Дальневосточный математический журнал. 2014. Том 14. № 1. С. 66–72

УДК 519.116 + 511.556
MSC2010 11F20, 11F27

© М. Д. Монина[1]

Арифметическая интерпретация трёхчленного тождества из теории эллиптических функций

В работе предложено основанное на арифметических методах Лиувилля доказательство трёхчленного тождества из теории эллиптических функций.

Ключевые слова: *эллиптическая функция, тэта-функция, методы Лиувилля, трёхчленное тождество.*

Введение

Говорят, что голоморфная на всей плоскости комплексного переменного (другими словами – целая) функция f удовлетворяет *трёхчленному уравнению*, если для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3 и z_4 выполняется равенство

$$\begin{gathered} f(z_1+z_2)f(z_1-z_2)f(z_3+z_4)f(z_3-z_4)+f(z_1+z_3)f(z_1-z_3)f(z_4+z_2)f(z_4-z_2)+ \\ +f(z_1+z_4)f(z_1-z_4)f(z_2+z_3)f(z_2-z_3)=0. \end{gathered} \tag{1}$$

Пусть λ, A и B – произвольные комплексные числа и при этом $\lambda \neq 0$. Определим новую целую функцию g из равенства

$$g(z)=f(\lambda z)e^{Az^2+B}. \tag{2}$$

Легко проверить, что f удовлетворяет уравнению (1) тогда и только тогда, когда g удовлетворяет этому уравнению. По этой причине будем называть функции f и g, связанные уравнением (2), эквивалентными, с символической записью $f \sim g$.

А. Гурвиц в [1] доказал, что любая функция, тождественно не равная нулю и удовлетворяющая уравнению (1), эквивалентна сигма-функции Вейерштрасса

$$\sigma_\Gamma(z)=z\prod_{\gamma\in\Gamma\setminus\{0\}}\left(1-\frac{z}{\gamma}\right)e^{\frac{z}{\gamma}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2},$$

[1] Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54; Дальневосточный государственный гуманитарный университет, 680000, г. Хабаровск, ул. Карла Маркса, 68. Электронная почта: `monina@iam.khv.ru`

где Γ — произвольная решётка в комплексной плоскости (см. также [2], глава 20, пример 38).

Любая невырожденная решётка имеет вид $\Gamma = \{m\omega_1 + n\omega_2 | m, n \in \mathbb{Z}\}$ с $\tau = \omega_2/\omega_1$ и $\mathrm{Im}\tau > 0$, а в вырожденных случаях:

1) если $\Gamma = \{0\}$, то $\sigma_\Gamma(z) = z$;

2) если $\Gamma = \{mw | m \in \mathbb{Z}\}$, где $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, то

$$\sigma_\Gamma(z) = z \prod_{n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}} \left(1 - \frac{z}{nw}\right) e^{\frac{z}{nw} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{nw}\right)^2} = \frac{w}{\pi} \sin \frac{\pi z}{w} \;\; e^{\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{z}{w}\right)^2}.$$

Следуя традиционным обозначениям, положим

$$\vartheta_1(z) = \vartheta_1(z; q) = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)iz} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \sin(2n+1)z$$

(нечётная тэта-функция Якоби).

Для невырожденной решётки справедливо равенство

$$\sigma_\Gamma(z) = e^{Az^2 + B} \vartheta_1\left(\frac{\pi z}{2}; e^{\pi i \tau}\right)$$

с некоторыми комплексными константами A и B (см. [2], глава 21), зависящими только от ω_1 и ω_2. Поэтому $\sigma_\Gamma \sim \vartheta_1$ и, как было отмечено ещё самим Вейерштрассом, для функции $\vartheta_1(.; q)$ выполняется равенство

$$\vartheta_1(z_1+z_2)\vartheta_1(z_1-z_2)\vartheta_1(z_3+z_4)\vartheta_1(z_3-z_4) + \vartheta_1(z_1+z_3)\vartheta_1(z_1-z_3)\vartheta_1(z_4+z_2)\vartheta_1(z_4-z_2) +$$
$$+\vartheta_1(z_1+z_4)\vartheta_1(z_1-z_4)\vartheta_1(z_2+z_3)\vartheta_1(z_2-z_3) = 0.$$

После замен

$$z_1 \to \frac{w+z+w'+z'}{2}, \qquad z_2 \to \frac{w+z-w'-z'}{2},$$
$$z_3 \to \frac{-w+z+w'+z'}{2}, \qquad z_4 \to \frac{w+z-w'+z'}{2}$$

оно примет вид

$$\vartheta_1(z+w)\vartheta_1(z'+w')\vartheta_1(z+z')\vartheta_1(-w+w') + \vartheta_1(z+z'+w')\vartheta_1(z+w-w')\vartheta_1(z')\vartheta_1(w) +$$
$$+\vartheta_1(-z'+w-w')\vartheta_1(w+z+z')\vartheta_1(z)\vartheta_1(w') = 0.$$

Умножив обе части последнего равенства на $\vartheta_1'^2$, разделив на

$$\vartheta_1(z)\vartheta_1(w)\vartheta_1(z')\vartheta_1(w')\vartheta_1(z+z')\vartheta_1(w'-w)$$

и воспользовавшись нечётностью функции ϑ_1, получим

$$\frac{\vartheta_1(z+w)\vartheta_1'}{\vartheta_1(z)\vartheta_1(w)} \cdot \frac{\vartheta_1(z'+w')\vartheta_1'}{\vartheta_1(z')\vartheta_1(w')} + \frac{\vartheta_1(z+z'+w')\vartheta_1'}{\vartheta_1(z+z')\vartheta_1(w')} \cdot \frac{\vartheta_1(-z-w+w')\vartheta_1'}{\vartheta_1(-z)\vartheta_1(w'-w)} +$$
$$+\frac{\vartheta_1(-z'+w-w')\vartheta_1'}{\vartheta_1(-z')\vartheta_1(w-w')} \cdot \frac{\vartheta_1(z+z'+w)\vartheta_1'}{\vartheta_1(z+z')\vartheta_1(w)} = 0. \tag{3}$$

В 1848 году в работе “Sur la rotation d'un corps” (“О вращении тела”) Якоби опубликовал тождество, которое после некоторых замен переменных приобретает следующий вид:

$$\frac{\vartheta_1(z+w)\vartheta_1'}{\vartheta_1(z)\vartheta_1(w)} = \operatorname{ctg}\, z + \operatorname{ctg}\, w + 4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} q^{2mn}\sin(2mz+2nw) = H(z,w).$$

С его помощью соотношение (3) превращается в тождество

$$H(z,w)H(z',w') + H(z+z',w')H(-z,-w+w') + H(-z',w-w')H(z+z',w) = 0,$$

приведённое в [3] (глава 12, упражнение 6).

Вводя замены $x = e^{2iz}$, $y = e^{2iw}$, $u = e^{2iz'}$ и $v = e^{2iw'}$ и степенной ряд

$$K(x,y) = \frac{x+1}{x-1} + \frac{y+1}{y-1} + 2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(x^{-m}y^{-n} - x^m y^n)q^{2mn} = -iH(z,w),$$

приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Для независимых переменных x, y, u, v справедливо тождество*

$$K(x,y)K(u,v) + K(xu,v)K(1/x, v/y) + K(1/u, y/v)K(xu,y) = 0. \tag{4}$$

В настоящей работе предлагается доказательство последнего тождества, основанное на арифметических методах Лиувилля (см. [4], [5] и [6]) и идеях работ [7], [8] и [9].

Автор благодарен В.А. Быковскому за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

§1. Арифметическое тождество

Мы будем придерживаться следующих обозначений:

1) a, b, a', b' — целые числа;

2) $d, d_1, d_2, m, n, m', n'$ — положительные целые числа;

3) A — аддитивная абелева группа;

4) $\Omega(d)$ — множество всех матриц

$$\omega = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}, \tag{5}$$

для которых

$$\operatorname{per}\omega = ab' + a'b = d;$$

5) U, U^2 — линейные автоморфизмы $\Omega(d)$, переводящие матрицу из (5) в

$$\begin{pmatrix} a' & a'-a \\ -b' & b'+b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a'-a & -a \\ -b'-b & b \end{pmatrix}.$$

При этом
$$U^3 = -E, \quad U^6 = E,$$
где E — тождественное преобразование.

Доказательство тождества (4) базируется на следующем результате, полученном независимо в работах [10] (см. также [11]) и [12] (см. также [6]).

Теорема 2. *Пусть* $\Phi : \Omega(d) \to A$ *— произвольная функция, для которой* $\Phi(U\omega) = \Phi(\omega)$ *при* $\omega \in \Omega(d)$. *Тогда*
$$\sum_{mn'+m'n=d} \left(\Phi \begin{pmatrix} m & m' \\ n & n' \end{pmatrix} - \Phi \begin{pmatrix} m & -m' \\ -n & n' \end{pmatrix} \right) =$$
$$= \sum_{d_1 d_2 = d} \left(\sum_{0 \le a < d_2} \Phi \begin{pmatrix} 0 & d_1 \\ d_2 & -a \end{pmatrix} - \sum_{0 \le b < d_1} \Phi \begin{pmatrix} b & d_1 \\ d_2 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Замечание. *Для произвольной функции* $F : \Omega(d) \to A$, *функция* $\Phi : \Omega(d) \to A$, *определяемая из равенства*
$$\Phi(\omega) = F(\omega) + F(U\omega) + F(U^2\omega) + F(U^3\omega) + F(U^4\omega) + F(U^5\omega),$$
удовлетворяет условию теоремы.

§2. Трёхчленное уравнение

Умножив обе части тождества теоремы на q^{2d} и просуммировав по всем натуральным d, получим равенство
$$\begin{aligned} &\sum_{m,n',m',n \in \mathbb{N}} \left(\Phi \begin{pmatrix} m & m' \\ n & n' \end{pmatrix} - \Phi \begin{pmatrix} m & -m' \\ -n & n' \end{pmatrix} \right) q^{2mn'} q^{2m'n} = \\ &= \sum_{d_1, d_2 \in \mathbb{N}} \left(\sum_{0 \le a < d_2} \Phi \begin{pmatrix} 0 & d_1 \\ d_2 & -a \end{pmatrix} - \sum_{0 \le b < d_1} \Phi \begin{pmatrix} b & d_1 \\ d_2 & 0 \end{pmatrix} \right) q^{2d_1 d_2} \end{aligned} \tag{6}$$
для формальных степенных рядов относительно переменной q.

Положим (см. предыдущий параграф) $F(\omega) = x^m y^{n'} u^{m'} v^n$ с формальными переменными x, y, u, v и
$$\omega = \begin{pmatrix} m & m' \\ n & n' \end{pmatrix}.$$
Тогда (см. замечание из §1)
$$\Phi(\omega) = x^m y^{n'} u^{m'} v^n + x^{-m} y^{-n'} u^{-m'} v^{-n} +$$
$$+ x^{m'-m} y^n u^{-m} v^{-n'-n} + x^{-m'+m} y^{-n} u^m v^{n'+n} + x^{-m'} y^{-n-n'} u^{m-m'} v^{n'} + x^{m'} y^{n+n'} u^{-m+m'} v^{-n'}.$$
Нетрудно проверить, что
$$\Phi \begin{pmatrix} m & m' \\ n & n' \end{pmatrix} - \Phi \begin{pmatrix} m & -m' \\ -n & n' \end{pmatrix} =$$

$$= \left(x^{-m}y^{-n'} - x^{m}y^{n'}\right)\left(u^{-m'}v^{-n} - u^{m'}v^{n}\right) +$$
$$+ \left((xu)^{-m}v^{-n'} - (xu)^{m}v^{n'}\right)\left(x^{m'}(y/v)^{n} - x^{-m'}(y/v)^{-n}\right) +$$
$$+ \left(u^{m}(v/y)^{n'} - u^{-m}(v/y)^{-n'}\right)\left((xu)^{-m'}y^{-n} - (xu)^{m'}y^{n}\right).$$

Поэтому

$$\sum_{0\le a<d_2} \Phi\begin{pmatrix} 0 & d_1 \\ d_2 & -a\end{pmatrix} - \sum_{0\le b<d_1} \Phi\begin{pmatrix} b & d_1 \\ d_2 & 0\end{pmatrix} =$$
$$= u^{d_1}v^{d_2}\sum_{0\le a<d_2} y^{-a} + u^{-d_1}v^{-d_2}\sum_{0\le a<d_2} y^{a} + x^{d_1}(y/v)^{d_2}\sum_{0\le a<d_2} v^{a} + x^{-d_1}(y/v)^{-d_2}\sum_{0\le a<d_2} v^{-a} +$$
$$+ (xu)^{-d_1}y^{-d_2}\sum_{0\le a<d_2}(v/y)^{-a} + (xu)^{d_1}y^{d_2}\sum_{0\le a<d_2}(v/y)^{a} -$$
$$- u^{d_1}v^{d_2}\sum_{0\le b<d_1} x^{b} - u^{-d_1}v^{-d_2}\sum_{0\le b<d_1} x^{-b} - x^{d_1}(y/v)^{d_2}\sum_{0\le b<d_1}(xu)^{-b} - x^{-d_1}(y/v)^{-d_2}\sum_{0\le b<d_1}(xu)^{b} -$$
$$- (xu)^{-d_1}y^{-d_2}\sum_{0\le b<d_1} u^{b} - (xu)^{d_1}y^{d_2}\sum_{0\le b<d_1} u^{-b} =$$
$$= \frac{1-xy}{(x-1)(1-y)}\left(u^{d_1}v^{d_2} - u^{-d_1}v^{-d_2}\right) + \frac{xuy-1}{(xu-1)(1-y)}\left(u^{d_1}\left(\frac{v}{y}\right)^{d_2} - u^{-d_1}\left(\frac{v}{y}\right)^{-d_2}\right) +$$
$$+ \frac{1-uv}{(v-1)(1-u)}\left(x^{d_1}y^{d_2} - x^{-d_1}y^{-d_2}\right) + \frac{xuv-1}{(xu-1)(1-v)}\left(x^{d_1}\left(\frac{y}{v}\right)^{d_2} - x^{-d_1}\left(\frac{y}{v}\right)^{-d_2}\right) +$$
$$+ \frac{xy-v}{(v-y)(x-1)}\left((xu)^{d_1}v^{d_2} - (xu)^{-d_1}v^{-d_2}\right) + \frac{uv-y}{(1-u)(v-y)}\left((xu)^{d_1}y^{d_2} - (xu)^{-d_1}y^{-d_2}\right).$$

Положим
$$\tilde{K}(x,y) = \sum_{d_1,d_2\in\mathbb{N}} (x^{-d_1}y^{-d_2} - x^{d_1}y^{d_2})q^{2d_1d_2}.$$

Опираясь на очевидное равенство

$$\tilde{K}(x,y) = -\tilde{K}(1/x, 1/y),$$

перепишем (6) в виде

$$\tilde{K}(x,y)\tilde{K}(u,v) + \tilde{K}(xu,v)\tilde{K}\left(\frac{1}{x},\frac{v}{y}\right) + \tilde{K}\left(\frac{1}{u},\frac{y}{v}\right)\tilde{K}(xu,y) -$$
$$- \frac{xy-1}{(x-1)(1-y)}\tilde{K}(u,v) - \frac{xuy-1}{(xu-1)(1-y)}\tilde{K}\left(\frac{1}{u},\frac{y}{v}\right) - \frac{uv-1}{(v-1)(1-u)}\tilde{K}(x,y) -$$
$$- \frac{xuv-1}{(xu-1)(1-v)}\tilde{K}\left(\frac{1}{x},\frac{v}{y}\right) - \frac{v-xy}{(v-y)(x-1)}\tilde{K}(xu,v) - \frac{y-uv}{(1-u)(v-y)}\tilde{K}(xu,y) = 0.$$

То есть

$$\tilde{K}(x,y)\tilde{K}(u,v) + \frac{xy-1}{(x-1)(y-1)}\tilde{K}(u,v) + \frac{uv-1}{(v-1)(u-1)}\tilde{K}(x,y) +$$

$$+\tilde{K}(xu,v)\tilde{K}\left(\frac{1}{x},\frac{v}{y}\right)+\frac{xy-v}{(v-y)(x-1)}\tilde{K}(xu,v)+\frac{xuv-1}{(xu-1)(v-1)}\tilde{K}\left(\frac{1}{x},\frac{v}{y}\right)+$$
$$+\tilde{K}\left(\frac{1}{u},\frac{y}{v}\right)\tilde{K}(xu,y)+\frac{y-uv}{(u-1)(v-y)}\tilde{K}(xu,y)+\frac{xuy-1}{(xu-1)(y-1)}\tilde{K}\left(\frac{1}{u},\frac{y}{v}\right)=$$
$$=\left(\tilde{K}(x,y)+\frac{xy-1}{(x-1)(y-1)}\right)\left(\tilde{K}(u,v)+\frac{uv-1}{(v-1)(u-1)}\right)-$$
$$-\frac{(xy-1)(uv-1)}{(x-1)(y-1)(u-1)(v-1)}+\left(\tilde{K}(xu,v)+\frac{xuv-1}{(xu-1)(v-1)}\right)\times$$
$$\times\left(\tilde{K}\left(\frac{1}{x},\frac{v}{y}\right)+\frac{xy-v}{(v-y)(x-1)}\right)-\frac{(xy-v)(xuv-1)}{(x-1)(v-1)(v-y)(xu-1)}+$$
$$+\left(\tilde{K}\left(\frac{1}{u},\frac{y}{v}\right)+\frac{y-uv}{(u-1)(v-y)}\right)\left(\tilde{K}(xu,y)+\frac{xuy-1}{(xu-1)(y-1)}\right)-$$
$$-\frac{(y-uv)(xuy-1)}{(y-1)(u-1)(v-y)(xu-1)}=0.$$

Так как
$$\tilde{K}(x,y)+\frac{xy-1}{(x-1)(y-1)}=\frac{1}{2}K(x,y)$$
и сумма остальных трёх слагаемых равна нулю, то последнее соотношение преобразуется в интересующее нас тождество (4).

Список литературы

[1] A. Hurwitz, "Über die Weierstrass'sche σ-Funktion", *In Festschrift für H.A. Schwarz*, Ges. Abh. Bd. 3, pp.722–730, Berlin, 1914, 133–141.

[2] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа.* Т. 2, Гос. изд. физ.-мат. лит., Москва, 1963.

[3] А. Е. Полищук, *Абелевы многообразия, тэта-функции и преобразование Фурье*, МЦНМО, Москва, 2010.

[4] J. V. Uspensky, M. A. Heaslet, *Elementary Number Theory*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York and London, 1939.

[5] Б. А. Венков, *Элементарная теория чисел*, ОНТИ НКТП СССР, М.; Ленинград, 1937.

[6] Kenneth S. Williams, *Number theory in the spirit of Liouville*, London Mathematical Society Student Texts, 76, Cambridge University Press, 2011.

[7] Н. В. Бударина, В. А. Быковский, "Арифметическая природа тождесв для тройного и пятикратного произведений", *Дальневосточный математический журнал*, **11**:2 (2011), 140–148.

[8] В. А. Быковский, М. Д. Монина, "Арифметические тождества, ассоциированные с квадратичными формами, и их приложения", *Доклады Академии наук*, **449**:5 (2013), 503–506.

[9] В. А. Быковский, М. Д. Монина, "Об арифметической природе некоторых тождеств теории эллиптических функций", *Дальневосточный математический журнал*, **13**:1 (2013), 15–34.

[10] В. А. Быковский, *Модули Эйхлера-Шимуры*, Препринт ДВО РАН. Хабаровское отделение Института прикладной математики, Дальнаука, Владивосток, 2001.

[11] В. А. Быковский, "Обобщение арифметических тождеств Лиувилля и Скоруппы", *Доклады Академии наук*, **432**:6 (2010), 736–737.

[12] J. G. Huard, Z. M. Ou, B. K. Spearman and K. S. Williams, “Elementary evaluation of certain convolution sums involving divisor function”, *Number Theory for the Millennium II*, eds. M. A. Bennett, B. C. Berndt, N. Boston, H. G. Diamond, A. J. Hildebrand, W. Philipp, A. K. Peters, 2002, 229–274.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 10 января 2014 г.

Работа поддержана грантом РФФИ №13-01-91151-ГФЕН-а.

Monina M. D. An arithmetic interpretation of a three-term identity from the elliptic functions theory. Far Eastern Mathematical Journal. 2014. V. 14. № 1. P. 66–72.

ABSTRACT

The article offers the proof of a three-term identity from the elliptic functions theory, based on Liouville’s arithmetical methods.

Key words: *elliptic function, theta function, Liouville’s methods, three-term identity.*