Дальневосточный математический журнал. 2014. Том 14. № 2. С. 127–140

УДК 517.95
MSC2010 35Q93, 65N21, 78A46

© Г. В. Алексеев, А. В. Лобанов[1]

Оценки устойчивости в двумерной задаче маскировки материальных тел

Рассматривается задача управления для двумерной модели рассеяния E-поляризованных электромагнитных волн, возникающая при создании средств маскировки материальных тел. В качестве управления выбирается функция, входящая в импедансное граничное условие. Доказывается разрешимость как исходной прямой задачи, так и задачи управления. Выводится система оптимальности и на основе ее анализа устанавливается единственность и устойчивость оптимальных решений относительно определенных возмущений функционала качества и падающей волны.

Ключевые слова: *задача рассеяния, условия сопряжения, граничная проводимость, задача управления, оценки устойчивости.*

Введение. Формулировка краевой задачи

В последние годы большое внимание уделяется исследованию задач маскировки материальных объектов. Разработке теоретических и численных методов решения указанных задач посвящено большое количество работ (см., например, [1, 2, 3, 4]). В математическом плане задачи маскировки заключаются в нахождении неизвестных коэффициентов уравнений Гельмгольца или Максвелла путем решения обратных задач для указанных уравнений. Нужно отметить, что техническая реализация решений, полученных в этих статьях, связана со значительными техническими трудностями [5].

Более предпочтительным с точки зрения технической реализации решений является использование альтернативного способа маскировки, основанного на покрытии материальных объектов тонким слоем определенного вещества. Наличие такого покрытия математически моделируется граничным условием для электромагнитного поля, содержащим коэффициент, называемый поверхностным импедансом либо поверхностной проводимостью. Физическое обоснование такого способа маскировки в случае акустической локации можно найти в [6]. Близкие задачи

[1]Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7; Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8. Электронная почта: alekseev@iam.dvo.ru, alekslobanov1@mail.ru

управления импедансом в случае внешней краевой задачи для уравнения Гельмгольца изучены в [7, 8]. Аналогичные задачи для уравнений Максвелла с постоянными коэффициентами, рассматриваемых в ограниченной области, изучены в [9, 10]. Отметим также статьи [11, 12], посвященные исследованию устойчивости и глобальной сходимости коэффициентных обратных задач для волнового уравнения.

Настоящая работа посвящается исследованию задачи маскировки для двумерной модели электромагнитного поля, описывающей рассеяние E-поляризованных электромагнитных волн в неограниченной однородной среде, содержащей ограниченное проницаемое диэлектрическое препятствие Ω с покрытой (в целях маскировки) границей Γ. Хорошо известно, что при указанных выше условиях задача рассеяния сводится к нахождению функций v в Ω и $u = u^{inc} + u^s$ в Ω^c из соотношений

$$\Delta v + k^2\delta(x)v = 0 \text{ в } \Omega, \qquad \triangle u + k^2 u = 0 \text{ в } \Omega^c = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}, \tag{1}$$

$$v - u = 0 \text{ на } \Gamma, \qquad \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} = i\eta(x)u \text{ на } \Gamma, \tag{2}$$

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s\right) = 0 \quad \text{ при } r = |x| \to \infty. \tag{3}$$

Здесь u^{inc} — заданная в Ω^c падающая волна, u^s — искомая рассеянная волна, η — поверхностная проводимость границы Γ, k — волновое число, ($k^2 = \varepsilon_0\mu_0\omega^2$, где ω — угловая частота, ε_0 и μ_0 — постоянные электрическая и магнитная проницаемости), $\delta(x)$ — индекс рефракции диэлектрического препятствия Ω, i — мнимая единица, n — единичный вектор внешней по отношению к Ω нормали к границе Γ, $\partial v/\partial n$ — нормальная производная функции v на Γ. Отметим, что условие (3) имеет смысл условия излучения Зоммерфельда в $\mathbb{R}^2$, тогда как второе граничное условие в (2) имеет смысл модифицированного граничного условия Леонтовича для E — поляризованных электромагнитных волн [13, 14].

Формулировку задачи (1)–(3) и ее анализ можно найти в [15], там же рассмотрены обратные задачи рассеяния, связанные с восстановлением формы препятствия по измерениям в дальней зоне. Ниже мы рассмотрим обратную экстремальную задачу для модели (1)–(3), заключающуюся в восстановлении проводимости η исходя из условия минимума определенного функционала качества. Указанная задача возникает при создании средств маскировки материальных тел. Сначала мы докажем существование слабого решения исходной прямой задачи и выведем априорную оценку решения с константой, не зависящей от проводимости η. Далее мы докажем разрешимость указанной задачи управления и выведем систему оптимальности, описывающую необходимые условия экстремума. Затем на основе анализа полученной системы оптимальности будут установлены дополнительные условия на исходные данные. Эти условия обеспечивают единственность и устойчивость оптимальных решений относительно малых возмущений как исходного функционала качества, так и падающей на объект волны.

1. Функциональные пространства. Предварительные результаты

Будем предполагать ниже, что выполняются следующие условия:

(i) Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$, а множество $\Omega^c = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ связно.

Введем некоторые функциональные пространства, которые будем использовать при изучении разрешимости задачи (1)–(3). Пусть B_R — круг радиуса R с центром в начале координат и границей Γ_R, содержащий Ω, $\Omega_e = \Omega^c \cap B_R$. Ясно, что Ω_e — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega_e = \Gamma \cup \Gamma_R$, так что Γ является границей области Ω и частью границы $\partial\Omega_e = \Gamma \cup \Gamma_R$ области Ω_e. Будем использовать пространства $H^1(\Omega)$, $H^1(\Omega_e)$, $L^2(Q)$, $L^2(\Gamma)$, $H^{1/2}(\Gamma_R)$, $H^{-1/2}(\Gamma_R)$, $L^\infty(\Gamma)$, $H^s(\Gamma)$, состоящие в общем случае из комплекснозначных функций с нормами $\|\cdot\|_{1,\Omega}$, $\|\cdot\|_{1,\Omega_e}$, $\|\cdot\|_Q$, $\|\cdot\|_\Gamma$, $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma_R}$, $\|\cdot\|_{-1/2,\Gamma_R}$, $\|\cdot\|_{L^\infty(\Gamma)}$ и $\|\cdot\|_{s,\Gamma}$ соответственно. Нам также потребуется пространство $X = H^1(B_R)$ с нормой $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{1,B_R}$ и пространство $H^1(\Delta, \Omega_e) = \{v \in H^1(\Omega_e) : \Delta v \in L^2(\Omega_e)\}$ с нормой $\|v\|^2_{H^1(\Delta,\Omega_e)} = \|v\|^2_{1,\Omega_e} + \|\Delta v\|^2_{\Omega_e}$. Известно, что пространство X компактно вкладывается в пространство $L^2(B_R)$ и справедливы следующие оценки:

$$\|\Phi\|_\Gamma \le \|\Phi\|_{1/2,\Gamma} \le C_\Gamma \|\Phi\|_X, \qquad \|\Phi\|_{1/2,\Gamma_R} \le C_R \|\Phi\|_X \ \forall \Phi \in X. \tag{4}$$

Здесь C_Γ и C_R — константы, не зависящие от функции $\Phi \in X$. Введем пространство $\mathcal{H}^{inc} \equiv \mathcal{H}^{inc}(\Omega_e) = \{v \in H^1(\Omega_e) : \Delta v + k^2 v = 0 \text{ в } \mathcal{D}'(\Omega_e)\}$, служащее для описания падающих волн. Ясно, что $\mathcal{H}^{inc} \subset H^1(\Delta, \Omega_e)$, причем норма $\|\cdot\|_{1,\Omega_e}$ в $\mathcal{H}^{inc}$ эквивалентна норме $\|\cdot\|_{H^1(\Delta,\Omega_e)}$. Следовательно, для любой падающей волны $u^{inc} \in \mathcal{H}^{inc}$ существует след (нормальная компонента) $\partial u^{inc}/\partial n|_{\Gamma_R} \in H^{-1/2}(\Gamma_R)$ (см., например, [16, с. 31]). Более того, существует константа C'_R, не зависящая от волны u^{inc}, с которой выполняется следующая оценка:

$$\|\partial u^{inc}/\partial n\|_{-1/2,\Gamma_R} \le C'_R \|u^{inc}\|_{1,\Omega_e} \ \forall u^{inc} \in \mathcal{H}^{inc}. \tag{5}$$

Скалярные произведения в $L^2(D)$ и в $H^s(\Gamma)$, где $D \subseteq B_R$ — произвольное открытое подмножество, будем обозначать через $(\cdot,\cdot)_D$ и $(\cdot,\cdot)_{s,\Gamma}$ соответственно. В частности, полагаем

$$(u,v)_\Omega = \int\limits_\Omega u(x)\overline{v}(x)\,dx, \quad (u,v)_{\Omega_e} = \int\limits_{\Omega_e} u(x)\overline{v}(x)\,dx, \quad (u,v)_\Gamma = \int\limits_\Gamma u(x)\overline{v}(x)\,d\sigma.$$

Здесь и ниже $\overline{v}$ обозначает комплексно-сопряженную функцию к v.

Введем выпуклые подмножества $L^\infty_{\eta_0}(\Gamma) = \{\eta \in L^\infty(\Gamma) : \eta(x) \ge \eta_0\}$ и $H^s_{\eta_0}(\Gamma) = \{\eta \in H^s(\Gamma) : \eta(x) \ge \eta_0\}$, $\eta_0 = \text{const} > 0, s > 0$, соответственно пространств $L^\infty(\Gamma)$ и $H^s(\Gamma)$. Указанные подмножества будут служить для описания проводимости η. Отметим, что при $s > 1/2$ имеет место непрерывное компактное вложение $H^s(\Gamma) \subset L^\infty(\Gamma)$, так что с некоторой константой C_s, зависящей от s и Ω, справедлива следующая оценка:

$$\|\eta\|_{L^\infty(\Gamma)} \le C_s \|\eta\|_{s,\Gamma} \quad \forall \eta \in H^s(\Gamma), \qquad \|\eta\|_{s,\Gamma} \equiv \|\eta\|_{H^s(\Gamma)}. \tag{6}$$

2. Разрешимость исходной задачи сопряжения. Оценки решений

В этом разделе мы дадим понятие слабого решения задачи (1)–(3) и выведем для него априорную оценку. Сначала мы сведем задачу (1)–(3) к эквивалентной задаче, рассматриваемой в круге B_R. С этой целью, как и в [7, 8], введем оператор Дирихле – Неймана $T : H^{1/2}(\Gamma_R) \to H^{-1/2}(\Gamma_R)$, который ставит в соответствие каждой функции $g \in H^{1/2}(\Gamma_R)$ функцию $\partial\tilde{u}/\partial n \in H^{-1/2}(\Gamma_R)$, где $\tilde{u}$ – решение внешней задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца $\Delta\tilde{u} + k^2\tilde{u} = 0$ в $\Omega^c \backslash \overline{B}_R$ с условием $\tilde{u}|_{\Gamma_R} = g$, удовлетворяющее условию излучения (3). Известно, что $T \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_R), H^{-1/2}(\Gamma_R))$, причем выполняются оценки

$$\|T\| = \|T\|_{\mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_R),H^{-1/2}(\Gamma_R))} \le C_1, \quad \mathrm{Im}\int\limits_{\Gamma_R} \overline{\Phi} T\Phi \, d\sigma > 0 \ \ \forall \Phi \in H^{1/2}(\Gamma_R), \Phi \ne 0 \qquad (7)$$

(см., например, [17]). Здесь и ниже интеграл по Γ_R обозначает отношение двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_R}$ между $H^{1/2}(\Gamma_R)$ и $H^{-1/2}(\Gamma_R)$, $C_1, C_2, C_3, ...$ обозначают постоянные, зависящие от Ω, R, волнового числа k и, быть может, от индекса рефракции δ, входящего в (1). Кроме того, существует оператор $T_0 \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_R), H^{-1/2}(\Gamma_R))$ такой, что $T - T_0$ является компактным оператором из $H^{1/2}(\Gamma_R)$ в $H^{-1/2}(\Gamma_R)$ и выполняются оценки

$$\|T_0\| \le C_2 \text{ и } \int\limits_{\Gamma_R} \overline{\Phi} T_0 \Phi \, d\sigma \le 0 \text{ для всех } \Phi \in H^{1/2}(\Gamma_R). \qquad (8)$$

Отметим, что задача (1)–(3), рассматриваемая на всей плоскости $\mathbb{R}^2$, эквивалентна задаче (1), (2), рассматриваемой в круге B_R при следующем граничном условии для рассеянного поля u^s на Γ_R:

$$\partial u^s/\partial n = T u^s \ \text{ на } \Gamma_R. \qquad (9)$$

Для краткости будем ссылаться на задачу (1), (2), (9) как на задачу 1.

Пусть $\Phi \in X$ — произвольная тестовая функция, $u^{inc} \in \mathcal{H}^{inc}$. Умножив первое уравнение в (1) на сужение $\overline{\Phi}|_\Omega$, второе уравнение в (1) — на $\Phi|_{\Omega_e}$, проинтегрируем полученные равенства по Ω и Ω_e, применим формулы Грина и сложим. Поскольку, в силу граничных условий (2) и (9),

$$\int\limits_{\Gamma} \overline{\Phi}(\frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n}) \, d\sigma = i \int\limits_{\Gamma} \eta \overline{\Phi} u \, d\sigma,$$

$$\int\limits_{\Gamma_R} \overline{\Phi} \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma = \int\limits_{\Gamma_R} \overline{\Phi} \frac{\partial u^s}{\partial n} \, d\sigma + \int\limits_{\Gamma_R} \overline{\Phi} \frac{\partial u^{inc}}{\partial n} \, d\sigma = \int\limits_{\Gamma_R} \overline{\Phi} T u \, d\sigma - \int\limits_{\Gamma_R} \overline{\Phi} T u^{inc} \, d\sigma + \int\limits_{\Gamma_R} \overline{\Phi} \frac{\partial u^{inc}}{\partial n} \, d\sigma,$$

то получим

$$\int\limits_{\Omega} \left(\nabla\overline{\Phi} \cdot \nabla v - k^2 \delta \overline{\Phi} v\right) \, d\sigma + \int\limits_{\Omega_e} \left(\nabla\overline{\Phi} \cdot \nabla u - k^2 \overline{\Phi} u\right) \, d\sigma - \int\limits_{\Gamma_R} \overline{\Phi} T u \, d\sigma -$$

$$-i\int\limits_{\Gamma}\eta\overline{\Phi}u\,d\sigma=-\int\limits_{\Gamma_R}\overline{\Phi}Tu^{inc}\,d\sigma+\int\limits_{\Gamma_R}\overline{\Phi}\frac{\partial u^{inc}}{\partial n}\,d\sigma\qquad\forall\Phi\in X. \tag{10}$$

Введем функцию $U\in X$, равную $v(x)$ в Ω и $u(x)$ в Ω_e, и перепишем тождество (10) в виде

$$a^{\eta}(U,\Phi)\equiv a_0(U,\Phi)-a_{\eta}(U,\Phi)=\langle f,\Phi\rangle\quad\forall\Phi\in X. \tag{11}$$

Здесь a_0, a_η и f — полуторалинейные и антилинейная формы, определяемые формулами

$$\begin{gathered}a_0(U,\Phi)=\tilde a_0(U,\Phi)-\int\limits_{\Gamma_R}\overline{\Phi}TU\,d\sigma,\\ \tilde a_0(U,\Phi)=\int\limits_{\Omega}(\nabla\overline{\Phi}\cdot\nabla U-k^2\delta\overline{\Phi}U)\,dx+\int\limits_{\Omega_e}\left(\nabla\overline{\Phi}\cdot\nabla U-k^2\overline{\Phi}U\right)\,dx,\end{gathered} \tag{12}$$

$$a_\eta(U,\Phi)=i(\eta U,\Phi)_\Gamma\equiv i\int\limits_{\Gamma}\eta\overline{\Phi}U\,d\sigma,\qquad\langle f,\Phi\rangle=-\int\limits_{\Gamma_R}\overline{\Phi}Tu^{inc}\,d\sigma+\int\limits_{\Gamma_R}\overline{\Phi}\frac{\partial u^{inc}}{\partial n}\,d\sigma. \tag{13}$$

Решение $U\in X$ задачи (11) назовем слабым решением задачи 1. Стандартным образом можно показать, что введенное слабое решение задачи 1 удовлетворяет уравнениям модели (1) в смысле обобщенных функций, а также граничным условиям (2) и (9) в смысле следов. Кроме того, из результатов [15] следует единственность слабого решения U.

Для доказательства существования решения и вывода априорной оценки решения изучим свойства форм a_0, a_η и правой части $\langle f,\Phi\rangle$ в (11). Используя теорему о следах, теоремы вложения, определение нормы в X и оценки (4), (5), получаем:

$$\begin{gathered}|\langle f,\Phi\rangle|\le(\|T\|\|u^{inc}\|_{1/2,\Gamma_R}+\|\partial u^{inc}/\partial n\|_{-1/2,\Gamma_R})\|\Phi\|_{1/2,\Gamma_R}\le C_3'\|u^{inc}\|_{1,\Omega_e}\|\Phi\|_X\ \forall\Phi\in X,\\ |a_\eta(U,\Psi)|\equiv|(\eta U,\Phi)_\Gamma|\le C_3''\|\eta\|_{L^\infty(\Gamma)}\|U\|_X\|\Phi\|_X\quad\forall U\in X,\ \Phi\in X,\\ |a_0(U,\Phi)|\le(1+k^2)\|U\|_X\|\Phi\|_X+\|T\|\|U\|_{1/2,\Gamma_R}\|\Phi\|_{1/2,\Gamma_R}\le\\ \le C_3'''\|U\|_X\|\Phi\|_X\quad\forall U\in X,\Phi\in X.\end{gathered}$$

Здесь, в частности, $C_3'=(C_1C_R+C_R')C_R, C_3''=C_\Gamma^2$. Из этих оценок следует, что формы a_0, a_η и f непрерывны на X, причем

$$\|a_0\|\le C_3,\ \|a_\eta\|\le C_3\|\eta\|_{L^\infty(\Gamma)},\ \|f\|_{X^*}\le C_3\|u^{inc}\|_{1,\Omega_e},\ C_3=\max\,(C_3',C_3'',C_3'''), \tag{14}$$

где $\|a_0\|\equiv\|a_0\|_{\mathcal{L}(X,X^*)}$, X^* — двойственное пространство к X.

Отметим далее, что полуторалинейная форма a^η, введенная в (11), определяет линейный оператор $A_\eta:X\to X^*$ формулой

$$\langle A_\eta U,\Phi\rangle=a^\eta(U,\Phi)\qquad\forall U\in X,\ \Phi\in X, \tag{15}$$

а вариационная задача (11) для $U\in X$ эквивалентна операторному уравнению

$$A_\eta U=f. \tag{16}$$

Здесь элемент $f \in X^*$ определен в (13). В дополнение к оператору A_η в (15) введем операторы A'_η и $A'' : X \to X^*$ с помощью соотношений

$$\langle A'_\eta U, \Phi\rangle = a'_\eta(U, \Phi) = \int\limits_{B_R} (\nabla\overline{\Phi} \cdot \nabla U + \overline{\Phi} U)\, dx - i \int\limits_{\Gamma} \eta \overline{\Phi} U \, d\sigma - \int\limits_{\Gamma_R} \overline{\Phi} T_0 U \, d\sigma, \qquad (17)$$

$$\langle A'' U, \Phi\rangle \equiv a''(U, \Phi) = -\int\limits_{\Omega} (1 + k^2\delta)\overline{\Phi} U \, dx - (1 + k^2) \int\limits_{\Omega_e} \overline{\Phi} U \, dx - \int\limits_{\Gamma_R} \overline{\Phi}(T - T_0) U \, d\sigma,$$

$$A_\eta = A'_\eta + A''.$$

Для формы a'_η, определенной в (17), выводим, используя (8) и (14):

$$|a'_\eta(U, \Phi)| \le C_4(1 + \|\eta\|_{L^\infty(\Gamma)})\|U\|_X \|\Phi\|_X, \quad \operatorname{Re} a'_\eta(U, U) \ge \|U\|_X^2 \ \forall (U, \Phi) \in X^2. \quad (18)$$

Из (18) следует, что для любой функции $\eta \in L^\infty_{\eta_0}(\Gamma)$, $\eta_0 > 0$, форма a'_η непрерывна и коэрцитивна на X с константой 1. Из теоремы Лакса – Мильграма тогда следует, что оператор $A'_\eta : X \to X^*$ является изоморфизмом. Ясно также, что оператор $A'' : X \to X^*$, определенный в (17), непрерывен и компактен (в силу компактности вложения пространства X в $L^2(B_R)$ и компактности оператора $T - T_0 : H^{1/2}(\Gamma_R) \to H^{-1/2}(\Gamma_R)$). Это означает, что оператор $A_\eta = (A'_\eta + A'') : X \to X^*$ является фредгольмовым оператором. Из единственности решения задачи 1 вытекает, что оператор A_η обратим, и, следовательно, A_η сюръективен. Тогда из теоремы Банаха об обратном операторе следует, что для любой функции $\eta \in L^\infty_{\eta_0}(\Gamma)$, $\eta_0 > 0$ оператор $A_\eta : X \to X^*$ является изоморфизмом.

Обозначим через $A_\eta^{-1} : X^* \to X$ обратный оператор к A_η. Положим $\tilde{C}_\eta = \|A_\eta^{-1}\|$. Из приведенных выше результатов следует, что для любого элемента $f \in X^*$ уравнение (16) имеет единственное решение $U_\eta \in X$, удовлетворяющее оценке

$$\|U_\eta\|_X \le \tilde{C}_\eta \|f\|_{X^*}, \qquad (19)$$

которую с учетом (14) можно переписать в виде $\|U_\eta\|_X \le C_\eta \|u^{inc}\|_{1,\Omega_e}$, где $C_\eta = C_3 \tilde{C}_\eta$.

Предположим теперь, что проводимость η принадлежит непустому ограниченному множеству $K \subset L^\infty_{\eta_0}(\Gamma)$, и покажем, что в этом случае для решения U_η задачи (11), наряду с (19), справедлива оценка

$$\|U_\eta\|_X \le C_0 \|u^{inc}\|_{1,\Omega_e} \quad \forall \eta \in K, \ \ C_0 = C_3 \tilde{C}_0 \qquad (20)$$

с константой $C_0 = C_3 \tilde{C}_0$, где константа $\tilde{C}_0$ не зависит от η. С этой целью положим в (11) $\Phi = -U_\eta$ и возьмем мнимую часть. Учитывая (12), (13), (14), получим

$$\int\limits_{\Gamma} \eta |U_\eta|^2 \, d\sigma + \operatorname{Im} \int\limits_{\Gamma_R} \overline{U}_\eta T U_\eta \, d\sigma = -\operatorname{Im} \langle f, U_\eta\rangle \le C_3 \|u^{inc}\|_{1,\Omega_e} \|U_\eta\|_X.$$

Используя вторую оценку в (7) и условие $\eta \geq \eta_0$, из последнего неравенства приходим к следующей оценке для $\|U_\eta\|_\Gamma$:

$$\|U_\eta\|_\Gamma \equiv \left(\int\limits_\Gamma |U_\eta|^2 \, d\sigma \right)^{1/2} \leq \eta_0^{-1/2} \sqrt{C_3 \|u^{inc}\|_{1,\Omega_e} \|U_\eta\|_X}. \tag{21}$$

Заметим далее, что любую функцию $\eta \in K$ можно представить в виде $\eta = \eta_0 + \tilde{\eta}$, где $\tilde{\eta} \geq 0$, $\|\tilde{\eta}\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq \eta^0 = \mathrm{const}$, а константа η^0 зависит от множества K. Поэтому, полагая в (11) $\eta = \eta_0 + \tilde{\eta}$, будем иметь

$$a_0(U_\eta, \Phi) - i(\eta_0 U_\eta, \Phi)_\Gamma = \langle f, \Phi \rangle + i(\tilde{\eta} U_\eta, \Phi)_\Gamma. \tag{22}$$

Тождество (22) эквивалентно следующему операторному уравнению относительно U_η

$$A_{\eta_0} U_\eta = f_\eta \in X^*, \quad \langle f_\eta, \Phi \rangle = \langle f, \Phi \rangle + i(\tilde{\eta} U_\eta, \Phi)_\Gamma \quad \forall \Phi \in X \tag{23}$$

с обратимым (в силу предыдущих результатов) оператором A_{η_0}. Используя неравенство Гельдера для трех функций, (4), (14) и (21), выводим далее, что

$$|\langle f_\eta, \Phi \rangle| \leq \|f\|_{X^*} \|\Phi\|_X + \|\tilde{\eta}\|_{L^\infty(\Gamma)} \|U_\eta\|_\Gamma \|\Phi\|_\Gamma \leq$$
$$\leq [C_3 \|u^{inc}\|_{1,\Omega_e} + C_\Gamma \eta^0 \eta_0^{-1/2} \sqrt{C_3 \|u^{inc}\|_{1,\Omega_e} \|U_\eta\|_X}] \|\Phi\|_X. \tag{24}$$

Положим $\tilde{C}_{\eta_0} = \|A_{\eta_0}^{-1}\|$ и применим к решению U_η операторного уравнения (23) оценку (19), в которой $\tilde{C}_\eta$ следует заменить на $\tilde{C}_{\eta_0}$. Используя неравенство $2ab \leq a^2 + b^2$ и оценку (24), получаем

$$\|U_\eta\|_X \leq \tilde{C}_{\eta_0} \|f_\eta\|_{X^*} \leq C_3 \tilde{C}_{\eta_0} \|u^{inc}\| + \tilde{C}_{\eta_0} C_\Gamma \eta^0 \eta_0^{-1/2} \sqrt{C_3 \|u^{inc}\|_{1,\Omega_e} \|U_\eta\|_X}$$
$$\leq \frac{1}{2} C_3 \tilde{C}_{\eta_0} \|u^{inc}\|_{1,\Omega_e} [2 + \tilde{C}_{\eta_0} C_\Gamma^2 (\eta^0)^2 \eta_0^{-1}] + \frac{1}{2} \|U_\eta\|_X. \tag{25}$$

Из (25) приходим к искомой оценке (20) с константой $C_0 = C_3 \tilde{C}_0$, где $\tilde{C}_0 = \tilde{C}_{\eta_0}[2 + \tilde{C}_{\eta_0} C_\Gamma^2 (\eta^0)^2 \eta_0^{-1}]$. Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 1. *Пусть при выполнении условий (i) $K \subset L^\infty_{\eta_0}(\Gamma)$ – непустое ограниченное множество, где $\eta_0 > 0$. Пусть $\eta \in K$ – произвольный элемент. Тогда для любого падающего поля $u^{inc} \in \mathcal{H}^{inc}$ задача (11) имеет единственное решение $U_\eta \in X$, которое удовлетворяет оценке (20), с константой $C_0 = C_3 \tilde{C}_0$, где $\tilde{C}_0 = \tilde{C}_{\eta_0}[2 + \tilde{C}_{\eta_0} C_\Gamma^2 (\eta^0)^2 \eta_0^{-1}]$.*

Ниже, наряду с уравнением (16), будем рассматривать операторное уравнение

$$A_\eta^* P = \hat{f}, \quad \hat{f} \in X^*, \tag{26}$$

отвечающее оператору $A_\eta^* : X \to X^*$, сопряженному к оператору $A_\eta : X \to X^*$. Он действует с помощью соотношения $\langle A_\eta^* P, \Phi \rangle = \overline{a^\eta(\Phi, P)} = \overline{\langle A_\eta \Phi, P \rangle}$ для всех $P \in X$, $\Phi \in X$. Из свойств сопряженных операторов и теоремы 1 вытекает следующее следствие.

Следствие 1. *Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда для любого элемента $\hat{f} \in X^*$ существует единственное решение $P_\eta \in X$ уравнения (26), удовлетворяющее оценке $\|P_\eta\|_X \leq \tilde{C}_0 \|\hat{f}\|_{X^*}$.*

3. Постановка и разрешимость задачи управления

Как было указано выше, нашей основной целью является исследование единственности и устойчивости решений обратной экстремальной задачи для рассматриваемой модели рассеяния волн. Эта задача заключается в минимизации определенного функционала качества, зависящего от состояния (волнового поля U) и неизвестной функции (управления), которые удовлетворяют уравнениям состояния в виде слабой формулировки (11) задачи (1)–(3). В качестве управления мы выберем проводимость η, а в качестве функционала качества выберем следующий:

$$I(U) = \|U - u^d\|_Q^2 = \int\limits_Q |U - u^d|^2\,dx. \tag{27}$$

Здесь $Q \subset \Omega_e$ — подобласть области Ω_e, функция u^d моделирует заданное волновое поле в области Q. В частном случае, когда $u^d = u^{inc}$, функционал I имеет смысл квадрата среднеквадратичной интегральной нормы рассеянного поля u^s по Q.

Предполагая, что η является элементом пространства $H^s(\Gamma)$, введем в рассмотрение функционал $J(U,\eta) = (\alpha_0/2)I(U) + (\alpha_1/2)\|\eta\|_{s,\Gamma}^2$. Здесь α_0 и α_1 — неотрицательные параметры, которые служат для регулирования относительной важности каждого из слагаемых в этом выражении. Еще одной целью введения параметров α_0 и α_1 является обеспечение единственности решения рассматриваемой ниже экстремальной задачи. Предположим, что управление η может изменяться в определенном множестве K. Точнее, будем предполагать, что выполняется следующее условие:

(j) $\Gamma \in C^{1,1}$; $\alpha_0 > 0$; $K \subset H^s_{\eta_0}(\Gamma)$ — непустое выпуклое замкнутое множество, где $s > 1/2$, $\eta_0 > 0$.

Введем оператор $G : X \times K \times \mathcal{H}^{inc} \to X^*$ формулой $\langle G(U,\eta,u^{\rm inc}), \Phi\rangle = a_0(U,\Phi) - i(\eta U,\Phi)_\Gamma - \langle f,\Phi\rangle$ и перепишем слабую формулировку (11) задачи 1 в виде $G(U,\eta,u^{inc}) = 0$. Рассмотрим следующую задачу условной минимизации:

$$J(U,\eta) = \frac{\alpha_0}{2}I(U) + \frac{\alpha_1}{2}\|\eta\|_{s,\Gamma}^2 \to \inf, \quad G(U,\eta,u^{inc}) = 0, \quad (U,\eta) \in X \times K. \tag{28}$$

Положим $Z_{ad} = \{(U,\eta) \in X \times K : G(U,\eta,u^{inc}) = 0, J(U,\eta) < \infty\}$.

Теорема 2. *Пусть при выполнении условий (i), (j), $\alpha_1 \geq 0$ и K – ограниченное множество, либо $\alpha_1 > 0$. Тогда задача (28) имеет по крайней мере одно решение $(U,\eta) \in X \times K$.*

Доказательство. Пусть $(U_m,\eta_m) \in Z_{ad}$ — минимизирующая последовательность, для которой $\lim\limits_{m\to\infty} J(U_m,\eta_m) = \inf\limits_{(U,\eta)\in Z_{ad}} J(U,\eta) = J^*$. Отсюда, условий (j) и теоремы 1 вытекают оценки

$$\|\eta_m\|_{s,\Gamma} \leq c_1, \quad \|U_m\|_X \leq c_2 \quad \forall m \in \mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}. \tag{29}$$

Здесь c_1, c_2 — некоторые постоянные, не зависящие от m.

Отметим, что пара (U_m,η_m) удовлетворяет равенству $G(U_m,\eta_m,u^{inc})=0$ или

$$a_0(U_m,\Phi)-i(\eta_m U_m,\Phi)_\Gamma=\langle f,\Phi\rangle \quad \forall\Phi\in X,\ m\in\mathbb{N}. \tag{30}$$

Из оценок (29) следует, что существуют слабые пределы $\eta_*\in K\subset H^s(\Gamma)$, $U_*\in X$ некоторых подпоследовательностей последовательностей $\{\eta_m\}$ и $\{U_m\}$. Используя этот факт и компактность вложения $H^s(\Gamma)\subset L^\infty(\Gamma)$ при $s{>}1/2$, заключаем (переходя при необходимости к подпоследовательностям), что $U_m\to U_*\in X$ слабо в X, и

$$U_m|_\Omega\to U_*|_\Omega \text{ сильно в } L^4(\Omega),\quad U_m|_{\Omega_e}\to U_*|_{\Omega_e} \text{ сильно в } L^4(\Omega_e),$$

$$U_m|_\Gamma\to U_*|_\Gamma \text{ сильно в } L^2(\Gamma),\quad \eta_m\to\eta_*\in K \text{ сильно в } L^\infty(\Gamma). \tag{31}$$

Покажем, что пара (U_*,η_*) удовлетворяет следующему тождеству:

$$a_0(U_*,\Phi)-i(\eta_* U_*,\Phi)_\Gamma=\langle f,\Phi\rangle \quad \forall\Phi\in X. \tag{32}$$

Перейдем к пределу при $m\to\infty$ в (30). Линейный член $a_0(U_m,\Phi)$ в (30) переходит в слагаемое $a_0(U_*,\Phi)$ в (32), тогда как для разности $i(\eta_m U_m,\Phi)_\Gamma-i(\eta_* U_*,\Phi)_\Gamma$ выводим оценку

$$|i(\eta_m U_m,\Phi)_\Gamma-i(\eta_* U_*,\Phi)_\Gamma|\le|(U_m-U_*,\eta_*\Phi)_\Gamma|+|((\eta_m-\eta_*)U_m,\Phi)_\Gamma|\to 0 \text{ при } m\to\infty.$$

Таким образом, переходя в (30) к пределу при $m{\to}\infty$, приходим к (32). Это означает, что $G(U_*,\eta_*,u^{\rm inc})=0$. Поскольку J слабо полунепрерывен снизу на $X\times K$, то $J(U_*,\eta_*)=J^*$. □

Следующим этапом исследования экстремальной задачи (28) является вывод для нее системы оптимальности, описывающей необходимые условия экстремума. Этот процесс осуществляется по схеме, подробно описанной в [8]. Суть этой схемы заключается в предварительной декомплексификации экстремальной задачи (28), рассматриваемой в пространстве X, состоящем из комплекснозначных функций, в результате чего она сводится к эквивалентной экстремальной задаче, рассматриваемой в пространстве вещественнозначных функций. Далее на основе метода, предложенного в [6, 16, 18] для уравнений магнитной гидродинамики, выводится система оптимальности для последней задачи, которая затем преобразуется в систему оптимальности, отвечающую исходной экстремальной задаче. На этом пути можно доказать следующий результат.

Теорема 3. *Пусть при выполнении условий (i), (j) пара $(\hat U,\hat\eta)\in X\times K$ является решением задачи (28). Тогда существует единственный ненулевой множитель Лагранжа, $P\in X$, который удовлетворяет комплексному уравнению Эйлера – Лагранжа*

$$a_0(\Psi,P)-i(\hat\eta\Psi,P)_\Gamma=-\alpha_0(\Psi,\hat U-u^d)_Q \ \ \forall\Psi\in X, \tag{33}$$

и справедлив принцип минимума, эквивалентный вариационному неравенству

$$\alpha_1(\hat{\eta}, \eta - \hat{\eta})_{s,\Gamma} - \mathrm{Re}[i((\eta - \hat{\eta})\hat{U}, P)_\Gamma] \geq 0 \quad \forall \eta \in K. \tag{34}$$

Прямая задача (11), тождество (33), имеющее смысл сопряженной задачи для сопряженного состояния $P \in X$, и вариационное неравенство (34) образуют систему оптимальности для задачи (28). Она описывает необходимые условия экстремума для задачи (28).

4. Единственность и устойчивость решения задачи управления

Установим в этом разделе достаточные условия на исходные данные задачи управления (28) обеспечивающие единственность и устойчивость ее решения. Будем предполагать, что функция u^{inc}, входящая в (28), может изменяться в некотором ограниченном множестве $\mathcal{H}_{ad}^{inc} \subset \mathcal{H}^{inc}$. Обозначим через $(U_1, \eta_1) \in X \times K$ решение задачи (28), отвечающее заданным функциям $u^d = u_1^d$ и $u^{inc} = u_1^{inc} \in \mathcal{H}_{ad}^{inc}$. Через $(U_2, \eta_2) \in X \times K$ обозначим решение задачи

$$\tilde{J}(U, \eta) = \frac{\alpha_0}{2}\tilde{I}(U) + \frac{\alpha_1}{2}\|\eta\|_{s,\Gamma}^2 \to \inf, \quad G(U, \eta, \tilde{u}^{inc}) = 0, \quad (U, \eta) \in X \times K, \tag{35}$$

где $\tilde{I}(U) = \|U - \tilde{u}^d\|_Q^2$. Оно получается из (28) заменой функции $u^d = u_1^d$ в функционале $I(U)$ функцией $\tilde{u}^d = u_2^d \in L^2(Q)$ и заменой падающей волны $u^{inc} = u_1^{inc}$ волной $\tilde{u}^{inc} = u_2^{inc} \in \mathcal{H}_{ad}^{inc}$. Считая множество K ограниченным, выведем одно важное неравенство для разности решений задач (28) и (35). Отметим прежде, что, в силу теоремы 1, справедливы следующие оценки для U_l, $l = 1, 2$:

$$\|U_l\|_X \leq M_U = C_0 \sup_{u^{inc} \in \mathcal{H}_{ad}^{inc}} \|u^{inc}\|_{1,\Omega_e}, \quad l = 1, 2. \tag{36}$$

Обозначим через $P_l \in X$, $l = 1, 2$ множители Лагранжа, отвечающие решениям (U_l, η_l). В силу теоремы 3, P_l удовлетворяет тождеству

$$a_0(\Psi, P_l) - i(\eta_l \Psi, P_l)_\Gamma = -\alpha_0(\Psi, U_l - u_l^d)_Q \ \ \forall \Psi \in X. \tag{37}$$

Положим

$$\eta = \eta_1 - \eta_2, \ U = U_1 - U_2, \ P = P_1 - P_2, \ u^{inc} = u_1^{inc} - u_2^{inc}, u^d = u_1^d - u_2^d, \ f = f_1 - f_2. \tag{38}$$

Вычтем тождество (11), записанное для U_2, η_2, u_2^{inc}, из (11) для U_1, η_1, u_1^{inc}. Учитывая, что $(\eta_1 U_1, \Phi)_\Gamma - (\eta_2 U_2, \Phi)_\Gamma = (\eta_2 U, \Phi)_\Gamma + (\eta U_1, \Phi)_\Gamma$, получим тождество

$$a_0(U, \Phi) - i(\eta_2 U, \Phi)_\Gamma = i(\eta U_1, \Phi)_\Gamma + \langle f, \Phi \rangle \quad \forall \Phi \in X. \tag{39}$$

Используя оценки (6), (14) и (36), находим

$$|(\eta U_1, \Phi)_\Gamma| \leq C_3 C_s \|\eta\|_{s,\Gamma} \|U_1\|_X \|\Phi\|_X \leq C_3 C_s \|\eta\|_{s,\Gamma} M_U \|\Phi\|_X \quad \forall \Phi \in X. \tag{40}$$

Рассуждая, как при доказательстве теоремы 1, заключаем с учетом (14) и (40), что для решения U задачи (39) справедлива следующая оценка:

$$\|U\|_X \le C_0(C_s M_U \|\eta\|_{s,\Gamma} + \|u^{inc}\|_{1,\Omega_e}), \quad C_0 = C_3 \tilde{C}_0. \tag{41}$$

Положим $\eta = \eta_1$ в (34), записанном при $\hat{\eta} = \eta_2$, $\hat{U} = U_2$, $P = P_2$, а затем положим $\eta = \eta_2$ в (34), записанном при $\hat{\eta} = \eta_1$, $\hat{U} = U_1$, $P = P_1$. Используя (38), получим неравенства

$$\alpha_1(\eta_2, \eta)_{s,\Gamma} - \mathrm{Re}[i(\eta\, U_2, P_2)_\Gamma] \ge 0, \quad -\alpha_1(\eta_1, \eta)_{s,\Gamma} + \mathrm{Re}[i(\eta\, U_1, P_1)_\Gamma] \ge 0.$$

Складывая их, приходим к следующему соотношению для разностей η, U и P:

$$-\mathrm{Re}[i(\eta\, U, P_1)_\Gamma + i(\eta\, U_2, P)_\Gamma] \le -\alpha_1 \|\eta\|^2_{s,\Gamma}. \tag{42}$$

Вычтем тождество (37) при $l = 2$ из (37) при $l = 1$. Учитывая, что $(\eta_1\Psi, P_1)_\Gamma - (\eta_2\Psi, P_2)_\Gamma = (\eta_2\Psi, P)_\Gamma + (\eta\Psi, P_1)_\Gamma$, используя (38) и полагая $\Psi = U$, получим, что

$$a_0(U, P) - i(\eta_2 U, P)_\Gamma - i(\eta U, P_1)_\Gamma = -\alpha_0(\|U\|^2_Q - (u^d, U)_Q). \tag{43}$$

Положим $\Phi = P$ в тождестве (39) и вычтем полученное соотношение из (43). Тогда

$$-i(\eta U, P_1)_\Gamma + i(\eta U_1, P)_\Gamma + \langle f, P\rangle = -\alpha_0(\|U\|^2_Q - (u^d, U)_Q). \tag{44}$$

Наконец, сложим вещественную часть равенства (44) с (42). Учитывая, что

$$(\eta U, P_1)_\Gamma + (\eta U_2, P)_\Gamma - (\eta U_1, P)_\Gamma = (\eta U, P_1)_\Gamma - (\eta U, P)_\Gamma = (\eta U, P_2)_\Gamma,$$

приходим к неравенству

$$\alpha_0(\|U\|^2_Q - \mathrm{Re}(U, u^d)_Q) \le \mathrm{Re}[i(\eta U, P_1 + P_2)_\Gamma - \langle f, P\rangle] - \alpha_1\|\eta\|^2_{s,\Gamma}. \tag{45}$$

Оценим множители P_l и выражение $\langle f, P\rangle$, входящие в правую часть (45). Обратимся к задаче (37), которая эквивалентна следующему уравнению для множителя P_l:

$$A^*_{\eta_l} P_l = \alpha_0 f_l \in X^*, \ \langle f_l, \Psi\rangle = -(U_l - u^d_l, \Psi)_Q, \ l = 1, 2.$$

Здесь $A^*_{\eta_l}$ — сопряженный оператор к A_{η_l}, введенный выше. Так как $|(U_l - u^d_l, \Psi)_Q| \le [\|U_l\|_X + \max(\|u^d_1\|_Q,\ \|u^d_2\|_Q)]\|\Psi\|_X$ для $\Psi \in X$, то, используя следствие 1 и (36), выводим

$$\|P_l\|_X \le \tilde{C}_0 \alpha_0 \|f_l\|_{X^*} \le \tilde{C}_0 \alpha_0 M^0_U, \ \ M^0_U = M_U + \max(\|u_d^{(1)}\|_Q, \|u_d^{(2)}\|_Q), \ l = 1, 2. \tag{46}$$

Учитывая (14), (38) и (46), получаем

$$|\langle f, P\rangle| \le C_3 \|u^{\mathrm{inc}}\|_{1,\Omega_e} \|P_1 + P_2\|_X \le 2\tilde{C}_0 C_3 \alpha_0 M^0_U \|u^{\mathrm{inc}}\|_{1,\Omega_e} = \alpha_0 a M^0_U \|u^{inc}\|_{1,\Omega_e},$$

$$a \equiv 2C_0 M^0_U. \tag{47}$$

Используя оценки (14), (41), (46), (6) и неравенство Юнга $2cd \le \epsilon c^2 + (1/\epsilon)d^2$ для всех $c \ge 0$, $d \ge 0$, $\epsilon > 0$, при $\epsilon = 1$, выводим

$$|(\eta U,\, P_1{+}P_2)_\Gamma| \le C_3\|\eta\|_{L^\infty(\Gamma)}\|U\|_X\|P_1{+}P_2\|_X \le 2C_3C_0\tilde{C}_0\alpha_0 M_U^0 C_s\|\eta\|_{s,\Gamma}(C_s M_U\|\eta\|_{s,\Gamma}+$$
$$+\|u^{inc}\|_X) \le \alpha_0 C_0^2 M_U^0 M_U^{-1}(3C_s^2M_U^2\|\eta\|_{s,\Gamma}^2 + \|u^{inc}\|_{1,\Omega_e}^2) =$$
$$= \alpha_0 b(3C_s^2M_U^2\|\eta\|_{s,\Gamma}^2 + \|u^{inc}\|_{1,\Omega_e}^2), \quad b = C_0^2M_U^0M_U^{-1}. \tag{48}$$

Предположим, что выполняется следующее условие:

$$\alpha_1(1-\varepsilon) > 3\alpha_0 b C_s^2 M_U^2, \quad b = C_0^2M_U^0M_U^{-1}, \tag{49}$$

где $\varepsilon \in (0,1)$ — произвольная константа. Используя (49), получаем из (48), что

$$|\mathrm{Re}\, i(\eta U, P_1+P_2)_\Gamma| \le \alpha_1(1-\varepsilon)\|\eta\|_{s,\Gamma}^2 + \alpha_0 b\|u^{inc}\|_{1,\Omega_e}^2. \tag{50}$$

Учитывая (47), (50), из (45) приходим к неравенству

$$\alpha_0\|U\|_Q^2 \le \alpha_0\mathrm{Re}(U,u^d)_Q - \varepsilon\alpha_1\|\eta\|_{s,\Gamma}^2 + \alpha_0(a\|u^{inc}\|_{1,\Omega_e} + b\|u^{inc}\|_{1,\Omega_e}^2). \tag{51}$$

Отбрасывая слагаемое $-\varepsilon\alpha_1\|\eta\|_{s,\Gamma}^2$ в правой части (51), получаем

$$\|U\|_Q^2 \le \|U\|_Q\|u^d\|_Q + a\|u^{inc}\|_{1,\Omega_e} + b\|u^{inc}\|_{1,\Omega_e}^2. \tag{52}$$

Это — квадратичное неравенство для $\|U\|_Q$. Решив его для $\|U\|_Q$, приходим к оценке

$$\|U\|_Q \le \|u^d\|_Q + \varphi(\|u^{inc}\|_{1,\Omega_e}). \tag{53}$$

Здесь функция $\varphi(\cdot)$ определяется формулой

$$\varphi(\|u^{inc}\|_{1,\Omega_e}) = \left(a\|u^{inc}\|_{1,\Omega_e} + b\|u^{inc}\|_{1,\Omega_e}^2\right)^{1/2}, \quad a = 2C_0M_U^0, \quad b = C_0^2M_U^0M_U^{-1}. \tag{54}$$

Поскольку $U = U_1 - U_2$, $u^d = u_1^d - u_2^d$, $u^{inc} = u_1^{inc} - u_2^{inc}$, то (53) эквивалентно оценке

$$\|U_1 - U_2\|_Q \le \|u_1^d - u_2^d\|_Q + \varphi(\|u_1^{inc} - u_2^{inc}\|_{1,\Omega_e}). \tag{55}$$

В случае, когда $Q = \Omega$, оценка (55) имеет смысл оценки устойчивости в $L^2(\Omega)$ норме для компоненты $\hat{U}$ решения $(\hat{U},\hat{\eta})$ задачи (28) относительно малых возмущений функций $u^d \in L^2(\Omega)$ и $u^{inc} \in \mathcal{H}^{inc}$, входящих в постановку задачи (28). Если $u_1^{inc} = u_2^{inc}$, то оценка (55) превращается в простую априорную оценку $\|U_1 - U_2\|_Q \le \|u_1^d - u_2^d\|_Q$.

Используя оценку (53) и неравенство $\|U\|_Q\|u_d\|_Q \le \|U\|_Q^2 + (1/4)\|u_d\|_Q^2$, вытекающее из неравенства Юнга, из (51) выводим

$$\varepsilon\alpha_1\|\eta\|_{s,\Gamma}^2 \le -\alpha_0\|U\|_Q^2 + \alpha_0\|u_d\|_Q\|U\|_Q + \alpha_0(a\|u^{inc}\|_{1,\Omega_e} + b\|u^{inc}\|_{1,\Omega_e}^2) \le$$
$$\le (\alpha_0/4)\|u^d\|_Q^2 + \alpha_0(a\|u^{inc}\|_{1,\Omega_e} + b\|u^{inc}\|_{1,\Omega_e}^2) \le \alpha_0[(1/2)\|u^d\|_Q + \varphi(\|u^{inc}\|_{1,\Omega_e})]^2. \tag{56}$$

Из (56) и (41) вытекают следующие оценки:

$$\|\eta_1 - \eta_2\|_{s,\Gamma} \le \sqrt{\alpha_0/\varepsilon\alpha_1}\Delta, \|U_1 - U_2\|_X \le C_0(C_sM_U\sqrt{\alpha_0/\varepsilon\alpha_1}\Delta + \|u_1^{inc} - u_2^{inc}\|_{1,\Omega_e}), \tag{57}$$

где

$$\Delta = (1/2)\|u_1^d - u_2^d\|_Q + \varphi(\|u_1^{inc} - u_2^{inc}\|_{1,\Omega_e}). \tag{58}$$

Оценки (57) имеют смысл оценок устойчивости для решения задачи (28) относительно малых возмущений функции u^d в норме $L^2(Q)$ и функции u^{inc} в норме $H^1(\Omega_e)$. Сформулируем полученный результат в виде следующей теоремы.

Теорема 4. *Пусть, в дополнение к условиям (i), (j), K и $\mathcal{H}_{ad}^{inc} \subset \mathcal{H}^{inc}$ – ограниченные множества и пусть пара $(U_l, \eta_l) \in X \times K$ является решением задачи (28), отвечающим заданным функциям $u_l^d \in L^2(Q)$, где $Q \subseteq \Omega$, и $u_l^{inc} \in \mathcal{H}_{ad}^{inc}$, $l{=}1,2$. Предположим, что выполняется условие (49). Тогда справедливы оценки устойчивости (55) и (57), где Δ определяется формулами (58), (54).*

Подчеркнем, что единственность и устойчивость решения задачи (28) как при $Q = \Omega_e$, так и при $Q \subset \Omega_e$ доказана при условии, что параметр α_1, входящий в её формулировку, положителен и удовлетворяет условию (49). Это означает, что слагаемое $(\alpha_1/2)\|\eta\|_{s,\Gamma}^2$, входящее в (28), вносит регуляризующий эффект в рассматриваемые задачи управления.

В заключение отметим, что изложенные выше результаты были получены для двумерной модели рассеяния. Однако предложенный здесь метод исследования единственности и устойчивости оптимальных решений, основанный на анализе системы оптимальности, применим и для модели рассеяния, описываемой трехмерными уравнениями Максвелла. Исследованию соответствующей задачи предполагается посвятить отдельную статью.

Список литературы

[1] J. B. Pendry, D. Shurig and D. R. Smith, “Controlling electromagnetic fields”, *Science.*, **312**:1 (2006), 1780–1782.

[2] H. Chen, B. I. Wi, B. Zhang, J. A. Kong, “Electromagnetic wave interactions with a metamaterial cloak”, *Phys. Rev. Lett.*, **99** (2007), 063903.

[3] S. A. Cummer, B. I. Popa, D. Schurig et al., “Scattering theory derivation of a 3D acoustic cloaking shell”, *Phys. Rev. Lett.*, **100**:2 (2008), 024301.

[4] Г. В. Алексеев, В. Г. Романов, “Об одном классе нерассеивающих акустических оболочек для модели анизотропной акустики”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **14**:2 (2011), 15–20.

[5] А. Е. Дубинов, Л. А. Мытарева, “Маскировка материальных тел методом волнового обтекания”, *Успехи физ. наук.*, **180**:5 (2010), 475–501.

[6] Ю. И. Бобровницкий, “Научные основы акустического стелса”, *ДАН*, **442**:1 (2012), 41–44.

[7] Г. В. Алексеев, “Оптимизация в задачах маскировки материальных тел методом волнового обтекания”, *ДАН*, **449**:6 (2013), 652–656.

[8] G. V. Alekseev, “Cloaking via impedance boundary condition for 2–D Helmholtz equation”, *Appl. Anal*, **93**:2 (2014), 254–268.

[9] Г. В. Алексеев, Р. В. Бризицкий, В. Г. Романов, “Оценки устойчивости решений задач граничного управления для уравнений Максвела при смешанных граничных условиях”, *ДАН*, **447**:1 (2012), 7–12.

[10] Г. В. Алексеев, Р. В. Бризицкий, “Оценки устойчивости решений задач управления для уравнений Максвела при смешанных граничных условиях”, *Дифференциальные уравнения*, **49**:8 (2013), 993–1004.

[11] L. Beilina, M. V. Klibanov, *Approximate global convergence and adaptivity for coefficient inverse problems*, Springer, New York, 2012, 407 pp.

[12] L. Beilina, M. V. Klibanov, “A new approximate mathematical model for global convergence for a coefficient inverse problem with backscattering data”, *J. Inverse Ill-Posed Problems*, **20**:4 (2012), 513–565.

[13] А. С. Ильинский, В. В Кравцов, А. Г Свешников, *Математические модели электродинамики*, Высшая школа, Москва, 1991.

[14] М. А. Леонтович, *Исследования по распространению радиоволн*, ЖЭТФ, 1948.

[15] F. Caconi, D. Colton, P. Monk, “The inverse electromagnetic scattering problem for a partially coated dielectric”, *J. Comp. Appl. Math*, **204**:2 (2007), 256–267.

[16] Г. В. Алексеев, *Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики*, Научный Мир, Москва, 2010.

[17] J. M. Melenk, S. Sauter, “Convergence analysis for finite element discretizations of the Helmholtz equation with Dirichlet-to-Neumann boundary conditions”, *Math. Comp*, **79** (2010), 1871–1914.

[18] Г. В. Алексеев, “Задачи управления для стационарных уравнений магнитной гидродинамики”, *ДАН*, **395**:3 (2004), 322–325.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 20 сентября 2013 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (контракт № 14-11-00079).

Alekseev G. V., Lobanov A. V. The stability estimates in two-dimensional cloaking problem. Far Eastern Mathematical Journal. 2014. V. 14. № 2. P. 127–140.

ABSTRACT

We consider control problem for 2-D model of scattering E-polarized electromagnetic waves in unbounded medium containing dielectric obstacle with coated boundary. This problem arises when creating means of cloaking material objects. The role of control in control problem under study is played by boundary conductivity. Solvability of direct and control problems is proved and the optimality system is deduced. The uniqueness and stability of optimal solutions with respect to certain perturbations of both cost functional and incident wave are established.

Key words: *scattering problem, transmission conditions, boundary conductivity, control problem, optimality system, stability estimates.*