Дальневосточный математический журнал. 2014. Том 14. № 2. С. 156–159

УДК 511.335+ 511.334
MSC2010 11N75

© В. А. Быковский[1]

О распределении целых точек на детерминантной поверхности

В работе предлагается новый метод изучения эргодических свойств целых точек на детерминантной поверхности, основанный на спектральной теории автоморфного лапласиана.

Ключевые слова: *распределение целых точек, спектральная теория автоморфных функций.*

Введение

Хорошо известно, что вопросы распределения целых точек на детерминантной поверхности (N — фиксированное натуральное)

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 = N \tag{1}$$

имеют важное значение для изучения статистических свойств конечных непрерывных дробей и других вопросов теории чисел. Для их исследования ранее применялись только оценки сумм Клостермана (см. например, [1] и [2]).

Более точные результаты можно получить с помощью усреднений по параметрам, определяющим суммы Клостермана. Однако такой подход приводит к громоздким вычислениям. Мы предлагаем новую схему, основанную на спектральных разложениях свёрток обобщённых сумм делителей, полученных в работе [3] (см. также [4], [5]).

1. Применение преобразования Меллина

Пусть f — бесконечно дифференцируемая по $(0,1)^4$ функция с компактным носителем. Положим

$$S_N(f) = \sum_{m_1 m_2 + n_1 n_2 = N} f\left(\frac{m_1}{\sqrt{N}}, \frac{m_2}{\sqrt{N}}, \frac{n_1}{\sqrt{N}}, \frac{n_2}{\sqrt{N}}\right), \tag{2}$$

[1]Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: vab@iam.khv.ru

где в суммировании участвуют только четвёрки натуральных чисел (m_1, m_2, n_1, n_2). Преобразование Меллина

$$\widehat{f}(s_1, s_2, s_3, s_4) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f(x_1, x_2, x_3, x_4) x_1^{s_1-1} x_2^{s_2-1} x_3^{s_3-1} x_4^{s_4-1} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

— голоморфная по каждой переменной функция на всей плоскости комплексного переменного. При этом для любого $\varepsilon > 0$ и любого натурального k

$$\widehat{f}(s_1, s_2, s_3, s_4) \underset{\varepsilon,k,f}{\ll} \prod_{j=1}^{4} (1 + |s_j|)^{-k} \tag{3}$$

в декартовом произведении секторов $[-\pi + \varepsilon \leq \arg s_j \leq \pi - \varepsilon] \quad (1 \leq j \leq 4)$. Эти свойства прямо следуют из очевидных равенств

$$\widehat{f}(s) = \frac{(-1)^k}{s(s+1)\ldots(s+k-1)} \int\limits_0^1 f^{(k)}(x) x^{s+k-1} dx$$

$$\int\limits_0^1 f^{(k)}(x) dx = 0$$

в одномерном случае.

Воспользовавшись представлением Меллина (для некоторых $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$)

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{(2\pi i)^4} \int \int \underset{\mathrm{Re}\, s_j = \delta_j}{\int \int} \widehat{f}(s_1, s_2, s_3, s_4) x_1^{-s_1} x_2^{-s_2} x_3^{-s_3} x_4^{-s_4} ds_1 ds_2 ds_3 ds_4$$

, получим, что $S_N(f)$ из (2) можно представить в виде

$$S_N(f) = \frac{1}{(2\pi i)^4} \int \int \underset{\mathrm{Re}\, s_j = \delta_j}{\int \int} T_N(s_1, s_2, s_3, s_4) \widehat{f}(s_1, s_2, s_3, s_4) ds_1 ds_2 ds_3 ds_4, \tag{4}$$

где

$$T_N(s_1, s_2, s_3, s_4) =$$

$$= \sum_{m_1 m_2 + n_1 n_2 = N} \left(\frac{m_1}{\sqrt{N}}\right)^{-s_1} \left(\frac{m_2}{\sqrt{N}}\right)^{-s_2} \left(\frac{n_1}{\sqrt{N}}\right)^{-s_3} \left(\frac{n_2}{\sqrt{N}}\right)^{-s_4} =$$

$$= \sum_{m+n=N} \left(\frac{m}{N}\right)^{-\frac{1}{2}s_1 - \frac{1}{2}s_2} \tau_{\frac{1}{2}s_1 - \frac{1}{2}s_2}(m) \left(\frac{n}{N}\right)^{-\frac{1}{2}s_3 - \frac{1}{2}s_4} \tau_{\frac{1}{2}s_3 - \frac{1}{2}s_4}(n)$$

с

$$\tau_s(n) = \tau_{-s}(n) = \sum_{d_1 d_2 = n} \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^s = n^s \sum_{d \backslash n} \frac{1}{d^{2s}}.$$

2. Применение формулы свёртки

Опираясь на результаты работ [3], [4] и [5], для интересующей нас суммы получим представление в виде

$$\frac{\zeta(1+s_1-s_2)\zeta(1+s_3-s_4)}{\zeta(2+s_1-s_2+s_3-s_4)}\tau_{1+\frac{1}{2}s_1-\frac{1}{2}s_2+\frac{1}{2}s_3-\frac{1}{2}s_4}(N)\frac{\Gamma(1-s_2)\Gamma(1-s_4)}{\Gamma(1-s_2-s_4)}+$$

$$+\frac{\zeta(1+s_1-s_2)\zeta(1-s_3+s_4)}{\zeta(2+s_1-s_2-s_3+s_4)}\tau_{1+\frac{1}{2}s_1-\frac{1}{2}s_2-\frac{1}{2}s_3+\frac{1}{2}s_4}(N)\frac{\Gamma(1-s_2)\Gamma(1-s_3)}{\Gamma(1-s_2-s_3)}+$$

$$+\frac{\zeta(1-s_1+s_2)\zeta(1+s_3-s_4)}{\zeta(2-s_1+s_2+s_3-s_4)}\tau_{1-\frac{1}{2}s_1+\frac{1}{2}s_2+\frac{1}{2}s_3-\frac{1}{2}s_4}(N)\frac{\Gamma(1-s_1)\Gamma(1-s_4)}{\Gamma(1-s_1-s_4)}+$$

$$+\frac{\zeta(1-s_1+s_2)\zeta(1-s_3+s_4)}{\zeta(2-s_1+s_2-s_3+s_4)}\tau_{1-\frac{1}{2}s_1+\frac{1}{2}s_2-\frac{1}{2}s_3+\frac{1}{2}s_4}(N)\frac{\Gamma(1-s_1)\Gamma(1-s_3)}{\Gamma(1-s_1-s_3)}+$$

$$+O_{A,f}(N^{\Theta}\cdot\prod_{j=1}^{4}(1+|s_j|)^A)$$

для некоторого $A > A_0(\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4) > 0$ и постоянной $\Theta > \frac{1}{2}$, возникающей при оценке собственных значений оператора Гекке на формах Маасса.

Выберем в представлении Меллина для f

$$0<\delta_1<\delta_2<\frac{1}{4},\quad 0<\delta_3<\delta_4<\frac{1}{4}. \tag{5}$$

Затем перенесём в третьем интеграле прямую интегрирования по s_4 вправо на бесконечность. При этом мы не пройдём полюсов ввиду второго условия из (5) и получим нуль. Проделав такой же трюк в четвёртом интеграле по s_2 и во втором по s_4, опять получим нули. Далее в первом интеграле двигаем прямую интегрирования по s_3 вправо. Мы пройдём полюс при $s_3 = s_4$ и получим интеграл

$$\frac{1}{(2\pi i)^3}\int\limits_{\mathrm{Re}\,s_1=\delta_1}\int\limits_{\mathrm{Re}\,s_2=\delta_2}\int\limits_{\mathrm{Re}\,s_4=\delta_4}\frac{\zeta(1+s_1-s_2)}{\zeta(2+s_1-s_2)}\times$$

$$\times\tau_{1+\frac{1}{2}s_1-\frac{1}{2}s_2}(N)\frac{\Gamma(1-s_2)\Gamma(1-s_4)}{\Gamma(2-s_2-s_4)}\widehat{f}(s_1,s_2,s_4,s_4)ds_1ds_2ds_4.$$

Действуя точно так же по переменной s_1, получим асимптотическую формулу для $S_N(f)$ с главным членом

$$\frac{6}{\pi^2}\sigma_1(N)\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\mathrm{Re}\,s_2=\delta_2}\int\limits_{\mathrm{Re}\,s_4=\delta_4}\frac{\Gamma(1-s_2)\Gamma(1-s_4)}{\Gamma(2-s_2-s_4)}\widehat{f}(s_2,s_2,s_4,s_4)ds_2ds_4$$

и остаточным членом $O_f(N^{\Theta})$.

Список литературы

[1] Е. В. Подсыпанин, "Распределение целых точек на детерминантной поверхности", *Зап. научн. семинар ЛОМИ*, **93** (1980), 30–40.

[2] А. В. Устинов, "О числе решений сравнения $xy \equiv l(modq)$ под графиком дважды непрерывно дифференцируемой функции", *Алгебра и анализ*, **20**:5 (2008), 186–216.

[3] Н. В. Кузнецов, "Свёртка коэффициентов Фурье рядов Эйзенштейна–Маасса", *Зап. научн. семинар ЛОМИ*, **129** (1983), 43–84.

[4] V. Bykovskii, N. Kuznetsov, A. Vinogradov, "Generalized summation formula for inhomogeneous convolution", In Automorphic functions and their applications, Acad. Sci. USSR Inst. Appl. Math., Khabarovsk, 1990, 18–63.

[5] Y. Motohashi, "The binary additive divisor problem", *Ann. Scient. École Norm. Sup, 4e Sér.*, **27** (1994), 529–572.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 3 октября 2014 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00203) и программы ДВО РАН «Дальний Восток».

Bykovskii V. A. On the distribution of integer points on the determinant surface. Far Eastern Mathematical Journal. 2014. V. 14. № 2. P. 156–159.

ABSTRACT

This paper offers a new method for ergodic properties studying of integer points on the determinant surface. This approach is based on the spectral theory of automorphic Laplacian.

Key words: distribution of integer points, spectral theory of automorphic functions.