*Дальневосточный математический журнал.* 2014. Том 14. № 1. С. 109–121

УДК 517.958
MSC2010 35Q60 35R30

© И. П. Яровенко[1]

# О разрешимости краевой задачи для уравнения переноса излучения с учетом комптоновского рассеяния

Работа посвящена исследованию разрешимости краевой задачи для уравнения переноса излучения с учетом комптоновского рассеяния. Краевая задача сводится к интегральному уравнению типа Вольтерра второго рода. Итогом работы является теорема существования и единственности решения краевой задачи для уравнения переноса излучения.

Ключевые слова: *теория переноса излучения, комптоновское рассеяние.*

## Введение

В настоящее время в большинстве прикладных задач теории переноса излучения используются диапазоны энергии, где среди всех видов взаимодействия излучения с веществом преобладает комптоновское рассеяние. Данный эффект для большинства веществ начинает проявляться с энергии порядка 10 кэВ. Он был открыт А. Комптоном в 1923 г. и представляет собой процесс некогерентного (с потерей энергии) рассеяния квантов на свободном электроне. При этом разность величин, обратно пропорциональных энергиям падающего и рассеянного фотонов, зависит только от угла рассеяния и не зависит от свойств рассеивающего вещества и энергии падающего излучения [1, 2]. Вероятность фотона, имеющего безразмерную энергию $\alpha$, рассеяться на заданный угол определяется сечением Кляйна – Нишины – Тамма [1, 2]. Несмотря на то что с момента открытия комптон-эффекта прошел практически век, прямая задача для уравнения переноса излучения с сечением Кляйна – Нишины – Тамма в интеграле столкновений была строго исследована лишь недавно в работах Д.С. Аниконова и Д.С. Коноваловой [3, 4].

Данная статья продолжает исследования, начатые в [3, 4]. В работе исследуется корректность постановки краевой задачи для уравнения переноса излучения

[1]Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8; Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: yarovenko@iam.dvo.ru

с учетом комптоновского рассеяния. Основное отличие от упомянутых выше работ заключается в использовании более слабых ограничений на коэффициенты и решение уравнения переноса излучения.

Использование классов суммируемых функций позволило уйти от достаточно сильных ограничений «типа» непрерывности, которые использовались в работах [3, 4]. Похожие исследования для монохроматического уравнения переноса излучения были проведены в работах В.С. Владимирова [5], Т.А. Гермогеновой [6] и В.И. Агошкова [7].

Исследование разрешимости уравнения переноса с комптоновской индикатрисой рассеяния в классах суммируемых функций имеет свои особенности. С одной стороны, дифференциальная часть уравнения остается такой же, как и в монохроматическом случае, что позволяет использовать те же классы, что и в работах [6, 7], и часть утверждений о функциях из них, в частности, теоремы о следах. С другой стороны, отличия в интеграле столкновений, обусловленные спецификой комптоновского рассеяния позволяют получить новые результаты. В частности, удается показать разрешимость краевой задачи без требования выполнения характерных в теории переноса излучения неравенств на альбедо однократного рассеяния.

## Основные определения и ограничения

Будем считать, что процесс переноса излучения рассматривается в некоторой области $G$ с кусочно-гладкой границей $\partial G$ и граница в целом липшецева. Пусть фотоны в процессе взаимодействия излучения с веществом могут рассеиваться только по закону Комптона. Последнее предположение приводит к тому, что при переходе в результате рассеяния фотона с характеристиками $(\omega, \alpha)$ в фотон с характеристиками $(\omega', \alpha')$ эти переменные связаны соотношением Комптона, которое может быть записано следующим образом:

$$\alpha' = g(\omega \cdot \omega', \alpha), \qquad g(\omega \cdot \omega', \alpha) = \frac{\alpha}{1 + \alpha(\omega \cdot \omega' - 1)},$$

где $\omega \cdot \omega'$ означает скалярное произведение векторов $\omega'$ и $\omega$, описывающих направления распространения фотона до и после рассеяния соответственно. Переменная $\omega$ изменяется на единичной сфере $\Omega$, переменная $\omega'$ принадлежит подмножеству единичной сферы $\Omega_{\omega,\alpha} = \{\omega' : \omega' \in \Omega,\ \omega \cdot \omega' \geq 1 - 1/\alpha + 1/\overline{\alpha}\}$ и верны неравенства: $\alpha \leq g(\omega \cdot \omega', \alpha) \leq \overline{\alpha}$, где $\overline{\alpha}$ – максимальная энергия излучения, испускаемая источниками.

Уравнение переноса в рассматриваемом случае будет иметь вид [3, 4]:

$$\begin{gathered} \omega \cdot \nabla_r f(r, \omega, \alpha) + \mu(r, \alpha) f(r, \omega, \alpha) = \\ = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}} k(r, \omega \cdot \omega', \alpha) f(r, \omega', g(\omega \cdot \omega', \alpha)) d\omega' + J(r, \omega, \alpha). \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $f(r, \omega, \alpha)$ — плотность потока излучения в точке $r \in G$, распространяющегося в направлении $\omega \in \Omega$ и имеющего энергию $\alpha \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$; $\mu(r, \alpha)$ — коэффициент полного взаимодействия излучения со средой в точке $r$ при энергии $\alpha$; $J(r,\omega,\alpha)$ — плотность внутренних источников излучения. Функция $k(r,\omega\cdot\omega',\alpha)$ называется индикатрисой рассеяния и определяется сечением Кляйна – Нишины – Тамма [1, 2].

**Замечание 1.** Непосредственно из определения множества $\Omega_{\omega,\alpha}$ вытекает, что для любого фиксированного направления $\omega\in\Omega$ и энергий $\alpha_1,\alpha_2\in[\underline{\alpha},\overline{\alpha}]$ таких, что $\alpha_1<\alpha_2$ следует, что $\Omega_{\omega,\alpha_2}\subset\Omega_{\omega,\alpha_1}$.

**Замечание 2.** Пусть $\omega\in\Omega$ — некоторое фиксированное направление, тогда для любых $\alpha_1,\alpha_2\in[\underline{\alpha},\overline{\alpha}]$ таких, что $\alpha_1<\alpha_2$ справедливо неравенство $g(\omega\cdot\omega',\alpha_2)\le g(\omega\cdot\omega',\alpha_1)$, которое выполняется при всех $\omega'\in\Omega_{\omega,\alpha_1}\bigcap\Omega_{\omega,\alpha_2}$. Справедливость данного замечания вытекает непосредственным образом из оценки производной от функции $g$:

$$\frac{\partial g}{\partial\alpha}=\frac{1}{(1+\alpha(\omega\cdot\omega'-1))^2}>0.$$

Введем основные обозначения. Пусть для любого измеримого по Лебегу множества $Y\subset\mathrm{R}^m$ его $m$–мерная мера обозначается $mes_mY$. Интегрирование функции $\zeta(\omega)$ по сфере $\Omega$ понимается в следующем смысле [8]. Пусть $\theta,\gamma$ — сферические углы вектора $\omega$, т.е. $\omega(\theta,\gamma)=(\sin\theta\,\cos\gamma,\,\sin\theta\,\sin\gamma,\,\cos\theta)$, $0<\theta<\pi$, $0\le\gamma<2\pi$, тогда

$$\int\limits_{\Omega}\zeta(\omega)d\omega=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\ \zeta(\omega(\theta,\gamma))\sin\theta\,d\theta d\gamma.$$

Если $\Omega_0$ — подмножество из $\Omega$, то для трактовки интеграла $\zeta(\omega)$ по $\Omega_0$ достаточно в последнем равенстве умножить подынтегральные выражения на характеристическую функцию $\chi(\omega)$ множества $\Omega_0$, выражая ее справа через углы $\theta,\gamma$. Следуя [8], определим двумерную меру множества $\Omega_0$ как интеграл от $\chi(\omega)$ по $\Omega$.

Пусть $L_{r,\omega}=\{r+\omega t,t=[0,\infty)\}$ — луч из точки $r\in G$ в направлении $\omega$. Обозначим $d(r,\omega)=mes_1(L_{r,\omega}\cap\overline{G})$, $r\in\overline{G}$, $\omega\in\Omega$. Смысл функции $d(r,\omega)$ состоит в выражении длины отрезка луча $L_{r,\omega}$ от точки $r\in G$ до $\partial G$ в направлении $\omega$. Ясно, что $\xi=r-d(r,-\omega)\omega\in\partial G, r\in G$.

Для заданного направления $\omega$ обозначим через $\Gamma_{-\omega}$ подмножество $\partial G$, состоящее из точек $\xi\in\partial G$ таких, что $\{\xi+t\omega\ :\ 0<t<d(\xi,\omega)\}\subset G$ и пусть $\Gamma^-=\Gamma_{-\omega}\times\Omega\times[\underline{\alpha},\overline{\alpha}]$.

Присоединим к (1) следующее граничное условие:

$$f(\xi,\omega,\alpha)=h(\xi,\omega,\alpha),\quad(\xi,\omega,\alpha)\in\Gamma^-.\tag{2}$$

Функция $h(\xi,\omega,\alpha)$ интерпретируется как плотность потока частиц от внешних источников, проникающих в среду $G$ через граничную точку $\xi$ в направлении $\omega$ и имеющих энергию $\alpha$.

Везде далее для краткости будем использовать обозначения $x=(r,\omega,\alpha)$, $X=G\times\Omega\times[\underline{\alpha},\overline{\alpha}]$, $(x\in X)$.

Введем необходимые функциональные пространства. Через $L_p(X)$, будем обозначать пространство функций, модуль которых будет суммируемым со степенью $p$ по Лебегу. Норму в данном пространстве определим, как обычно, $\|\varphi\|_{L_p(X)}=$

$(\int\limits_X |\varphi(x)|^p dx)^{1/p}$. Через $L_\infty(X)$ будем обозначать банахово пространство измеримых ограниченных почти всюду функций с нормой $\|\varphi\|_{L_\infty(X)} = \operatorname{vrai}\sup\limits_X |\varphi(x)|$.

Пусть $C^{0,1}(\overline{X})$ — множество функций $\varphi$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $\varphi(r,\omega,\alpha)$ непрерывно дифференцируемы по $r \in \overline{G}$ при всех $(\omega,\alpha) \in \Omega \times [\underline{\alpha},\overline{\alpha}]$;
2. производная по направлению

$$\omega \cdot \nabla_r \varphi = \left.\frac{\partial f(r+t\omega,\omega,\alpha)}{\partial t}\right|_{t=0}$$

непрерывна на $\overline{X}$ по всем аргументам.

Дифференциальное выражение в левой части уравнения (1) будем понимать в смысле обобщенной производной по направлению, то есть символом $\omega\cdot\nabla_r\varphi(r,\omega,\alpha)$ будем обозначать такую функцию $w \in L_1(X)$, которая удовлетворяет равенству

$$\int\limits_X \varphi(r,\omega,\alpha)\omega\cdot\nabla_r\psi(r,\omega,\alpha)dx = -\int\limits_X w(r,\omega,\alpha)\psi(r,\omega,\alpha)dx,$$

для любых произвольных функций $\psi \in C^{0,1}(\overline{X})$ финитных в $G$ при всех $\omega,\alpha$.

Определим класс функций, в котором будем искать решение. К классу $H_2^1(X)$ будем относить функции $\varphi(r,\omega,\alpha)$, которые обладают следующими свойствами:

1. $\varphi \in L_2(X)$,
2. $\omega\cdot\nabla_r\varphi \in L_2(X)$.

Введем норму в пространстве $H_2^1(X)$ положив

$$\|\varphi\|_{H_2^1(X)} = \|\varphi\|_{L_2(X)} + \|\omega\cdot\nabla_r\varphi\|_{L_2(X)}.$$

Нетрудно показать [7], что множество $H_2^1(X)$ с введенной нормой образует банахово пространство и множество $C^{0,1}(\overline{X})$ всюду плотное в нем. Последнее обстоятельство позволяет определить следы для функций из класса $H_2^1(X)$.

Пусть $\varphi(r,\omega,\alpha)$ - функция из класса $C^{0,1}(\overline{X})$ рассматривая ее значения на множестве $\Gamma^-$ получим функцию $\varphi|_{\Gamma^-}$, которую будем называть граничным значением функции $\varphi$. Определим банахово пространство $L_2(\Gamma^-)$, как пополнение множества всевозможных следов функций из класса $C^{0,1}(\overline{X})$ по норме

$$\|\varphi\|_{L_2(\Gamma^-)} = \left[\int\limits_{\underline{\alpha}}^{\overline{\alpha}}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Gamma_{-\omega}} |\omega\cdot n||\varphi(r,\omega,\alpha)|^2 d\gamma d\omega d\alpha\right]^{1/2}.$$

**Определение 1.** *Назовем функцию $w \in L_2(\Gamma^-)$, следом функции $\varphi \in H_2^1(X)$ и будем писать $\varphi|_{\Gamma^-} = w$, если для любой последовательности $\{\varphi_n\}$ из $C^{0,1}(\overline{X})$ сходящихся к $\varphi$ в $H_2^1(X)$, имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\|w - \varphi_n|_{\Gamma^-}\|_{L_2(\Gamma^-)} = 0$.*

Сформулируем следующее утверждение, которое дает ответ на вопрос о существовании следов функции из класса $H_2^1(X)$. Его доказательство можно найти, например, в [7].

**Лемма 1.** *Для любой функции* $\varphi \in H_2^1(X)$ *существует след* $\varphi|_{\Gamma^-} \in L_2(\Gamma^-)$ *и справедлива оценка*

$$\|\varphi\|_{L_2(\Gamma^-)} \le c\|\varphi\|_{H_2^1(X)}, \tag{3}$$

*где* $c$ *не зависит от* $\varphi$.

Имеет место следующее утверждение [3, 4].

**Лемма 2.** *Справедливы следующие неравенства:*

$$0 \le \omega \cdot \omega' - 1 + \frac{1}{\underline{\alpha}} - \frac{1}{\overline{\alpha}}, \quad \omega' \in \Omega_{\omega,\alpha}$$

$$\int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}} \left(\omega \cdot \omega' - 1 + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\overline{\alpha}}\right)^m d\omega' \le \frac{2\pi}{m+1}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\overline{\alpha}}\right)^{m+1}, \quad m = 0, 1, ...$$

Сформулируем основные предположения относительно функций $\mu, k, J, h$. Будем считать, что функции $\mu, k, J, h$ неотрицательны и $\mu \in L_\infty(G \times [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}])$, $\mu \ge \mu_{min} > 0$, $k \in L_\infty(G \times [-1, 1] \times [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}])$, $J \in L_2(X)$, $h \in L_2(\Gamma^-)$.

Далее, для сокращения записи будем использовать следующие обозначения: $\|\mu\|_{L_\infty(G\times[\underline{\alpha},\overline{\alpha}])} = \|\mu\|_{L_\infty}$, $\|k\|_{L_\infty(G\times[-1,1]\times I)} = \|k\|_{L_\infty}$ .

**Замечание 3.** Отметим, что из введенных ограничений и определения класса $H_2^1(X)$ следует существование величины $Lf \equiv \omega \cdot \nabla_r f + \mu f \in L_2(X)$.

Введем в рассмотрение величины

$$\tau(r, \omega, \alpha, t) = \int\limits_0^t \mu(r - t'\omega, \alpha)dt', \qquad \tau(r, \omega, \alpha) = \int\limits_0^{d(r,-\omega)} \mu(r - t'\omega, \alpha)dt'.$$

Функция $\tau(r, \omega, \alpha, t)$ называется оптическим расстоянием между точками $r$ и $r - t\omega$, а $\tau(r, \omega, \alpha)$ — оптическим расстоянием между $r$ и граничной точкой $r - d(r, -\omega)\omega$.

# Постановка и исследование задачи

Рассмотрим выражения

$$(L\varphi)(r, \omega, \alpha) = \omega \cdot \nabla_r \varphi(r, \omega, \alpha) + \mu(r, \alpha)\varphi(r, \omega, \alpha), \tag{4}$$

$$(A\varphi)(r, \omega, \alpha) = \int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp(-\tau(r, \omega, \alpha, t))\varphi(r - t\omega, \omega, \alpha)dt, \tag{5}$$

$$(S\varphi)(r, \omega, \alpha) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}} k(r, \omega \cdot \omega', \alpha)\varphi(r, \omega', g(\omega \cdot \omega', \alpha))d\omega'. \tag{6}$$

**Лемма 3.** *Выражение (4) определяет линейный ограниченный оператор* $L : H_2^1(X) \to L_2(X)$.

*Доказательство.* Утверждение леммы очевидным образом вытекает из определения оператора $L$ и ограничений на функции $\varphi$ и $\mu$. □

**Лемма 4.** *Выражение (5) определяет линейный ограниченный оператор* $A : L_2(X) \to H_2^1(X)$.

*Доказательство.* Линейность введенного оператора очевидна. Покажем его ограниченность. Для удобства обозначим $w(x) = w(r, \omega, \alpha) = (A\varphi)(r, \omega, \alpha)$. Оценим норму функции $w$ в пространстве $L_2(X)$:

$$\int\limits_X |w(x)|^2 dx = \int\limits_X \left[ \int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp(-\tau(r, \omega, \alpha, t))\varphi(r - t\omega, \omega, \alpha) \right]^2 dtdx \leq$$
$$\leq \int\limits_X \int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp(-2\tau(r, \omega, \alpha, t))dt \int\limits_0^{d(r,-\omega)} \varphi^2(r - t\omega, \omega, \alpha)dtdx \leq d^2 \|\varphi\|^2_{L_2(X)}. \tag{7}$$

Здесь мы воспользовались неравенством Коши – Буняковского и очевидным неравенством $\exp(-2\tau(r, \omega, \alpha, t)) \leq 1$ п.в. на $G \times \Omega \times [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] \times [0, d]$.

Покажем существование производной по направлению у величины $w(x)$. Зафиксируем некоторую точку $r \in G$, направление $\omega \in \Omega$ и энергию $\alpha \in [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$ и рассмотрим функцию $w(x)$ на луче $L_{r,\omega}$:

$$w(r + \omega t, \omega, \alpha) = \int\limits_t^{d(r,\omega)} \exp(-\tau(r + \omega t, \omega, \alpha, t'))\varphi(r + (t - t')\omega, \omega, \alpha)dt', \tag{8}$$

где $t \in [0, d(r, \omega)]$. Учитывая ограничения на функции $\mu$ и $\varphi$, нетрудно заметить, что функция $w(r + \omega t, \omega, \alpha)$ будет абсолютно непрерывна при почти всех $(r, \omega, \alpha) \in X$ как интеграл с переменным пределом интегрирования от суммируемой функции [9]. В силу абсолютной непрерывности функция $w(r + \omega t, \omega, \alpha)$ будет иметь суммируемую производную по переменной $t$ при почти всех $(r, \omega, \alpha) \in X$. Кроме того, справедливо следующее равенство

$$\omega \cdot \nabla(A\varphi)(r, \omega, \alpha) = \varphi(r, \omega, \alpha) - \mu(r, \alpha)\varphi(r, \omega, \alpha), \quad (r, \omega, \alpha) \in X, \tag{9}$$

которое получается непосредственным дифференцированием (8). Отсюда, оценивая производную по направлению $\omega$ от величины $w(x)$, получим

$$\int\limits_X |\omega \cdot \nabla(A\varphi)(r, \omega, \alpha)|^2 dx = \int\limits_X (1 - \mu(r, \alpha))^2 \varphi^2(r, \omega, \alpha)dx \leq \|1 - \mu\|^2_{L_\infty} \|\varphi\|^2_{L_2(X)}. \tag{10}$$

Объединяя (7) и (10) и учитывая очевидное неравенство $\|\varphi\|_{L_2(X)} \leq \|\varphi\|_{H_2^1(X)}$, приходим к окончательной оценке, устанавливающей ограниченность оператора $A$:

$$\|A\varphi\|_{H_2^1(X)} \leq \sqrt{\max\{d^2, \|1 - \mu\|^2_{L_\infty}\}} \|\varphi\|_{L_2(X)} \leq \sqrt{\max\{d^2, \|1 - \mu\|^2_{L_\infty}\}} \|\varphi\|_{H_2^1(X)}.$$

□

Стоит отметить, что из определения операторов $A$ и $L$ и соотношения (9) вытекает, что оператор $A$ будет левым обратным к оператору $L$.

**Лемма 5.** *Выражение (6) определяет линейный ограниченный оператор* $S : L_2(X) \to L_2(X)$.

*Доказательство.* Введем обозначения $w(x) = w(r, \omega, \alpha) = (S\varphi)(r, \omega, \alpha)$ и покажем суммируемость функции $w(x)$. Для этого нам достаточно показать, что якобиан отображения $F : \Omega \times [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] \times \Omega_{\omega,\alpha} \to \Omega \times [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] \times \Omega'_{\omega,\alpha}$, определяемого равенством $F(\omega, \omega', \alpha) = (\omega', g(\omega \cdot \omega', \alpha))$, будет ограничен и отделен от нуля. Здесь $\Omega'_{\omega,\alpha}$ — образ множества $\Omega_{\omega,\alpha}$ при отображении $F$.

Обозначим через $s = (\theta, \gamma)$ и $s' = (\theta', \gamma')$ сферические углы для переменных $\omega, \omega'$ соответственно. Получим следующее отображение:

$$F(s, s', \alpha) = \Big(F_1(s, s', \alpha), F_2(s, s', \alpha), F_3(s, s', \alpha), F_4(s, s', \alpha), F_5(s, s', \alpha)\Big),$$

$$\theta = F_1(s, s', \alpha),\ \gamma = F_2(s, s', \alpha),\ \theta' = F_3(s, s', \alpha),\ \gamma' = F_4(s, s', \alpha),\ g(s, s', \alpha) = F_5(s, s', \alpha).$$

Запишем якобиан этого отображения

$$Q = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F_5}{\partial \theta} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\partial F_5}{\partial \gamma} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\partial F_5}{\partial \theta'} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\partial F_5}{\partial \gamma'} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F_5}{\partial \alpha} \end{vmatrix} = \frac{\partial F_5}{\partial \alpha} = \frac{\partial g}{\partial \alpha} = \frac{1}{\Big(1 + \alpha(\omega \cdot \omega' - 1)\Big)^2}.$$

Из последнего равенства и определения множества $\Omega_{\alpha,\omega}$ легко вытекают следующие неравенства, справедливые при почти всех $\omega, \alpha, \omega' \in \Omega \times [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] \times \Omega_{\omega,\alpha}$:

$$\frac{1}{(1 + 2\overline{\alpha})^2} \leq \frac{\partial g}{\partial \alpha} \leq \left(\frac{\overline{\alpha}}{\underline{\alpha}}\right)^2. \tag{11}$$

Таким образом, отображение $F$ имеет отделенный от нуля, ограниченный якобиан и, следовательно, переводит измеримые множества в измеримые. Из последнего факта непосредственно вытекает суммируемость функции $w(x)$. Покажем теперь, что $w \in L_2(X)$. Оценим норму функции $w$ в пространстве $L_2(X)$:

$$\int\limits_X |w(x)|^2 dx = \int\limits_X |(S\varphi)(r, \omega, \alpha)|^2 dx = \int\limits_X \left[\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}} k(r, \omega \cdot \omega', \alpha) \varphi(r, \omega', g(\omega \cdot \omega', \alpha)) d\omega'\right]^2 dx.$$

Применяя к внутреннему интегралу неравенство Коши – Буняковского, получаем следующую цепочку неравенств:

$$\int\limits_X |w(x)|^2 dx \leq \int\limits_X \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}} k^2(r, \omega \cdot \omega', \alpha) d\omega' \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}} \varphi^2(r, \omega', g(\omega \cdot \omega', \alpha)) d\omega' dx \leq$$

$$\leq \|k\|^2_{L_\infty} \frac{1}{4\pi} \int\limits_X \int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}} \varphi^2(r, \omega', g(\omega \cdot \omega', \alpha)) d\omega' dx.$$

Делая в последнем интеграле замену переменных $\alpha' = g(\omega \cdot \omega', \alpha)$ и учитывая неравенство (11), окончательно получаем

$$\|S\varphi\|^2_{L_2(X)} \le \|k\|^2_{L_\infty} \left(\frac{\overline{\alpha}}{\underline{\alpha}}\right)^2 \|\varphi\|^2_{L_2(X)}.$$

□

**Определение 2.** *Функцию $f \in H^1_2(X)$ назовем решением краевой задачи* (1), (2) *если:*

*1. она удовлетворяет уравнению $(Lf)(r,\omega,\alpha) = (Sf)(r,\omega,\alpha) + J(r,\omega,\alpha)$, при почти всех $(r,\omega,\alpha) \in X$;*

*2. удовлетворяет граничному условию $f|_{\Gamma^-}(\chi,\omega,\alpha) = h(\chi,\omega,\alpha)$ почти всюду на $\Gamma^-$.*

Рассмотрим следующее операторное уравнение:

$$\begin{gathered} f = f_0 + (AS)f, \\ f_0(r,\omega,\alpha) = h(r - d(r,-\omega)\omega,\omega,\alpha)\exp(-\tau(r,\omega,\alpha)) + AJ(r,\omega,\alpha). \end{gathered} \tag{12}$$

**Лемма 6.** *Функция $f \in H^1_2(X)$ является решением краевой задачи* (1), (2) *тогда и только тогда, когда она удовлетворяет уравнению* (12) *при почти всех $(r,\omega,\alpha) \in X$.*

*Доказательство.* Пусть функция $f \in H^1_2(X)$ — решение краевой задачи (1), (2). Покажем, что она при почти всех $(r,\omega,\alpha) \in X$ удовлетворяет операторному уравнению (12). В силу того что функция $f \in H^1_2(X)$ и $\mu \in L_\infty(G \times [\underline{\alpha},\overline{\alpha}])$ величина $(Lf) \in L_2(X)$ и следовательно принадлежит области определения оператора $A$. Перепишем уравнение (1) в операторном виде и к обоим его частям применим оператор $A$:

$$(ALf)(r,\omega,\alpha) = (ASf)(r,\omega,\alpha) + (AJ)(r,\omega,\alpha).$$

Распишем подробно левую часть данного равенства:

$$(ALf)(r,\omega,\alpha) =$$
$$= \int_0^{d(r,-\omega)} \exp(-\tau(r,\omega,\alpha,t))\Big(\omega \cdot \nabla_r f(r-\omega t,\omega,\alpha) + \mu(r-\omega t,\alpha) f(r-\omega t,\omega,\alpha)\Big)dt =$$
$$= \int_0^{d(r,-\omega)} \exp(-\tau(r,\omega,\alpha,t))\Big(\frac{\partial f}{\partial t}(r-\omega t,\omega,\alpha) + \mu(r-\omega t,\alpha) f(r-\omega t,\omega,\alpha)\Big)dt.$$

Учитывая, что при почти всех $(r,\omega,\alpha) \in X$ функция $\tau(r,\omega,\alpha,t)$ будет абсолютно непрерывна по переменной $t$ — как интеграл с переменным верхним пределом интегрирования, а величина $\frac{\partial f}{\partial t}(r-\omega t,\omega,\alpha)$ интегрируема по $t$, то для них справедлива формула интегрирования по частям [9], применяя ее получаем соотношение

$$(ALf)(r,\omega,\alpha) = f(r,\omega,\alpha) - f(r - d(r,-\omega),\omega,\alpha)\exp(-\tau(r,\omega,\alpha)) -$$
$$- \int\limits_0^{d(r,-\omega)} \exp(-\tau(r,\omega,\alpha,t))\Big(-\mu(r-\omega t,\alpha)f(r-\omega t,\omega,\alpha) +$$
$$+\mu(r-\omega t,\alpha)f(r-\omega t,\omega,\alpha)\Big)dt.$$

Отсюда, учитывая граничное условие (2) приходим к справедливости первой части утверждения теоремы. Покажем теперь справедливость обратного утверждения. Пусть функция $f \in H_2^1(X)$ удовлетворяет уравнению (12), покажем, что она будет решением задачи (1), (2).

Нетрудно заметить, что преобразование $\xi = r - d(r,-\omega)\omega$ любой точке $(r,\omega,\alpha)$ ставит в соответствие единственную точку $(\xi,\omega,\alpha) \in \Gamma^-$. Справедливо и обратное утверждение, что любая точка $(\xi+\omega t,\omega,\alpha)$ при таких $t$, что $\xi + \omega t \in G$, определяет единственным образом точку $(r,\omega,\alpha) \in X$, при этом $d(r,-\omega) = t$. Пользуясь данными соотношениями, перепишем уравнение (12) в следующем виде:

$$f(\xi+\omega t,\omega,\alpha) = h(\xi,\omega,\alpha)\exp(-\tau(\xi,\omega,\alpha,t)) +$$
$$+ \int\limits_0^t \exp\left(-\int\limits_{t'}^t \mu(\xi+\nu\omega)d\nu\right)(Sf+J)(\xi+\omega t',\omega,\alpha)dt', \quad (\xi,\omega,\alpha)\in\Gamma^-, \tag{13}$$

где $t \in [0, d(\xi,\omega)]$. Из последнего соотношения при $t=0$ очевидным образом вытекает, что $f|_{\Gamma^-}(\chi,\omega,\alpha) = h(\chi,\omega,\alpha)$ почти всюду на $\Gamma^-$. Покажем теперь, что функция $f$ удовлетворяет уравнению (1). Продифференцируем тождество (13) по переменной $t$:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\xi+\omega t,\omega,\alpha) = (Sf)(\xi+\omega t,\omega,\alpha) + J(\xi+\omega t,\omega,\alpha) -$$
$$-\mu(\xi+\omega t,\alpha)\Bigg[h(\xi,\omega,\alpha)\exp(-\tau(\xi,\omega,\alpha,t)) +$$
$$+ \int\limits_0^t \exp\left(-\int\limits_{t'}^t \mu(\xi+\nu\omega)d\nu\right)(Sf+J)(\xi+\omega t',\omega,\alpha)dt\Bigg].$$

Нетрудно заметить, что выражение в квадратных скобках последнего соотношения совпадает с правой частью уравнения (12), поэтому его можно заменить на $f(\xi+\omega t,\omega,\alpha)$. В результате такой замены приходим к выводу, что функция $f$ удовлетворяет уравнению (1). Тем самым теорема доказана полностью. $\square$

Докажем основную теорему устанавливающую разрешимость краевой задачи (1), (2).

**Теорема 1.** *Решение краевой задачи (1), (2) существует и единственно.*

*Доказательство.* Для доказательства теоремы нам достаточно показать, что существует единственное решение уравнения (12). Для этого нам достаточно показать, что, начиная с некоторой степени $n_0$, будет выполняться неравенство $\|(AS)^n\| < 1, \; n \geq n_0$. Везде далее для сокращения записи будем использовать обозначение $T = AS$. Сначала докажем методом математической индукции следующую оценку:

$$|(T^n\varphi)(r_0,\omega_0,\alpha_0)|^2 \leq \frac{d^n\|k\|^{2n}_{L_\infty}}{(4\pi)^n}\int\limits_0^{d_0}\int\limits_{\Omega_0}\dots\int\limits_0^{d_{n-1}}\int\limits_{\Omega_{n-1}}\varphi^2\left(r_n,\omega_n,\alpha_n\right)d\omega_n dt_n \dots d\omega_1 dt_1, \quad (14)$$

где $\Omega_i = \Omega_{\omega_i,\alpha_i} \;\; \alpha_i = g(\omega_{i-1}\cdot\omega_i,\alpha_{i-1}), \; d_i = d(r_i,-\omega_i), \; r_i = r_{i-1} - \omega_{i-1}t_i, \; i = 1,...,n.$

Проверим базу индукции. Применяя неравенство Коши – Буняковского и очевидные оценки $\exp\{-\tau(r,\omega_0,\alpha_0,t)\} < 1, \; mes_2\Omega_0 \leq 4\pi$, получаем следующую цепочку неравенств:

$$|(T\varphi)(r_0,\omega_0,\alpha_0)|^2 =$$

$$= \left|\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{d_0}\exp\{-\tau(r_0,\omega_0,\alpha_0,t_1)\}\int\limits_{\Omega_0}k(r_0-\omega_0t_1,\omega_0\cdot\omega_1,\alpha_0)\varphi(r_0-\omega_0t_1,\omega_1,\alpha_1)d\omega_1dt_1\right|^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{d_0}\int\limits_{\Omega_0}k^2(r_0-\omega_0t_1,\omega_0\cdot\omega_1,\alpha_0)d\omega_1dt_1\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{d_0}\int\limits_{\Omega_0}\varphi^2(r_0-\omega_0t_1,\omega_1,\alpha_0)d\omega_1dt_1 \leq$$

$$\leq \frac{d\|k\|^2_{L_\infty}}{4\pi}\int\limits_0^{d_0}\int\limits_{\Omega_0}\varphi^2(r_1,\omega_1,\alpha_0)d\omega_1dt_1.$$

Таким образом, справедливость оценки (14) при n=1 доказана. Пусть теперь оценка (14) справедлива при $n = m$. Покажем ее справедливость при $n = m+1$:

$$|(T^{m+1}\varphi)(r_0,\omega_0,\alpha_0)|^2 = |(T(T^m\varphi)(r_0,\omega_0,\alpha_0)|^2 =$$

$$= \left|\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{d_0}\exp\{-\tau(r_0,\omega_0,\alpha_0,t_1)\}\int\limits_{\Omega_0}k(r_1,\omega_0\cdot\omega_1,\alpha_0)(T^m\varphi)(r_1,\omega_1,\alpha_1)d\omega_1dt_1\right|^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{d_0}\int\limits_{\Omega_0}k^2(r_1,\omega_0\cdot\omega_1,\alpha_0)d\omega_1dt_1\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{d_0}\int\limits_{\Omega_0}(T^m\varphi)^2(r_1,\omega_1,\alpha_0)d\omega_1dt_1 \leq$$

$$\leq \frac{d\|k\|^2_{L_\infty}}{4\pi}\int\limits_0^{d_0}\int\limits_{\Omega_0}(T^m\varphi)^2(r_1,\omega_1,\alpha_0)d\omega_1dt_1.$$

Применяя в последнем интеграле гипотезу индукции, после некоторых переобозначений приходим к справедливости оценки (14) для $n = m+1$.

Применяя неравенство (14) оценим норму оператора $T^n$ в пространстве $L_2(X)$:

$$\|T^n\varphi\|^2_{L_2(X)} = \int\limits_G \int\limits_\Omega \int\limits_{\underline{\alpha}}^{\overline{\alpha}} |(T^n\varphi)(r_0,\omega_0,\alpha_0)|^2 dr_0 d\omega_0 d\alpha_0 \le$$
$$\le \frac{d^n\|k\|^{2n}_{L_\infty}}{(4\pi)^n} \int\limits_G \int\limits_\Omega \int\limits_{\underline{\alpha}}^{\overline{\alpha}} \int\limits_0^{d_0} \int\limits_{\Omega_0} \ldots \int\limits_0^{d_{n-1}} \int\limits_{\Omega_{n-1}} \varphi^2\left(r_n,\omega_n,\alpha_n\right) d\omega_n dt_n \ldots d\omega_1 dt_1 d\alpha_0 d\omega_0 dr_0. \tag{15}$$

Обозначим через $\chi_G(r)$ характеристическую функцию множества $G$ и перепишем (15) в следующем виде:

$$\|T^n\varphi\|^2_{L_2(X)} \le \frac{d^n\|k\|^{2n}_{L_\infty}}{(4\pi)^n} \times$$
$$\times \int\limits_\Omega \int\limits_{\underline{\alpha}}^{\overline{\alpha}} \int\limits_0^{d} \int\limits_{\Omega_0} \ldots \int\limits_0^{d} \int\limits_{\Omega_{n-1}} \int\limits_G \chi_G(r_1)\ldots\chi_G(r_n)\varphi^2\left(r_n,\omega_n,\alpha_n\right) dr_0 d\omega_n dt_n \ldots d\omega_1 dt_1 d\alpha_0 d\omega_0. \tag{16}$$

Рассмотрим интеграл по области $G$ более подробно. Вводя замену переменных $z = r_n$, приходим к следующей оценке:

$$\int\limits_G \chi_G(r_1)\ldots\chi_G(r_n)\varphi^2\left(r_n,\omega_n,\alpha_n\right) dr_0 \le$$
$$\le \int\limits_G \chi_G(r_n)\varphi^2\left(r_n,\omega_n,\alpha_n\right) dr_0 \le \int\limits_G \varphi^2\left(z,\omega_n,\alpha_n\right) dz. \tag{17}$$

Подставляя (17) в (16), получаем оценку:

$$\|T^n\varphi\|^2_{L_2(X)} \le \frac{d^{2n}\|k\|^{2n}_{L_\infty}}{(4\pi)^n} \int\limits_\Omega \int\limits_{\underline{\alpha}}^{\overline{\alpha}} \int\limits_{\Omega_0} \ldots \int\limits_{\Omega_{n-1}} \int\limits_G \varphi^2\left(z,\omega_n,\alpha_n\right) dz d\omega_n \ldots d\omega_1 d\alpha_0 d\omega_0. \tag{18}$$

Введем в рассмотрение следующие величины $\underline{\alpha}_i = g(\omega_{i-1}\cdot\omega_i, \underline{\alpha}_{i-1}), \underline{\alpha}_0 = \underline{\alpha}$ и соответствующие им множества $\underline{\Omega}_i = \Omega_{\omega_i,\underline{\alpha}_i}$, $i = 0,..,n-1$. В силу замечаний 1 и 2 будут справедливы неравенства и включения:

$$\underline{\alpha}_i \le \alpha_i, \quad \Omega_i \subset \underline{\Omega}_i, \qquad i = 1,...,n-1.$$

Учитывая это, преобразуем (18) к следующему виду:

$$\|T^n\varphi\|^2_{L_2(X)} \le \frac{d^{2n}\|k\|^{2n}_{L_\infty}}{(4\pi)^n} \int\limits_\Omega \int\limits_{\underline{\Omega}_0} \ldots \int\limits_{\underline{\Omega}_{n-1}} \int\limits_G \int\limits_{\underline{\alpha}}^{\overline{\alpha}} \varphi^2\left(z,\omega_n,\alpha_n\right) d\alpha_0 dz d\omega_n \ldots d\omega_1 d\omega_0. \tag{19}$$

Делая замену переменных $\alpha' = \alpha_n$ и учитывая соотношение (11) получаем цепочку неравенств:

$$\|T^n\varphi\|^2_{L_2(X)} \le$$

$$\le \frac{d^{2n}\|k\|^{2n}_{L_\infty}}{(4\pi)^n}\left(\frac{\overline{\alpha}}{\underline{\alpha}}\right)^{2n}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\underline{\Omega}_0}\dots\int\limits_{\underline{\Omega}_{n-2}} d\omega_{n-2}\dots d\omega_1 d\omega_0 \int\limits_{G}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\underline{\alpha}}^{\overline{\alpha}} \varphi^2(z,\omega_n,\alpha')\,d\alpha' d\omega_n dz \le$$

$$\le \frac{d^{2n}\|k\|^{2n}_{L_\infty}}{(4\pi)^n}\left(\frac{\overline{\alpha}}{\underline{\alpha}}\right)^{2n}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\underline{\Omega}_0}\dots\int\limits_{\underline{\Omega}_{n-2}} d\omega_{n-2}\dots d\omega_1 d\omega_0 \|\varphi\|^2_{L_2(X)}$$

Нетрудно заметить, что интегралы по областям $\underline{\Omega}_i,\ i = 0..n-2$ в последней формуле могут быть вычислены аналитически, при помощи леммы 2. Окончательно приходим к следующему неравенству:

$$\|T^n\varphi\|^2_{L_2(X)} \le \frac{d^{2n}\|k\|^{2n}_{L_\infty}}{2^n n!}\left(\frac{\overline{\alpha}}{\underline{\alpha}}\right)^{2n}\left(\frac{1}{\underline{\alpha}} - \frac{1}{\overline{\alpha}}\right)^n \|\varphi\|^2_{L_2(X)}. \tag{20}$$

Оценим величину $\omega\cdot\nabla_r T^n\varphi$, применяя соотношения (10), (11) и (20):

$$\begin{gathered}\|\omega\cdot\nabla_r T^n\varphi\|^2_{L_2(X)} = \int\limits_X \omega\cdot\nabla_r(AST^{n-1}\varphi)(r,\omega,\alpha)dx \le \\ \le \|1-\mu\|^2_{L_\infty}\|ST^{n-1}\varphi\|_{L_2(X)} \le \\ \le \|1-\mu\|^2_{L_\infty}\|k\|^2_{L_\infty}\left(\frac{\overline{\alpha}}{\underline{\alpha}}\right)^2\|T^{n-1}\varphi\|^2_{L_2(X)} \le \\ \le \|1-\mu\|^2_{L_\infty}\frac{d^{2(n-1)}\|k\|^{2n}_{L_\infty}}{2^{n-1}(n-1)!}\left(\frac{\overline{\alpha}}{\underline{\alpha}}\right)^{2n}\left(\frac{1}{\underline{\alpha}} - \frac{1}{\overline{\alpha}}\right)^{n-1}\|\varphi\|^2_{L_2(X)}\end{gathered} \tag{21}$$

Объединяя (20) и (21) приходим к следующей оценке $n-$ой степени оператора $T$ в пространстве $H^1_2$:

$$\begin{gathered}\|T^n\varphi\|_{H^1_2(X)} \le \frac{d^{n-1}\|k\|^n_{L_\infty}}{\sqrt{2}^n\sqrt{(n-1)!}}\left(\frac{\overline{\alpha}}{\underline{\alpha}}\right)^n\left(\frac{1}{\underline{\alpha}} - \frac{1}{\overline{\alpha}}\right)^{\frac{n-1}{2}} \times \\ \times\left[\|1-\mu\|^2_{L_\infty} + d\sqrt{n}\left(\frac{1}{\underline{\alpha}} - \frac{1}{\overline{\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\|\varphi\|_{H^1_2(X)}.\end{gathered}$$

Из последней оценки вытекает, что найдется такой номер $n$, начиная с которого будет выполняться неравенство $\|T^n\| < 1$. Таким образом, n-ая степень оператора $T$ будет сжимающим оператором. Отсюда на основании леммы 6 и теоремы о неподвижной точке для сжимающих отображений, переводящих банахово пространство в себя [10], следует, что краевая задача (1), (2) имеет единственное решение. □

## Список литературы

[1] У. Фано, Л. Спенсер, М. Бергер, *Перенос гамма излучения*, Госатомиздат, М., 1963.

[2] О. И. Лейпунский, Б. В. Новожилов, В. Н. Сахаров, *Распространение гамма-квантов в веществе*, Физматгиз, М., 1960.

[3] Д. С. Аниконов, Д. С. Коновалова, “Кинетическое уравнение переноса для случая комптоновского рассеяния”, *Сибирский математический журнал*, **43**:5 (2002), 987—1001.

[4] Д. С. Аниконов, Д. С. Коновалова, “Краевая задача для уравнения переноса с чисто комптоновским рассеянием”, *Сибирский математический журнал*, **46**:1 (2005), 3–16.

[5] В. С. Владимиров, *Математические задачи односкоростной теории переноса частиц*, Тр. МИАН СССР №61, Изд-во АН СССР, М., 1961.

[6] Т. А. Гермогенова, “Обобщенные решения краевых задач для уравнения переноса”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **9**:3 (1969), 605—625.

[7] В. И. Агошков, *Обобщенные решения уравнения переноса и свойства их гладкости*, Наука, М., 1988.

[8] В. А. Зорич, *Математический анализ*, Наука, М., 1984.

[9] С. М. Никольский, *Курс математического анализа*, Наука, М., 1975.

[10] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Физматлит, М., 2004.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 20 сентября 2013 г.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-01-31131) и Конкурсного проекта ДВО РАН (проект 13-III-В-01М-005)

---

*Yarovenko I. P.* On the solvability of the boundary value problem for the radiation transfer equation with the Compton scattering effect. Far Eastern Mathematical Journal. 2014. V. 14. № 1. P. 109–121.

ABSTRACT

The work is devoted to the study of the solubility of the boundary problem for the radiation transfer equation with the Compton scattering effect. The boundary value problem is reduced to the equivalent integral equation of Volterra type. The result of the work is the existence and uniqueness theorem of the solution for the boundary value problem of the radiative transfer equation.

Key words: *radiation transfer theory, Compton scattering.*