

УДК 511.336, 511.335  
MSC2010 11L05, 11D45

© В. И. Берник, А. В. Устинов<sup>1</sup>

## О распределении точек модулярной гиперболы

В статье доказываются варианты известных теорем о равномерном распределении решений детерминантного уравнения  $\begin{vmatrix} a & x \\ y & z \end{vmatrix} = q$  при условии, что переменные удовлетворяют дополнительным условиям  $(a, x) = 1$  или  $(a, x, y, z) = 1$ .

Ключевые слова: *суммы Клостермана, модулярная гипербола.*

### 1. Введение

В работе [2] Линник и Скубенко доказали равномерную распределённость по мере Хаара целочисленных решений уравнения  $\det X = P$ , где  $X$  — матрица  $3 \times 3$  с независимыми коэффициентами и  $P \rightarrow \infty$ . Их метод был основан на редукции задачи к предыдущей размерности — детерминантному уравнению

$$\det \begin{pmatrix} a & x \\ y & z \end{pmatrix} = q. \quad (1)$$

При более детальном изучении редукции Линника — Скубенко, см. [5], возникает необходимость в исследовании решений уравнения (1), когда  $a \neq 0$  фиксировано, а на переменные  $x, y, z$  дополнительно накладываются требования арифметического характера. В настоящей статье доказываются варианты уже известных теорем о равномерном распределении решений детерминантного уравнения (1), удовлетворяющих условиям  $(a, x) = 1$  или  $(a, x, y, z) = 1$ .

### 2. Четыре варианта сумм Клостермана

Уравнение (1) можно заменить эквивалентным сравнением

$$xy + q \equiv 0 \pmod{a}, \quad (2)$$

---

<sup>1</sup>Институт математики НАН Беларуси, 220072, г. Минск, ул. Сурганова, 11; Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: [bernik@im.bas-net.by](mailto:bernik@im.bas-net.by), [ustinov@iam.khv.ru](mailto:ustinov@iam.khv.ru)

предполагая, что  $a > 0$  фиксировано, а значение  $z$  находится из равенства  $z = (xy + q)a^{-1}$ . За распределение решений уравнения (1) (точек модулярной гиперболы, задаваемой сравнением (2)) отвечают тригонометрические суммы

$$K_a(m, n, q) = \sum_{x,y=1}^a \delta_a(xy + q) e\left(\frac{mx + ny}{a}\right), \quad (3)$$

где  $e(t) = e^{2\pi\sqrt{-1}t}$  и  $\delta_q$  — характеристическая функция делимости на  $q$ :

$$\delta_q(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \equiv 0 \pmod{q}, \\ 0, & \text{если } x \not\equiv 0 \pmod{q}. \end{cases}$$

Суммы (3) при  $q = -1$  совпадают с классическими суммами Клостермана

$$K_q(m, n) = \sum_{x,y=1}^q \delta_q(xy - 1) e\left(\frac{mx + ny}{q}\right),$$

и равномерность распределения решений сравнения (2) вытекает из наличия нетривиальных оценок сумм Клостермана. Это наблюдение, в частности, позволяет находить асимптотические формулы для сумм вида

$$\sum_{a_1 b_2 - a_2 b_1 = P} f(a_1, a_2, b_1, b_2),$$

к которым сводятся задачи из геометрии чисел, теории цепных дробей и др., см. обзор [9].

Для сумм Клостермана (2) известна оценка

$$|K_a(m, n)| \leq \tau(a)(m, n, a)^{1/2} a^{1/2} \quad (4)$$

( $\tau(q)$  — число делителей  $q$ ), которая для простых  $a$  была доказана А. Вейлем (см. [10]), а на случай произвольных  $a$  распространена Эстерманом (см. [7]).

Суммы Рамануджана

$$c_a(n) = \sum_{x=1}^a{}^* e\left(\frac{nx}{a}\right)$$

(здесь и далее знак звёздочки означает, что суммирование ограничено на приведённую систему вычетов) являются частными случаями сумм Клостермана

$$K_a(n, 0) = K_a(0, n) = c_a(n)$$

и допускают более точную оценку (см. [8, теорема 272])

$$|c_a(n)| \leq (a, n). \quad (5)$$

Суммы (3) являются симметрическими функциями от переменных  $m, n, q$ , что следует из равенства

$$K_a(m, n, q) = \frac{1}{a} \sum_{x,y,z=1}^a e\left(\frac{xyz + mx + ny + qz}{a}\right).$$

Правильные по порядку оценки сумм  $K_a(m, n, q)$  следуют из неравенства (4) и тождества

$$K_a(m, n, q) = \sum_{d|(m,n,a)} dK_{a/d} \left( -\frac{mn}{d^2}, q \right)$$

(обсуждение истории этого тождества см. в [6]; его короткое доказательство может быть найдено в [1, § 3]). В приложениях удобно использовать явную оценку (см. [3, лемма 1])

$$|K_a(m, n, q)| \ll \tau(a)\tau((m, n, q, a))(mn, mq, nq, a)^{1/2}a^{1/2}, \quad (6)$$

которая превращается в неравенство (4) при  $q = -1$ .

При наложении дополнительных условий  $(a, x, y, z) = 1$  или  $(a, x) = 1$  возникает необходимость в рассмотрении следующих тригонометрических сумм:

$$\begin{aligned} K_a^\times(m, n, q) &= \sum_{x,y=1}^a \sum_z [az - xy = q, (a, x, y, z) = 1] e \left( \frac{mx + ny}{a} \right), \\ K_a^*(m, n, q) &= \sum_{x=1}^a \sum_{y=1}^a \delta_a(xy + q) e \left( \frac{mx + ny}{a} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь и ниже через  $[A]$  будет обозначаться характеристическая функция множества, задаваемого условием  $A$ :  $[A] = 1$ , если условие выполнено, и  $[A] = 0$  в противном случае.

**Лемма 1.** *Справедливы равенства*

$$\begin{aligned} K_a^\times(m, n, q) &= \sum_{d|a, d^2|q} \mu(d) K_{a/d} \left( m, n, \frac{q}{d^2} \right), \\ K_a^*(m, n, q) &= \sum_{d|(a,q,n)} \mu(d) d K_{a/d} \left( m, \frac{n}{d}, \frac{q}{d} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

*Доказательство.* Для доказательства первого тождества достаточно избавиться от условия взаимной простоты с помощью функции Мёбиуса:

$$\begin{aligned} K_a^\times(m, n, q) &= \sum_{x,y=1}^a \sum_z [az - xy = q] e \left( \frac{mx + ny}{a} \right) \sum_{d|(a,x,y,z)} \mu(d) \\ &= \sum_{d|a, d^2|q} \mu(d) \sum_{x_1, y_1=1}^{a/d} \sum_{z_1} \left[ \frac{a}{d} z_1 - x_1 y_1 = \frac{q}{d^2} \right] e \left( \frac{m x_1 + n y_1}{a/d} \right) \\ &= \sum_{d|a, d^2|q} \mu(d) K_{a/d} \left( m, n, \frac{q}{d^2} \right). \end{aligned}$$

Сумму  $K_a^*(m, n, q)$  преобразуем так же:

$$\begin{aligned} K_a^*(m, n, q) &= \sum_{d|a} \mu(d) \sum_{\substack{x=1 \\ d|x}}^a \sum_{y=1}^a \delta_a(xy + q) e\left(\frac{mx + ny}{a}\right) \\ &= \sum_{d|a} \mu(d) \sum_{x_1=1}^{a/d} \sum_{y=1}^a \delta_a(dx_1y + q) e\left(\frac{mdx_1 + ny}{a}\right). \end{aligned}$$

В ненулевых слагаемых  $\delta_a(dx_1v + q) \neq 0$ , то есть  $d \mid q$ . Поэтому

$$\begin{aligned} K_a^*(m, n, q) &= \sum_{d|(a,q)} \mu(d) \sum_{x_1=1}^{a/d} \sum_{y=1}^a \delta_{a/d}(x_1y + q/d) e\left(\frac{mdx_1 + ny}{a}\right) \\ &= \sum_{d|(a,q)} \mu(d) d \delta_d(n) \sum_{x_1, y_1=1}^{a/d} \delta_{a/d}(x_1y_1 + q/d) e\left(\frac{mx_1 + nd^{-1}y_1}{a/d}\right) \\ &= \sum_{d|(a,q,n)} \mu(d) d K_{a/d}\left(m, \frac{n}{d}, \frac{q}{d}\right). \end{aligned}$$

□

Для краткости будем использовать следующие обозначения:

$$K_a(q) = K_a(0, 0, q), \quad K_a^\times(q) = K_a^\times(0, 0, q).$$

Величина  $K_a^*(0, 0, q) = \varphi(a)$  в дополнительном обозначении не нуждается. Решения сравнения (2) будем называть решениями 1, 2 или 3 типа, если соответственно

- 1) на решения не наложено никаких дополнительных условий;
- 2) решения удовлетворяют условию  $(a, x, y, z) = 1$ ;
- 3) решения удовлетворяют условию  $(a, x) = 1$ .

Три отношения

$$\frac{K_a(q)}{a^2}, \quad \frac{K_a^\times(q)}{a^2}, \quad \frac{\varphi(a)}{a^2},$$

представляют собой плотности распределения решений 1, 2 или 3 типа.

**Лемма 2.** *Справедливы равенства*

$$K_a(q) = a \sum_{k|(a,q)} \sum_{d|a/k} \frac{\mu(d)}{d}, \quad (9)$$

$$K_a^\times(q) = \sum_{d|a, d^2|q} \mu(d) K_{a/d}(q/d^2). \quad (10)$$

*Доказательство.* При фиксированном значении  $x$  сравнение  $xy + q \equiv 0 \pmod{a}$  разрешимо, только если  $(x, a) \mid q$ . В этом случае существует  $(a, x)$  решений относительно неизвестной  $y$ , лежащей в пределах  $1 \leq y \leq a$ . Значит, по определению

$K_a(q)$

$$K_a(q) = \sum_{x=1}^a (a, x) \delta_{(a,x)}(q) = \sum_{k|(a,q)} k \sum_{\substack{x=1 \\ (a,x)=k}}^a 1 = \sum_{k|(a,q)} k \varphi(a/k) = a \sum_{k|(a,q)} \sum_{d|a/k} \frac{\mu(d)}{d}.$$

Вторая формула является непосредственным следствием равенства (8). □

**Следствие 1.** *Справедливы оценки*

$$K_a(q) \ll a^{1+\varepsilon}, \quad K_a^\times(q) \ll a^{1+\varepsilon}.$$

**Лемма 3.** *Суммы  $K_a^*(m, n, q)$  удовлетворяют оценкам*

$$|K_a^*(0, n, q)| \leq (a, nq), \tag{11}$$

$$|K_a^*(m, 0, q)| \leq (a, m), \tag{12}$$

$$|K_a^*(m, n, q)| \ll (mn, mq, nq, a)^{1/2} a^{1/2+\varepsilon}.$$

*Доказательство.* Если  $m = 0$  или  $n = 0$ , то сумма  $K_a^*(m, n, q)$  становится суммой Рамануджана, поэтому неравенства (11)–(12) следуют из оценки (5):

$$K_a^*(0, n, q) = \sum_{x=1}^a \sum_{y=1}^a \delta_a(y + qx^{-1}) e\left(\frac{ny}{a}\right) = \sum_{x=1}^a e\left(-\frac{nqx^{-1}}{a}\right) = c_a(nq),$$

$$K_a^*(m, 0, q) = \sum_{x=1}^a \sum_{y=1}^a \delta_a(y + qx^{-1}) e\left(\frac{mx}{a}\right) = \sum_{x=1}^a e\left(-\frac{mx}{a}\right) = c_a(m).$$

В общем же случае оценка  $K_a^*(m, n, q)$  сводится к оценке (6) с помощью леммы 1:

$$|K_a^*(m, n, q)| \leq \sum_{d|(a,q,n)} d \left(\frac{mn}{d}, \frac{mq}{d}, \frac{nq}{d^2}, \frac{a}{d}\right)^{1/2} \left(\frac{a}{d}\right)^{1/2+\varepsilon} \ll (mn, mq, nq, a)^{1/2} a^{1/2+\varepsilon}.$$

□

### 3. Распределение решений 1 и 2 типа

**Теорема 1.** *Пусть  $a$  – натуральное,  $q$  – целое и  $I = [Y_1, Y_1 + Z_1) \times [Y_2, Y_2 + Z_2)$ , где  $Z_1, Z_2 > 0$ . Тогда для суммы*

$$\Phi_{a,q}(I) = \sum_{(x,y) \in I} \delta_a(xy + q)$$

*справедлива асимптотическая формула*

$$\Phi_{a,q}(I) = \frac{K_a(q)}{a^2} \cdot Z_1 Z_2 + O(R(Z_1, Z_2)), \tag{13}$$

где

$$R(Z_1, Z_2) = a^{1/2+\varepsilon} + \left(\frac{Z_1}{a} + \frac{Z_2}{a} + 1\right) (a, q) a^\varepsilon. \tag{14}$$

*Доказательство.* Разобьем область изменения параметров  $b$  и  $c$  горизонтальными и вертикальными прямыми вида  $b = ja$ ,  $c = ja$  ( $j \in \mathbb{Z}$ ) на квадраты размером  $a \times a$  и прямоугольники, стороны которых не превосходят  $a$ . По определению суммы  $K_a(m, n, q)$  при  $Z_1 = Z_2 = a$  асимптотическая формула (13) верна с нулевым остаточным членом. Для прямоугольника со сторонами  $Z_1 = a$ ,  $C < a$  формула (13) справедлива с остатком  $O((a, q)a^\varepsilon)$  (см. [4, лемма 5]). Число таких прямоугольников есть  $O((Z_1 + Z_2)/a)$ . Для угловых прямоугольников (их не больше четырёх)  $Z_1, Z_2 < a$  и формула (13) верна с остатком (см. [3, лемма 3])  $O(a^{1/2+\varepsilon} + (a, q)a^\varepsilon)$ . Суммируя асимптотические формулы для всех частей разбиения, получаем требуемое равенство.  $\square$

Равномерность распределения решений 2 типа можно свести к теореме 1 без доказательства оценки суммы  $K_a^\times(m, n, q)$ .

**Теорема 2.** Пусть  $a$  — натуральное,  $q$  — целое,  $I = [Y_1, Y_1 + Z_1) \times [Y_2, Y_2 + Z_2)$ , где  $Z_1, Z_2 > 0$  и

$$\Phi_{a,q}^\times(I) = \sum_{(x,y) \in I} \sum_z [az - xy = q, (a, x, y, z) = 1].$$

Тогда

$$\Phi_{a,q}^\times(I) = \frac{K_a^\times(q)}{a^2} \cdot Z_1 Z_2 + O(R(Z_1, Z_2)),$$

где  $R(Z_1, Z_2)$  определено равенством (14).

*Доказательство.* Выразим  $\Phi_{a,q}^\times(I)$  через  $\Phi_{a,q}(I)$  с помощью функции Мёбиуса:

$$\begin{aligned} \Phi_{a,q}^\times(I) &= \sum_{(x,y) \in I} \sum_{z=-\infty}^{\infty} [az - xy = q] \sum_{d|(a,x,y,z)} \mu(d) \\ &= \sum_{d|a, d^2|q} \mu(d) \sum_{(x_1, y_1) \in I/d} \sum_{z_1} \left[ \frac{a}{d} z_1 - x_1 y_1 = \frac{q}{d^2} \right] \\ &= \sum_{d|a, d^2|q} \mu(d) \Phi_{a/d, q/d^2}(I/d). \end{aligned}$$

Подставляя в последнее равенство асимптотическую формулу для  $\Phi_{a,q}$  из теоремы 1, приходим к нужной формуле.  $\square$

## 4. Распределение решений 3 типа

Если  $(x, a) = 1$ , то каждый интервал  $[Y, Y + a)$  содержит ровно одно решение сравнения  $xy + q \equiv 0 \pmod{a}$  относительно неизвестной  $y$ . Поэтому для произвольной функции  $G$ , определённой на прямоугольнике  $[Y_1, Y_1 + Z_1) \times [Y_2, Y_2 + Z_2)$ , естественной аппроксимацией для суммы

$$\Phi_{a,q}^*[G] = \sum_{Y_1 \leq x < Y_1 + Z_1}^* \sum_{Y_2 \leq y < Y_2 + Z_2} \delta_a(xy + q) G(x, y)$$

является сумма

$$S_a^*[G] = \frac{1}{a} \sum_{Y_1 \leq x < Y_1 + Z_1}^* \int_{Y_2}^{Y_2 + Z_2} G(x, y) dy.$$

Получим оценку разности  $\Phi_{a,q}^*[G] - S_a^*[G]$ , применимую для широкого класса функций  $G$ . Предварительно докажем несколько вспомогательных утверждений. Под нормой функции всегда будем понимать  $L^\infty$ -норму.

**Лемма 4.** Пусть  $a, D$  — натуральные числа и  $D \mid a$ . Предположим, что функция  $f$  на интервале  $I$  имеет конечное число участков монотонности. Тогда справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\sum_{\substack{x \in I \\ x \equiv x_0 \pmod{*} D}} f(x) = \frac{1}{D} \int_I f(x) dx + O(\|f\|), \tag{15}$$

$$\sum_{\substack{x \in I \\ (x,a)=D}} f(x) = \frac{\varphi(a/D)}{a} \int_I f(x) dx + O(\|f\| a^\varepsilon), \tag{16}$$

$$\sum_{\substack{x \in I \\ (x,a)=1}} f(x) = \frac{\varphi(a)}{a} \int_I f(x) dx + O(\|f\| a^\varepsilon). \tag{17}$$

*Доказательство.* Так как число участков монотонности функции  $f$  конечно, то утверждение леммы достаточно проверить в предположении, что  $f$  — монотонная функция. В этом случае равенство (15) получается с помощью стандартной аппроксимации  $f$  ступенчатыми функциями, а равенство (16) сводится к (15):

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x \in I \\ (x,a)=D}} f(x) &= \sum_{D \mid x, (x/D, a/D)=1} f(x) = \sum_{\delta \mid a/D} \mu(\delta) \sum_{\substack{x \in I \\ x \equiv 0 \pmod{*} \delta D}} f(x) \\ &= \sum_{\delta \mid a/D} \mu(\delta) \left( \frac{1}{\delta D} \int_I f(x) dx + O(\|f\|) \right) = \frac{\varphi(a/D)}{a} \int_I f(x) dx + O(\|f\| a^\varepsilon). \end{aligned}$$

Третье равенство является частным случаем второго. □

### 4.1. Решения 3 типа в прямоугольнике

**Лемма 5.** Пусть  $Z \geq 1$  и  $G$  — характеристическая функция прямоугольника  $I = [0, a) \times [0, Z)$ . Тогда

$$\Phi_{a,q}^*[G] = S_a^*[G] + O(a^\varepsilon).$$

*Доказательство.* Преобразуем сумму  $\Phi_{a,q}^*[G]$ :

$$\begin{aligned} \Phi_{a,q}^*[G] &= \sum_{d \mid a} \mu(d) \sum_{\substack{x=1 \\ d \mid x}}^a \sum_{0 < y \leq Z} \delta_a(xy + q) = \sum_{d \mid a} \mu(d) \sum_{x_1=1}^{a/d} \sum_{0 < y \leq Z} \delta_{a/d} \left( x_1 y + \frac{q}{d} \right) \\ &= \sum_{d \mid (a,q)} \mu(d) \sum_{0 < y \leq Z} \left( \frac{a}{d}, y \right) \delta_{a/d} \left( \frac{q}{d} \right). \end{aligned}$$

Положим  $k = (a/d, y)$ . Тогда

$$\Phi_{a,q}^*[G] = \sum_{kd|(a,q)} k\mu(d) \sum_{\substack{0 < y \leq Z \\ (a/d,y)=k}} 1 = \sum_{kd|(a,q)} k\mu(d) \sum_{\substack{0 < y_1 \leq Z/k \\ (a/(dk),y_1)=1}} 1.$$

Применяя равенство (17) и вводя переменную  $D = kd$ , находим, что

$$\begin{aligned} \Phi_{a,q}^*[G] &= \sum_{kd|(a,q)} k\mu(d) \cdot \frac{\varphi\left(\frac{a}{dk}\right)}{\frac{a}{dk}} \cdot \frac{Z}{k} + O(a^\varepsilon) \\ &= Z \sum_{D|(a,q)} \sum_{d|D} \mu(d) \sum_{m|a/D} \frac{\mu(m)}{m} + O(a^\varepsilon) \\ &= Z \sum_{m|a} \frac{\mu(m)}{m} + O(a^\varepsilon) = \frac{\varphi(a)}{a} Z + O(a^\varepsilon) = S_a^*[G] + O(a^\varepsilon). \end{aligned}$$

□

**Теорема 3.** Пусть  $Z_1, Z_2 \geq 1$  и  $F$  — характеристическая функция прямоугольника  $I = [Y_1, Y_1 + Z_1) \times [Y_2, Y_2 + Z_2)$ . Тогда справедлива асимптотическая формула

$$\Phi_{a,q}^*[F] = S_a^*[F] + O\left((a, q)(a^{1/2} + Z_1 a^{-1})a^\varepsilon\right). \quad (18)$$

*Замечание 1.* Как и для решений 2 типа, доказательство равномерной распределённости решений 3 типа можно свести к теореме 1. Однако это приводит к остаточному члену вида  $O\left((a, q)(a^{1/2} + (Z_1 + Z_2)a^{-1})a^\varepsilon\right)$ . Важным отличием теоремы 3 от теорем 1 и 2 является отсутствие параметра  $Z_2$  в остаточном члене. Поэтому теорему 3 докажем непосредственно.

*Доказательство теоремы 3.* Если  $Z_2 = ka$ , где  $k$  — натуральное, то  $\Phi_{a,q}^*[F] = S_a^*[F]$ . Поэтому утверждение леммы достаточно доказать, предполагая, что  $Z_2 = 0$ ,  $Z_2 < a$ . Из леммы 5 следует, что равенство (18) достаточно проверить при  $0 \leq Y_1 < Y_1 + Z_1 < a$ . Согласно равенству (17), для этого достаточно проверить, что

$$\Phi_{a,q}^*[F] = \frac{\varphi(a)}{a^2} Z_1 Z_2 + O\left((a, q)a^{1/2+\varepsilon}\right). \quad (19)$$

Представим  $F$  в виде конечного ряда Фурье

$$F(x, y) = \sum_{a/2 < m, n \leq a/2} \widehat{F}(m, n) e\left(\frac{mx + ny}{a}\right)$$

с коэффициентами

$$\widehat{F}(m, n) = \frac{1}{a^2} \sum_{0 \leq x, y < a} F(x, y) e\left(-\frac{mx + ny}{a}\right).$$

Тогда сумму  $\Phi_{a,q}^*[F]$  можно записать в виде

$$\Phi_{a,q}^*[F] = \sum_{x=1}^a \sum_{y=1}^a F(x,y) \delta_a(xy+q) = \sum_{a/2 < m, n \leq a/2} \widehat{F}(m,n) K_a^*(m,n,q),$$

где сумма  $K_a^*(m,n,q)$  определена равенством (7). Выделяя слагаемое с  $m = n = 0$  и пользуясь соотношениями  $K_a^*(q) = \varphi(a)$ ,

$$\widehat{F}(0,0) = \frac{Z_1 Z_2}{a^2} + O\left(\frac{1}{a}\right),$$

$$|\widehat{F}(m,n)| \leq \min\left\{\frac{Z_1}{a}, \frac{1}{|m|}\right\} \min\left\{\frac{Z_2}{a}, \frac{1}{|n|}\right\}, \quad |m|, |n| \leq a/2, (m,n) \neq (0,0),$$

находим, что

$$\Phi_{a,q}^*[F] = \frac{\varphi(a)}{a^2} Z_1 Z_2 + O(R_1 + R_2 + R_3 + 1), \quad (20)$$

где

$$R_1 = \frac{Z_1}{a} \sum_{n=1}^a \frac{1}{n} |K_a^*(0,n,q)|, \quad R_2 = \frac{Z_2}{a} \sum_{m=1}^a \frac{1}{m} |K_a^*(m,0,q)|,$$

$$R_3 = \sum_{m,n=1}^a \frac{1}{mn} |K_a^*(m,n,q)|.$$

По лемме 3

$$R_1 \leq \frac{Z_1}{a} \sum_{n=1}^a \frac{(a,nq)}{n} \leq \frac{Z_1}{a} \sum_{d|a} d \sum_{\substack{n=1 \\ d|nq}}^a \frac{1}{n} \leq \frac{Z_1}{a} \log a \sum_{d|a} d \frac{(d,q)}{d} \ll (a,q) a^\varepsilon,$$

$$R_2 \leq \frac{Z_2}{a} \sum_{m=1}^a \frac{(a,m)}{m} \leq \frac{Z_2}{a} \sum_{d|a} d \sum_{\substack{m=1 \\ d|m}}^a \frac{1}{m} \ll a^\varepsilon,$$

$$R_3 \ll a^{1/2+\varepsilon} \sum_{m,n=1}^a \frac{(mn, mq, nq, a)^{1/2}}{mn} \ll a^{1/2+\varepsilon}.$$

При оценке остатка  $R_3$  была использована лемма 3 из работы [3]. Подставляя полученные оценки остатков  $R_1, R_2, R_3$  в формулу (20), приходим к нужному равенству (19).  $\square$

Разность  $\Phi_{a,q}^*[F] - S_a^*[F]$  допускает также более простую оценку.

**Лемма 6.** Пусть  $Z_1, Z_2 \geq 1$ , и  $F$  — характеристическая функция прямоугольника  $I = [Y_1, Y_1 + Z_1) \times [Y_2, Y_2 + Z_2)$ . Тогда

$$\Phi_{a,q}^*[F] = S_a^*[F] + O(Z_2) + O(Z_1 a^{-1+\varepsilon}). \quad (21)$$

*Доказательство.* Из леммы 5 следует, что равенство (21) достаточно проверить при  $0 \leq Y_1 < Y_1 + Z_1 < a$ . В этом случае утверждение леммы вытекает из оценок

$$S_a^*[F] = O(Z_2), \quad \Phi_{a,q}^*[F] = O(Z_2). \quad (22)$$

Первая из них тривиальна. Для доказательства второй оценки положим  $\Delta = (a, q)$ ,  $a = \Delta a_1$ ,  $q = \Delta q_1$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_{a,q}^*[F] &\leq \sum_{x=1}^a \sum_{0 < y \leq Z_2}^* \delta_a(y - qx^{-1}) = \sum_{\substack{0 < y \leq Z_2 \\ \Delta | y}} \sum_{x=1}^a \delta_{a_1}(y\Delta^{-1} - q_1x^{-1}) \\ &\leq \sum_{\substack{0 < y \leq Z_2 \\ \Delta | y}} \Delta \sum_{x=1}^{a_1} \delta_{a_1}(y\Delta^{-1} - q_1x^{-1}) = \sum_{\substack{0 < y \leq Z_2 \\ \Delta | y}} \Delta \leq Z_2. \end{aligned}$$

□

## 4.2. Решения 3 типа под графиком монотонной функции

**Лемма 7.** Пусть  $f$  — неотрицательная, невозрастающая на интервале  $I = [Y_1, Y_1 + Z_1] \subset [0, a]$  функция,  $Z_2 = f(0)$ ,  $Z_1 Z_2 \geq a^{3/2}$  и  $G$  — характеристическая функция области под графиком функции  $f$ :

$$G(x, y) = [x \in I, 0 \leq y \leq f(x)]. \quad (23)$$

Тогда

$$\Phi_{a,q}^*[G] = S_a^*[G] + O((a, q)Z_1^{1/2}Z_2^{1/2}a^{-1/4+\varepsilon}).$$

*Замечание 2.* Очевидно, что лемма 7 остаётся справедливой и для функций, имеющих на интервале  $I$  конечное число участков монотонности.

*Доказательство.* Разобьём интервал  $I$ , внутри которого меняется переменная  $x$  точками  $x_j = Y_1 + \frac{j}{r}Z_1$  ( $j = 0, 1, \dots, r$ ) на  $r$  равных интервалов. Тогда

$$\Phi_{a,q}^*[G] = \sum_{j=1}^r \Phi_j,$$

где

$$\Phi_j = \sum_{x_{j-1} < x \leq x_j}^* \sum_{0 \leq y \leq f(x)} \delta_a(xy + q).$$

В силу монотонности функции  $f$

$$\sum_{x_{j-1} < x \leq x_j}^* \sum_{1 \leq y \leq f(x_j)} \delta_a(xy + q) \leq \Phi_j \leq \sum_{x_{j-1} < x \leq x_j}^* \sum_{1 \leq y \leq f(x_{j-1})} \delta_a(xy + q).$$

Применяя к суммам, стоящим в последней формуле, теорему 3, получаем неравенства

$$\frac{1}{a} \sum_{x_{j-1} < x \leq x_j}^* f(x_j) + O(R) \leq \Phi_j \leq \frac{1}{a} \sum_{x_{j-1} < x \leq x_j}^* f(x_{j-1}) + O(R), \quad (24)$$

где  $R = (a, q)a^{1/2+\varepsilon}$ . Так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \sum_{x_{j-1} < x \leq x_j}^* f(x) &= \frac{1}{a} \sum_{x_{j-1} < x \leq x_j}^* f(x) + O\left(\frac{Z_1(f(x_{j-1}) - f(x_j))}{ra}\right), \\ \frac{1}{a} \sum_{x_{j-1} < x \leq x_j}^* f(x_{j-1}) &= \frac{1}{a} \sum_{x_{j-1} < x \leq x_j}^* f(x) + O\left(\frac{Z_1(f(x_{j-1}) - f(x_j))}{ra}\right), \end{aligned}$$

то после суммирования равенства (24) по  $j$  от 1 до  $r$  находим, что

$$\Phi_{a,q}^*[G] = S_a^*[G] + O\left(\frac{Z_1 Z_2}{ra} + (a, q)ra^{1/2+\varepsilon}\right).$$

Выбирая  $r = \lfloor Z_1^{1/2} Z_2^{1/2} a^{-3/4} \rfloor$ , приходим к утверждению леммы.  $\square$

**Следствие 2.** Пусть  $f$  — неотрицательная, невозрастающая на интервале  $I = [Y_1, Y_1 + Z_1) \subset [0, a]$  функция,  $Z_2 = f(0) \ll q/a$  и  $G$  определено равенством (23). Тогда

$$\Phi_{a,q}^*[G] = S_a^*[G] + O((a, q)a^{-1/4}q^{1/2+\varepsilon}). \quad (25)$$

*Доказательство.* При  $q \geq a^{3/2}$  равенство (25) непосредственно следует из леммы 7. Если же  $q \leq a^{3/2}$ , то равенство (25) вытекает из леммы 6, поскольку, см. (22),

$$\Phi_{a,q}^*[G] \ll qa^{-1}, \quad S_a^*[G] \ll qa^{-1}, \quad q^{1/2}a^{-1/4} \gg qa^{-1}.$$

$\square$

**Теорема 4.** Пусть  $G$  — неотрицательная функция и для любого  $z$  в пределах  $0 \leq z \leq \|G\|$  неравенство  $G(x, y) \leq z$  задаёт в прямоугольнике  $I = [0, a] \times [0, Z_2]$  ( $Z_2 \ll q/a$ ) область  $\Omega_z = \{(x, y) \in I : y \leq f_z(x)\}$ , причём число участков монотонности для всех функций  $f_z$  ограничено абсолютной константой. Тогда

$$\Phi_{a,q}^*[G] - S_a^*[G] \ll \|G\|(a, q)a^{-1/4}q^{1/2+\varepsilon}.$$

*Доказательство.* Достаточно приблизить  $G(x, y)$  линейной комбинацией функций

$$G_k(x, y) = \left[ G(x, y) \leq \frac{k}{n} \|G\| \right] \quad (0 \leq k \leq n),$$

к каждой из них применить следствие 2 и устремить  $n$  в бесконечность.  $\square$

## 5. Арифметические свойства плотности решений 2 типа

Наряду с функцией Эйлера  $\varphi(q)$  будем использовать функции

$$\varphi_+(q) = q \prod_{p|q} \left(1 + \frac{1}{p}\right), \quad \varphi_2(q) = \frac{\varphi(q)\varphi_+(q)}{q} = q \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

**Лемма 8.** *Справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \sum_{d|a} \frac{\varphi(d)\varphi(a/d)}{d} &= \varphi_2(a), \\ \sum_{\delta_1\delta_2k|a} \frac{\mu(\delta_1)\mu(\delta_2)}{\delta_1^2\delta_2\varphi_+(k\delta_1)} &= \frac{\varphi_2(a)}{a}. \end{aligned} \quad (26)$$

*Доказательство.* Проверим первое равенство:

$$\begin{aligned} \sum_{d|a} \frac{\varphi(d)\varphi(a/d)}{d} &= \sum_{d|a} \varphi\left(\frac{a}{d}\right) \sum_{k|d} \frac{\mu(k)}{k} = \sum_{k|a} \frac{\mu(k)}{k} \sum_{d|a, k|d} \varphi\left(\frac{a}{d}\right) \\ &= \sum_{k|a} \frac{\mu(k)}{k} \sum_{d_1|a/k} \varphi\left(\frac{a}{d_1k}\right) = \sum_{k|a} \frac{\mu(k)}{k} \cdot \frac{a}{k} = \varphi_2(a). \end{aligned}$$

Второе равенство сводится к первому ( $\Delta = \delta_1k$ ):

$$\begin{aligned} \sum_{\delta_1\delta_2k|a} \frac{\mu(\delta_1)\mu(\delta_2)}{\delta_1^2\delta_2\varphi_+(k\delta_1)} &= \sum_{\Delta\delta_2|a} \frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2\varphi_+(\Delta)} \sum_{\delta_1|\Delta} \frac{\mu(\delta_1)}{\delta_1^2} \\ &= \sum_{\Delta\delta_2|a} \frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2} \cdot \frac{\varphi_2(\Delta)}{\Delta\varphi_+(\Delta)} = \sum_{\Delta\delta_2|a} \frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2} \cdot \frac{\varphi(\Delta)}{\Delta^2} = \sum_{\Delta|a} \frac{\varphi(a/\Delta)}{a/\Delta} \cdot \frac{\varphi(\Delta)}{\Delta^2} = \frac{\varphi_2(a)}{a}. \end{aligned}$$

□

**Лемма 9.** *Пусть  $Q \geq 2$ . Тогда*

$$\sum_{\substack{q \leq Q \\ \Delta|q}} \frac{\varphi(q)}{q^2} = \frac{\log Q}{\zeta(2)\varphi_+(\Delta)} + \psi(\Delta) + O\left(\frac{\log Q}{Q}\right), \quad (27)$$

где

$$\psi(\Delta) = \frac{1}{\Delta} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)(d, \Delta)}{d^2} \left( \log \frac{(d, \Delta)}{d\Delta} + \gamma \right), \quad (28)$$

и  $\gamma$  — постоянная Эйлера.

*Доказательство.* Преобразуем данную сумму:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{q \leq Q \\ \Delta|q}} \frac{\varphi(q)}{q^2} &= \sum_{\substack{q \leq Q \\ \Delta|q}} \frac{1}{q} \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d} = \sum_{d \leq Q} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{\substack{q \leq Q \\ \Delta|q, d|q}} \frac{1}{q} = \sum_{d \leq Q} \frac{\mu(d)(d, \Delta)}{d^2\Delta} \sum_{\substack{q \leq \frac{Q(d, \Delta)}{d\Delta}}} \frac{1}{q} \\ &= \frac{1}{\Delta} \sum_{d \leq Q} \frac{\mu(d)(d, \Delta)}{d^2} \left( \log Q + r(d, \Delta) + O\left(\frac{d\Delta}{Q(d, \Delta)}\right) \right) \\ &= \frac{1}{\Delta} \sum_{d \leq Q} \frac{\mu(d)(d, \Delta)}{d^2} (\log Q + r(d, \Delta)) + O\left(\frac{\log Q}{Q}\right), \end{aligned}$$

где

$$r(d, \Delta) = \log \frac{(d, \Delta)}{d\Delta} + \gamma \ll \log(d\Delta).$$

Поскольку

$$\sum_{d>Q} \frac{(d, \Delta)}{d^2} r(d, \Delta) \ll \sum_{\delta|\Delta} \delta \sum_{d>Q} \frac{\log(d\Delta)}{d^2} \ll \sum_{\delta|\Delta} \frac{\log(Q\Delta)}{Q} \ll \frac{\Delta^\varepsilon \log Q}{Q},$$

то ряд (28) корректно определён и

$$\psi(\Delta) - \frac{1}{\Delta} \sum_{d \leq Q} \frac{\mu(d)(d, \Delta)}{d^2} r(d\Delta) \ll \frac{\Delta^{-1+\varepsilon} \log Q}{Q} \ll \frac{\log Q}{Q}.$$

Таким же образом проверяется, что

$$\frac{1}{\Delta} \sum_{d \leq Q} \frac{\mu(d)(d, \Delta)}{d^2} \ll \frac{1}{Q}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{q \leq Q \\ \Delta|q}} \frac{\varphi(q)}{q^2} &= \frac{\log Q}{\Delta} \sum_{d \leq Q} \frac{\mu(d)(d, \Delta)}{d^2} + \psi(\Delta) + O\left(\frac{\log Q}{Q}\right) \\ &= \frac{\log Q}{\Delta} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)(d, \Delta)}{d^2} + \psi(\Delta) + O\left(\frac{\log Q}{Q}\right). \end{aligned}$$

Для завершения доказательства леммы остаётся проверить равенство

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)(d, \Delta)}{d^2} = \frac{\Delta}{\zeta(2)\varphi_+(\Delta)}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)(d, \Delta)}{d^2} &= \sum_{\delta|\Delta} \delta \sum_{\substack{d=1 \\ (d, \Delta)=\delta}}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = \sum_{\delta|\Delta} \frac{1}{\delta} \sum_{\substack{d_1=1 \\ (d_1, \Delta/\delta)=1}}^{\infty} \frac{\mu(\delta d_1)}{d_1^2} \\ &= \sum_{\delta|\Delta} \frac{\mu(\delta)}{\delta} \sum_{\substack{d_1=1 \\ (d_1, \Delta/\delta)=(d_1, \delta)=1}}^{\infty} \frac{\mu(d_1)}{d_1^2} = \sum_{\delta|\Delta} \frac{\mu(\delta)}{\delta} \sum_{\substack{d_1=1 \\ (d_1, \Delta)=1}}^{\infty} \frac{\mu(d_1)}{d_1^2} \\ &= \frac{\varphi(\Delta)}{\Delta} \cdot \frac{\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)}{\prod_{p|\Delta} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)} = \frac{\varphi(\Delta)}{\Delta} \cdot \frac{1}{\zeta(2)} \cdot \frac{\Delta}{\varphi_2(\Delta)} = \frac{\Delta}{\zeta(2)\varphi_+(\Delta)}. \end{aligned}$$

□

**Теорема 5.** Пусть  $a$  — натуральное,  $Q \geq 2$  — действительное. Тогда

$$\sum_{q \leq Q} \frac{\varphi(q)}{q^2} K_a^\times(q) = \frac{\log Q}{\zeta(2)} \varphi_2(a) + \omega(a) + O(a^{1+\varepsilon} Q^{-1+\varepsilon}),$$

где  $\omega(a)$  — некоторая арифметическая функция от  $a$ .

*Доказательство.* Преобразуем данную сумму, пользуясь равенствами (9) и (10):

$$\begin{aligned} \sum_{q \leq Q} \frac{\varphi(q)}{q^2} K_a^\times(q) &= \sum_{q \leq Q} \frac{\varphi(q)}{q^2} \sum_{\delta_1 | a, \delta_1^2 | q} \mu(\delta_1) K_{a/\delta_1}(q/\delta_1^2) \\ &= \sum_{\delta_1 | a} \mu(\delta_1) \sum_{q \leq Q, \delta_1^2 | q} \frac{\varphi(q)}{q^2} K_{a/\delta_1}(q/\delta_1^2) \\ &= \sum_{\delta_1 | a} \mu(\delta_1) \sum_{q \leq Q, \delta_1^2 | q} \frac{\varphi(q)}{q^2} \cdot \frac{a}{\delta_1} \sum_{k | \left(\frac{a}{\delta_1}, \frac{q}{\delta_1^2}\right)} \sum_{\delta_2 | \frac{a}{\delta_1 k}} \frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2} \\ &= a \sum_{\delta_1 \delta_2 k | a} \frac{\mu(\delta_1) \mu(\delta_2)}{\delta_1 \delta_2} \sum_{q \leq Q, \delta_1^2 k | q} \frac{\varphi(q)}{q^2}. \end{aligned}$$

Из равенства (27) следует, что

$$\sum_{q \leq Q} \frac{\varphi(q)}{q^2} K_a^\times(q) = a \sum_{\delta_1 \delta_2 k | a} \frac{\mu(\delta_1) \mu(\delta_2)}{\delta_1 \delta_2} \left( \frac{\log Q}{\zeta(2) \varphi_+(k \delta_1^2)} + \psi(k \delta_1^2) + O(Q^{-1+\varepsilon}) \right).$$

Применяя формулу (26), приходим к утверждению теоремы.  $\square$

**Следствие 3.** Пусть  $1 \leq Q_1 \leq Q_2$ . Тогда

$$\sum_{Q_1 \leq q < Q_2} \frac{\varphi(q)}{q^2} K_a^\times(q) = \frac{\varphi_2(a)}{\zeta(2)} \int_{Q_1}^{Q_2} \frac{dq}{q} + O(a^{1+\varepsilon} Q_1^{-1+\varepsilon}).$$

## Список литературы

- [1] Виноградов А. И., “Укороченное уравнение для сверток”, Записки научных семинаров ПОМИ, Наука, **211**, 1994, 104–119.
- [2] Линник Ю. В., Скубенко Б. Ф., “Асимптотическое распределение целочисленных матриц третьего порядка”, Вестник ЛГУ, сер. мат., мех., астроном., **3**:13 (1964), 25–36.
- [3] Устинов А. В., “О числе решений сравнения  $xy \equiv \ell \pmod{q}$  под графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции”, Алгебра и анализ, **20**:5 (2008), 186–216.
- [4] Устинов А. В., “Решение задачи Арнольда о слабой асимптотике для чисел Фробениуса с тремя аргументами”, Мат. сборник, **200**:4 (2009), 131–160.
- [5] Устинов А. В., “О распределении решений детерминантного уравнения”, Математический сборник (в печати).

- [6] Andersson J., *Summation formulae and zeta functions*, Stockholm University, Faculty of Science, Department of Mathematics, 2006.
- [7] Estermann T., “On Kloosterman’s sum”, *Mathematika*, **8** (1961), 83–86.
- [8] Hardy G. H., Write E. M., *An Introduction to the Number Theory*, Clarendon Press, Oxford, 1979.
- [9] Shparlinski I. E., “Modular hyperbolas”, *Jpn. J. Math.*, **7** (2012), 235–294.
- [10] Weil A., “On some exponential sums”, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **34** (1948), 204–207.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 16 сентября 2014 г.

Работа первого автора выполнена при поддержке фонда БРФФИ (грант Ф14Р-034). Работа второго автора выполнена при поддержке фонда «Династия», фонда РФФИ (грант 14-01-90002 Бел\_а) и проекта ДВО РАН 12-I-П19-01.

---

*Bernik V. I., Ustinov A. V.* On the distribution of points on the modular hyperbola. Far Eastern Mathematical Journal. 2014. V. 14. № 2. P. 141–155.

#### ABSTRACT

It is known that solutions of determinant equation  $\begin{vmatrix} a & x \\ y & z \end{vmatrix} = q$  are uniformly distributed. The article contains similar results when the variables satisfy additional restrictions  $(a, x) = 1$  or  $(a, x, y, z) = 1$ .

Key words: *Kloosterman sums, modular hyperbola.*