t = 0$) соответствует условие (19) и условия $a_5(x) \equiv b_6(x) \equiv 0$, $a_6(x) \equiv b_5(x) \equiv 1$.

Список литературы

[1] Г. В. Демиденко, С. В. Успенский, *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной*, Научная книга, Новосибирск, 1998.

[2] А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, Н. Д. Корпусов, Ю. Д. Пятнер, *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, Физматлит, М., 2007.

[3] A. I. Kozhanov, "Composite Type Equations and Inverse Problems", *Utrecht, the Netherlands, VSP*, 1999.

[4] S. V. Potapova, "Boundary value problems for pseudohyperbolic equations with a variable time direction", *TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics*, **3**:1 (2012), 75–91.

[5] О. А. Ладыженская, "О решении общей задачи дифракции", *ДАН СССР*, **93** (1954), 433–436.

[6] О. А. Олейник, "Об одном методе решения общей задачи дифракции", *ДАН СССР*, 1960, 1054–1057.

[7] А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, Н. Д. Корпусов, Ю. Д. Пятнер, *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, Физматлит, М., 2007.

[8] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967..

[9] С. А. Терсенов, *Введение в теорию уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени*, Сиб. отд–ние АН СССР. Ин–т математики, Новосибирск, 1982.

[10] И. Е. Егоров, С. Г. Пятков, С. В. Попов, *Неклассические дифференциально–операторные уравнения*, Наука, Новосибирск, 2000.

[11] М. М. Смирнов, *Уравнения смешанного типа*, Наука, М., 1970.

[12] Т. Д. Джураев, *Краевые задачи для уравнения смешанного и смешанно-составного типов*, ФАН, Ташкент, 1986.

[13] Е. И. Моисеев, *Уравнения смешанного типа со спектральным параметром*, МГУ, Москва, 1988.

[14] А. П. Солдатов, "Задача типа Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. I. Теоремы единственности. II. Теоремы существования", *Докл. РАН*, **332, 333**:6, 1 (1993), 696–698, 16–18.

[15] К. Б. Сабитов, “Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области”, *Докл. РАН*, **413**:1 (2007), 23–26.

[16] М. М. Хачев, *Первая краевая задача для линейного уравнения смешанного типа*, Эльбрус, Нальчик, 1998.

[17] О. И. Маричев, А. А. Килбас, О. А. Репин, *Краевые задачи для уравнений с частными производными с разрывными коэффициентами*, Самарский государственный экономический университет, Самара, 2008.

[18] О. А. Ладыженская, Л. Ступялис, “Об уравнениях смешанного типа”, *Вестник ЛГУ*, 1967, № 19, 38–46.

[19] О. А. Ладыженская, Л. Ступялис, “Краевые задачи для уравнений смешанного типа”, *Труды МИАН СССР*, **116**:19 (1971), 101–136.

[20] Л. Ступялис, “Краевые задачи для эллиптико-гиперболических уравнений”, *Труды МИАН СССР*, **125** (1973), 211–229.

[21] В. А. Ильин, П. В. Луференко, “Смешанные задачи, описывающие продольные колебания стержня, состоящего из двух участков, имеющие разные плотности и разные упругости, но одинаковые импедансы”, *Докл. РАН*, **428**:1 (2009), 12–15.

[22] В. А. Ильин, П. В. Луференко, “Обобщенные решения смешанных задач для разрывного смешанного уравнения при условии равенства импедансов”, *Докл. РАН*, **429**:3 (2009), 317–321.

[23] В. А. Ильин, “Оптимизация производимого смещением граничного управления колебаниями стержня, состоящего из двух разнородных участков”, *Дифференциальные уравнения*, **47**:7 (2011), 978–986.

[24] А. М. Рогожников, “Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков, при условии совпадения времени прохождения волны по каждому из этих участков”, *Докл. РАН*, **441**:4 (2011), 449–451.

[25] А. А. Кулешов, “Смешанные задачи для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня со свободным либо закрепленным правым концом, состоящего из двух участков разной плотности и упругости”, *Докл. РАН*, **442**:4 (2012), 451–454.

[26] А. М. Рогожников, “Исследование смешанной задачи, описывающей процесс колебаний стержня, состоящего из нескольких участков с произвольными длинами”, *Докл. РАН*, **444**:5 (2012), 488–491.

[27] Е. И. Моисеев, Е. И. Лихоманенко, “Об одной нелокальной задаче для уравнения Лаврентьева-Бицадзе”, *Докл. РАН*, **446**:3 (2012), 256–258.

[28] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980.

[29] С. Я. Якубов, *Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения*, Элм., Баку, 1985.

[30] О. А. Ладыженская, “Простое доказательство разрешимости основных краевых задач и задачи о собственных значениях для линейных эллиптических уравнений”, *Вестник ЛГУ*, 1955, № 11, 23–29.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 21 октября 2013 г.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках базовой части государственного задания (проект №3047)

Kozhanov A. I., Potapova S. V. The Dirichlet problem for a class of composite type equations with a discontinuous coefficient of the highest derivative. Far Eastern Mathematical Journal. 2014. V. 14. № 1. P. 48–65.

ABSTRACT

This paper investigates the solvability of the Dirichlet problem in classes of regular or almost regular solutions of composite type equations with a discontinuous alternating in sign coefficient. The existence and uniqueness theorems are proved by regularization and continuation methods.

Key words: *composite type equations with a discontinuous coefficient, regular solvability.*