Дальневосточный математический журнал. 2014. Том 14. № 2. С. 160–172

УДК 517.95
MSC2010 49K20, 35K55, 35Q79

© Г. В. Гренкин[1]

Оптимальное управление в нестационарной задаче сложного теплообмена

Рассматривается задача оптимального управления свойствами границы для нестационарной задачи сложного теплообмена. Используется диффузионное приближение для уравнения переноса излучения. Доказана разрешимость задачи управления, получены необходимые условия оптимальности первого порядка.

Ключевые слова: *оптимальное управление, кондуктивно-конвективно-радиационный теплообмен, диффузионное приближение.*

Введение

Задачи оптимального управления для моделей сложного теплообмена в рассеивающих средах с отражающими границами представляют интерес в связи с инженерными приложениями. Большое число работ посвящено исследованию задач управления для нестационарных моделей сложного теплообмена [1]–[7], в которых для описания температурного поля используется нестационарное уравнение теплопроводности, а для моделирования излучения — стационарное диффузионное приближение уравнения переноса излучения. Задача управления для полностью стационарной модели сложного теплообмена рассмотрена в [8].

Данная работа посвящена исследованию задачи управления для нестационарной диффузионной модели сложного теплообмена. При использовании P_1 приближения для уравнения переноса излучения модель представляет собой систему нелинейных параболических уравнений. Работы [9, 10] посвящены исследованию корректности рассматриваемой задачи сложного теплообмена и вопросам устойчивости стационарных решений; корректность стационарных моделей доказана в [11]–[14]. В настоящей работе доказана разрешимость задачи управления, получена система оптимальности и показано, что оптимальное управление удовлетворяет принципу максимума.

[1]Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8; Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: `glebgrenkin@gmail.com`

1. Постановка задачи управления

Эволюционная нормализованная диффузионная модель, описывающая радиационный, кондуктивный и конвективный теплообмен в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, имеет следующий вид [9, 10, 15, 16]:

$$\partial\theta/\partial t - a\Delta\theta + \mathbf{v}\cdot\nabla\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = 0, \tag{1}$$

$$\nu\partial\varphi/\partial t - \alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = 0,\ x \in \Omega,\ t \in (0,T). \tag{2}$$

Здесь θ — нормализованная температура, φ — нормализованная интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям, $\mathbf{v}$ — заданное поле скоростей и κ_a — коэффициент поглощения. Постоянные a, b и α определяются следующим образом:

$$a = \frac{k}{\rho c_v}, \quad b = \frac{4\sigma n^2 T_{max}^3}{\rho c_v}, \quad \alpha = \frac{1}{3\kappa - A\kappa_s},$$

где k — теплопроводность, c_v — удельная теплоемкость, ρ — плотность, σ — постоянная Стефана–Больцмана, n — показатель преломления, T_{max} — максимальная температура в ненормализованной модели, $\nu = 1/c$, где c — скорость света в среде, $\kappa := \kappa_s + \kappa_a$ — коэффициент полного взаимодействия, κ_s — коэффициент рассеяния. Коэффициент $A \in [-1,1]$ описывает анизотропию рассеяния, случай $A = 0$ соответствует изотропному рассеянию.

Будем предполагать, что функции θ, φ, описывающие процесс сложного теплообмена, удовлетворяют следующим условиям на границе $\Gamma = \partial\Omega$:

$$a\partial_n\theta + \beta(\theta - \theta_b) = 0, \qquad \alpha\partial_n\varphi + u(\varphi - \theta_b^4) = 0, \tag{3}$$

а также начальным условиям:

$$\theta\big|_{t=0} = \theta_0, \qquad \varphi\big|_{t=0} = \varphi_0. \tag{4}$$

Здесь через ∂_n обозначаем производную в направлении внешней нормали $\mathbf{n}$. Неотрицательная функция θ_b, функция $\beta = \beta(x)$, $x \in \Gamma$, и начальные функции θ_0, φ_0 являются заданными. Следует отметить, что условия третьего рода для температуры обычно ставятся на твердой стенке, где $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = 0$. В данном случае постановка условий третьего рода на всей границе и, в частности, на участке втекания моделирует процесс теплообмена при малых значениях нормальной компоненты скорости. Функция $u = u(x,t),\ x \in \Gamma,\ t \in (0,T)$, описывающая отражающие свойства границы, рассматривается в качестве управления, которое может зависеть от времени t.

Задача оптимального управления заключается в определении функции $u \in L^2(\Sigma)$ и пары $y = \{\theta, \varphi\}$, удовлетворяющих (1)–(4), таких, что выполняется условие

$$u_1(x,t) \le u(x,t) \le u_2(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma = \Gamma \times (0,T)$$

и функционал

$$\int_0^T \int_\Omega (\theta - \theta_d)^2\, dx\, dt$$

достигает минимального значения. Здесь θ_d, u_1, u_2 — заданные функции. Смысл данной формулировки состоит в создании заданной структуры температурного поля за счет динамического изменения отражающих свойств границы.

2. Формализация задачи

В дальнейшем считаем, что Ω — липшицева ограниченная область, $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$. Через L^p, $1 \le p \le \infty$ обозначаем пространство Лебега, а через H^s – пространство Соболева W_2^s. Пространство $L^s(0,T;X)$ (соответственно $C([0,T];X)$) состоит из функций класса $L^s, s \ge 1$, определенных на $(0,T)$ (соответственно непрерывных на $[0,T]$), со значениями в банаховом пространстве X. Будем предполагать, что исходные данные удовлетворяют условиям

(i) $\mathbf{v} \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$, $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$;

(ii) $\beta \in L^\infty(\Gamma)$, $u_1, u_2, \theta_b \in L^\infty(\Sigma)$, $0 < \beta_0 \le \beta$, $0 < u_0 \le u_1 \le u_2$, $\beta_0, u_0 = Const$, $\theta_b \ge 0$;

(iii) $0 \le \theta_0, \varphi_0 \in L^\infty(\Omega)$;

(iv) $\beta + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) \ge 0$, если $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) < 0$.

Пусть $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$. Через V' обозначаем пространство, сопряженное с пространством V. Пространство H отождествляем с пространством H', так что $V \subset H = H' \subset V'$. Обозначим через $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_V$ и $\|\cdot\|_*$ нормы в H, V и V' соответственно, а через (f,v) — значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$, совпадающее со скалярным произведением в H, если $f \in H$; $((\cdot,\cdot))$ — скалярное произведение в пространстве V,

$$(f,g) = \int\limits_\Omega f(x)g(x)\,dx, \quad ((f,g)) = (f,g) + (\nabla f, \nabla g).$$

Определим пространство

$$W = \{y \in L^2(0,T;V) \colon y' \in L^2(0,T,V')\}.$$

Здесь и далее $y' = dy/dt$. Также будем использовать пространства вида $X \times X$ с нормой $\|y\|_{X\times X} = \|y_1\|_X + \|y_2\|_X$ для $y = \{y_1, y_2\}$; $\mathbf{H} = H \times H$, $\mathbf{V} = V \times V$, $\mathbf{V}' = V' \times V'$, $\mathbf{W} = W \times W$.

Обозначим через $U = L^2(\Sigma)$ пространство управлений, $U_{ad} = \{u \in U \colon u_1 \le u \le u_2\}$ — множество допустимых управлений.

Определим операторы $D\colon \mathbf{V}' \to \mathbf{V}'$, $A_{1,3,4}\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$, $A_2(t)\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$, $F(t)\colon \mathbf{V} \times L^2(\Gamma) \to \mathbf{V}'$, $B(t)\colon L^2(\Gamma) \to \mathbf{V}'$ и функционал $f \in L^2(0,T;\mathbf{V}')$ при помощи следующих равенств, справедливых для любых $y = \{\theta, \varphi\}, z = \{v, w\} \in \mathbf{V}$ и $y' = \{\theta', \varphi'\} \in \mathbf{V}'$:

$$(Dy', z) = (\theta', v) + \nu(\varphi', w), \quad A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4,$$
$$(A_1 y, z) = a(\nabla\theta, \nabla v) + \int\limits_\Gamma \beta\theta v\,d\Gamma + \alpha(\nabla\varphi, \nabla w) + \kappa_a(\varphi, w),$$
$$(A_2(t)y, z) = (\mathbf{v}\nabla\theta, v), \qquad (A_3 y, z) = -b\kappa_a(\varphi, v), \qquad (A_4 y, z) = \kappa_a(|\theta|\theta^3, bv - w),$$
$$(F(t)(y,u), z) = \int\limits_\Gamma u\varphi w\,d\Gamma, \qquad (B(t)u, z) = \int\limits_\Gamma u\theta_b^4 w\,d\Gamma, \qquad (f, z) = \int\limits_\Gamma \beta\theta_b v\,d\Gamma.$$

Определение. *Пара* $y = \{\theta, \varphi\} \in \mathbf{W}$ *такая, что* $A_4 y \in L^2(0,T;\mathbf{V}')$ *называется решением (слабым) задачи (1)–(4), если*

$$Dy' + Ay + F(y,u) = Bu + f \text{ п.в. на } (0,T), \qquad y\big|_{t=0} = y_0 = \{\theta_0, \varphi_0\}. \tag{5}$$

Замечание 1. Билинейная форма $(A_1 y, z)$ определяет в пространстве $\mathbf{V}$ скалярное произведение, а соответствующая ему норма эквивалентна норме в $\mathbf{V}$. Кроме того, в силу вложения $V \subset L^6(\Omega)$ выражение $(|v|v^3, w)$ имеет смысл для любых функций $v, w \in V$, и поэтому $|v|v^3 \in V'$.

Теорема 1. *[9, 10] Пусть выполняются условия (i)–(iv). Тогда на любом конечном промежутке времени* $(0,T)$, $0 < T < \infty$, *задача (1)–(4) однозначно разрешима, при этом слабое решение принадлежит* $L^\infty(Q)$ *и удовлетворяет неравенствам* $0 \le \theta \le M$, $0 \le \varphi \le M^4$, *где* $M = \max\left\{\|\theta_b\|_{L^\infty(\Sigma)}, \|\theta_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\varphi_0\|^{1/4}_{L^\infty(\Omega)}\right\}$. *Кроме того, справедлива оценка решения задачи (1)–(4) в пространстве* $\mathbf{W}$ *вида*

$$\|y\|_{\mathbf{W}} \le C, \tag{6}$$

где C *зависит от* Ω, T, M, $\|\beta\|_{L^\infty(\Gamma)}$, $\|u\|_{L^\infty(\Sigma)}$, $\|\mathbf{v}\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}$, a, α, b, κ_a, ν.

Для заданной функции $\theta_d \in L^2(0,T;H)$ определим функционал качества

$$J(y) = \int_0^T \|\theta - \theta_d\|^2\, dt, \qquad y = \{\theta, \varphi\} \in L^2(0,T;\mathbf{H}).$$

Рассмотрим множество $\mathcal{U}$ допустимых пар $\{y, u\}$, для которых $u \in U_{ad}$ и $y \in \mathbf{W}$ есть решение задачи (5). Задача оптимального управления заключается в минимизации функционала J на множестве допустимых пар:

$$J(y) \to \inf, \qquad \{y, u\} \in \mathcal{U}. \tag{7}$$

Решение $\{y, u\}$ будем называть оптимальной парой, а его компоненты y, u — оптимальным состоянием и оптимальным управлением соответственно.

3. Существование оптимальных управлений

Теорема 2. *Пусть выполняются условия (i)–(iv). Тогда существует решение задачи (7).*

Доказательство. Обозначим через $j = \inf J(y)$ на множестве допустимых пар. Существует последовательность $\{y_k, u_k\} \in \mathcal{U}$ такая, что $J(y_k) \to j$.

Последовательность u_k ограничена в U. Из оценки (6) вытекает, что последовательность y_k ограничена в $\mathbf{W}$. Так как U и $\mathbf{W}$ — гильбертовы пространства, то можно выделить подпоследовательности: $u_k \to u$ слабо в U, $y_k \to y$ слабо в $\mathbf{W}$. В силу компактности вложения $W \subset L^2(0,T;H)$, $y_k \to y$ сильно в $L^2(0,T;\mathbf{H})$.

Докажем, что $\{y,u\} \in \mathcal{U}$. Так как множество U_{ad} выпукло и замкнуто, то оно является слабо замкнутым, следовательно, $u \in U_{ad}$. Остается доказать, что y — решение задачи Коши (5). Так как $y'_k \to y'$ слабо в $L^2(0,T;\mathbf{V}')$, то $Dy'_k \to Dy'$ слабо в $L^2(0,T;\mathbf{V}')$. Поскольку A_1, A_3 — линейные непрерывные операторы, то $A_1 y_k \to A_1 y$, $A_3 y_k \to A_3 y$ слабо в $L^2(0,T;\mathbf{V}')$. Для любого t оператор $B(t)$ линейный и непрерывный, причем $\|B(t)u\|_* \le C\|u\|_{L^2(\Gamma)}$, где $C = Const > 0$ не зависит от t, следовательно, оператор $B\colon U \to L^2(0,T;\mathbf{V}')$ непрерывен. Поэтому $Bu_k \to Bu$ слабо в $L^2(0,T;\mathbf{V}')$. Аналогично $A_2 y_k \to A_2 y$ слабо в $L^2(0,T;\mathbf{V}')$.

Чтобы доказать, что $A_4 y_k \to A_4 y$ слабо в $L^2(0,T;\mathbf{V}')$, докажем, что $\int_0^T (\theta_k^4, v)\,dt \to \int_0^T (\theta^4, v)\,dt$ для любого $v \in L^2(0,T;V)$, где $y_k = \{\theta_k, \varphi_k\}$, $y = \{\theta,\varphi\}$. Так как $0 \le \theta_k \le M$, то $0 \le \theta \le M$,

$$\left|\int_0^T (\theta_k^4 - \theta^4, v)\,dt\right| \le 4M^3 \int_0^T \|\theta_k - \theta\|\|v\|\,dt \le 4M^3 \|\theta_k - \theta\|_{L^2(0,T;H)} \|v\|_{L^2(0,T;H)} \to 0,$$

так как $\theta_k \to \theta$ сильно в $L^2(0,T;H)$.

Докажем, что $F(y_k,u_k) \to F(y,u)$ слабо в $L^2(0,T;\mathbf{V}')$, т.е. $\int_0^T\int_\Gamma u_k\varphi_k v\,d\Gamma\,dt \to \int_0^T\int_\Gamma u\varphi v\,d\Gamma\,dt$ для любого $v \in L^2(0,T;V)$. Достаточно доказать, что $\varphi_k \to \varphi$ сильно в $L^2(\Sigma)$. Воспользуемся известным неравенством

$$\|\varphi_k - \varphi\|^2_{L^2(\Gamma)} \le \varepsilon\|\varphi_k - \varphi\|^2_V + C_\varepsilon\|\varphi_k - \varphi\|^2_H, \tag{8}$$

которое справедливо для любого $\varepsilon > 0$ с некоторой константой $C_\varepsilon > 0$. Так как $\varphi_k \to \varphi$ слабо в $L^2(0,T;V)$ и сильно в $L^2(0,T;H)$, то из неравенства (8) вытекает, что $\varphi_k \to \varphi$ сильно в $L^2(\Sigma)$.

Полученные результаты о сходимости позволяют утверждать, что пара $\{y,u\}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (5). В силу непрерывности оператора следа $y \in \mathbf{W} \to y|_{t=0} \in \mathbf{H}$ имеем $y|_{t=0} = y_0$. Поэтому $\{y,u\}$ — допустимая пара.

Так как функционал J слабо полунепрерывен снизу, то $J(y) = j$, т.е. $\{y,u\}$ — оптимальная пара. □

4. Система оптимальности и принцип максимума

Получим необходимые условия экстремума первого порядка, следствием которых является принцип максимума для оптимального управления. Отметим, что вывод системы оптимальности задачи (7) с применением классического принципа Лагранжа затруднителен, так как оператор ограничений, действующий на функции из пространства W, не определен в окрестности оптимальной пары за счет нелинейности θ^4. В данной работе получение условий оптимальности фактически основано на прямых оценках производных отображения «управление $\to$ состояние».

Пусть $\{\widehat{y}, \widehat{u}\}$ — оптимальная пара. Выберем произвольный элемент $u \in U_{ad}$. Для любого $\varepsilon \in (0, 1]$ положим

$$u_\varepsilon = \widehat{u} + \varepsilon(u - \widehat{u}), \qquad g_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(y_\varepsilon - \widehat{y}),$$

где y_ε — решение задачи (5), соответствующее управлению u_ε. Так как U_{ad} выпукло, то $u_\varepsilon \in U_{ad}$.

Пары $\{y_\varepsilon, u_\varepsilon\}$ и $\{\widehat{y}, \widehat{u}\}$ удовлетворяют уравнениям

$$Dy'_\varepsilon + Ay_\varepsilon + F(y_\varepsilon, u_\varepsilon) = Bu_\varepsilon + f, \qquad y_\varepsilon\big|_{t=0} = y_0, \tag{9}$$

$$D\widehat{y}' + A\widehat{y} + F(\widehat{y}, \widehat{u}) = B\widehat{u} + f, \qquad \widehat{y}\big|_{t=0} = y_0. \tag{10}$$

Вычтем из уравнения (9) уравнение (10) и разделим на ε. Получим

$$Dg'_\varepsilon + A_1 g_\varepsilon + A_2 g_\varepsilon + A_3 g_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}(A_4 y_\varepsilon - A_4\widehat{y}) +$$

$$+ F(g_\varepsilon, \widehat{u}) + \varepsilon F(g_\varepsilon, u - \widehat{u}) + F(\widehat{y}, u - \widehat{u}) = B(u - \widehat{u}), \qquad g_\varepsilon\big|_{t=0} = 0. \tag{11}$$

$$(A_4 y_\varepsilon - A_4\widehat{y}, z) = \kappa_a(\theta_\varepsilon^4 - \widehat{\theta}^4, bv - w) = \kappa_a((\widehat{\theta} + \varepsilon g_{\varepsilon 1})^4 - \widehat{\theta}^4, bv - w) =$$
$$= \varepsilon\kappa_a(4\widehat{\theta}^3 g_{\varepsilon 1} + 6\varepsilon\widehat{\theta}^2 g_{\varepsilon 1}^2 + 4\varepsilon^2\widehat{\theta} g_{\varepsilon 1}^3 + \varepsilon^3 g_{\varepsilon 1}^4, bv - w),$$

где $g_\varepsilon = \{g_{\varepsilon 1}, g_{\varepsilon 2}\}$, $y_\varepsilon = \{\theta_\varepsilon, \varphi_\varepsilon\}$.

Лемма 1. *Для любого $\varepsilon \in (0, 1]$ справедлива оценка*

$$\|g_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H})} + \|g_\varepsilon\|_{L^2(0,T;\mathbf{V})} + \|g'_\varepsilon\|_{L^2(0,T;\mathbf{V}')} \le C,$$

где постоянная C не зависит от ε.

Доказательство. Перепишем уравнение (11) в виде двух вариационных равенств:

$$(g'_{\varepsilon 1}, v) + a(\nabla g_{\varepsilon 1}, \nabla v) + \int\limits_\Gamma \beta g_{\varepsilon 1} v\, d\Gamma + (\mathbf{v}\nabla g_{\varepsilon 1}, v) - b\kappa_a(g_{\varepsilon 2}, v) +$$

$$+ b\kappa_a\Big(4(\widehat{\theta}^3 g_{\varepsilon 1}, v) + 6\varepsilon(\widehat{\theta}^2 g_{\varepsilon 1}^2, v) + 4\varepsilon^2(\widehat{\theta} g_{\varepsilon 1}^3, v) + \varepsilon^3(g_{\varepsilon 1}^4, v)\Big) = 0, \tag{12}$$

$$\nu(g'_{\varepsilon 2}, v) + \alpha(\nabla g_{\varepsilon 2}, \nabla v) + \int\limits_\Gamma \widehat{u} g_{\varepsilon 2} v\, d\Gamma + \varepsilon\int\limits_\Gamma (u - \widehat{u}) g_{\varepsilon 2} v\, d\Gamma + \int\limits_\Gamma (u - \widehat{u})\widehat{\varphi} v\, d\Gamma + \kappa_a(g_{\varepsilon 2}, v) -$$

$$- \kappa_a\Big(4(\widehat{\theta}^3 g_{\varepsilon 1}, v) + 6\varepsilon(\widehat{\theta}^2 g_{\varepsilon 1}^2, v) + 4\varepsilon^2(\widehat{\theta} g_{\varepsilon 1}^3, v) + \varepsilon^3(g_{\varepsilon 1}^4, v)\Big) = \int\limits_\Gamma (u - \widehat{u})\theta_b^4 v\, d\Gamma, \tag{13}$$

которые справедливы п.в. на $(0, T)$ для любого $v \in V$.

Положим в (12) $v = g_{\varepsilon 1}$, а в (13) $v = g_{\varepsilon 2}$. Получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|g_{\varepsilon 1}\|^2 + a\|\nabla g_{\varepsilon 1}\|^2 + \int\limits_\Gamma \beta g_{\varepsilon 1}^2\, d\Gamma + (\mathbf{v}\nabla g_{\varepsilon 1}, g_{\varepsilon 1}) - b\kappa_a(g_{\varepsilon 2}, g_{\varepsilon 1}) +$$

$$+ b\kappa_a\left(4(\widehat{\theta}^3 g_{\varepsilon 1}, g_{\varepsilon 1}) + 6\varepsilon(\widehat{\theta}^2 g_{\varepsilon 1}^2, g_{\varepsilon 1}) + 4\varepsilon^2(\widehat{\theta} g_{\varepsilon 1}^3, g_{\varepsilon 1}) + \varepsilon^3(g_{\varepsilon 1}^4, g_{\varepsilon 1})\right) = 0,$$

$$\frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\|g_{\varepsilon 2}\|^2 + \alpha\|\nabla g_{\varepsilon 2}\|^2 + \int\limits_\Gamma \widehat{u} g_{\varepsilon 2}^2\, d\Gamma + \varepsilon\int\limits_\Gamma (u-\widehat{u}) g_{\varepsilon 2}^2\, d\Gamma + \int\limits_\Gamma (u-\widehat{u})\widehat{\varphi} g_{\varepsilon 2}\, d\Gamma + \kappa_a\|g_{\varepsilon 2}\|^2 -$$

$$-\kappa_a\left(4(\widehat{\theta}^3 g_{\varepsilon 1}, g_{\varepsilon 2}) + 6\varepsilon(\widehat{\theta}^2 g_{\varepsilon 1}^2, g_{\varepsilon 2}) + 4\varepsilon^2(\widehat{\theta} g_{\varepsilon 1}^3, g_{\varepsilon 2}) + \varepsilon^3(g_{\varepsilon 1}^4, g_{\varepsilon 2})\right) = \int\limits_\Gamma (u-\widehat{u})\theta_b^4 g_{\varepsilon 2}\, d\Gamma.$$

Введем положительные постоянные

$$k_1 = \inf_{v\in V, \|v\|_V = 1}\left(a\|\nabla v\|^2 + \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma \beta v^2\, d\Gamma\right), \qquad k_2 = \inf_{v\in V, \|v\|_V=1}\left(\alpha\|\nabla v\|^2 + \int\limits_\Gamma u_0 v^2\, d\Gamma\right).$$

Справедливы оценки:

$$a\|\nabla g_{\varepsilon 1}\|^2 + \int\limits_\Gamma \beta g_{\varepsilon 1}^2\, d\Gamma + (\mathbf{v}\nabla g_{\varepsilon 1}, g_{\varepsilon 1}) = a\|\nabla g_{\varepsilon 1}\|^2 + \int\limits_\Gamma \beta g_{\varepsilon 1}^2\, d\Gamma + \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) g_{\varepsilon 1}^2\, d\Gamma \geq k_1\|g_{\varepsilon 1}\|_V^2,$$

$$\alpha\|\nabla g_{\varepsilon 2}\|^2 + \int\limits_\Gamma \widehat{u} g_{\varepsilon 2}^2\, d\Gamma \geq k_2\|g_{\varepsilon 2}\|_V^2, \qquad |(g_{\varepsilon 2}, g_{\varepsilon 1})| \leq \frac{1}{2}(\|g_{\varepsilon 1}\|^2 + \|g_{\varepsilon 2}\|^2),$$

$$|(\widehat{\theta}^3 g_{\varepsilon 1}, g_{\varepsilon 1})| = \left|\int\limits_\Omega \widehat{\theta}^3 g_{\varepsilon 1}^2\, dx\right| \leq M^3\|g_{\varepsilon 1}\|^2.$$

Так как $\varepsilon g_\varepsilon = y_\varepsilon - \widehat{y}$, то $|\varepsilon g_{\varepsilon 1}| \leq M$, $|\varepsilon g_{\varepsilon 2}| \leq M^4$, поэтому

$$|\varepsilon(\widehat{\theta}^2 g_{\varepsilon 1}^2, g_{\varepsilon 1})| = \left|\int\limits_\Omega \widehat{\theta}^2 \varepsilon g_{\varepsilon 1} g_{\varepsilon 1}^2\, dx\right| \leq M^3\|g_{\varepsilon 1}\|^2,$$

аналогично

$$|\varepsilon^2(\widehat{\theta} g_{\varepsilon 1}^3, g_{\varepsilon 1})| \leq M^3\|g_{\varepsilon 1}\|^2, \quad |\varepsilon^3(g_{\varepsilon 1}^4, g_{\varepsilon 1})| \leq M^3\|g_{\varepsilon 1}\|^2,$$

$$|(\widehat{\theta}^3 g_{\varepsilon 1}, g_{\varepsilon 2})| = \left|\int\limits_\Omega \widehat{\theta}^3 g_{\varepsilon 1} g_{\varepsilon 2}\, dx\right| \leq M^3\|g_{\varepsilon 1}\|\|g_{\varepsilon 2}\| \leq \frac{M^3}{2}(\|g_{\varepsilon 1}\|^2 + \|g_{\varepsilon 2}\|^2),$$

$$|\varepsilon(\widehat{\theta}^2 g_{\varepsilon 1}^2, g_{\varepsilon 2})| = \left|\int\limits_\Omega \widehat{\theta}^2 \varepsilon g_{\varepsilon 1} g_{\varepsilon 1} g_{\varepsilon 2}\right| \leq M^3\|g_{\varepsilon 1}\|\|g_{\varepsilon 2}\| \leq \frac{M^3}{2}(\|g_{\varepsilon 1}\|^2 + \|g_{\varepsilon 2}\|^2),$$

$$|\varepsilon^2(\widehat{\theta} g_{\varepsilon 1}^3, g_{\varepsilon 2})| \leq \frac{M^3}{2}(\|g_{\varepsilon 1}\|^2 + \|g_{\varepsilon 2}\|^2), \quad |\varepsilon^3(g_{\varepsilon 1}^4, g_{\varepsilon 2})| \leq \frac{M^3}{2}(\|g_{\varepsilon 1}\|^2 + \|g_{\varepsilon 2}\|^2).$$

Оценим граничные интегралы:

$$\left|\varepsilon\int\limits_{\Gamma}(u-\widehat{u})g_{\varepsilon 2}^2\,d\Gamma\right| \le C_1\left|\int\limits_{\Gamma}\varepsilon g_{\varepsilon 2}g_{\varepsilon 2}\,d\Gamma\right| \le C_1M^4\left|\int\limits_{\Gamma}g_{\varepsilon 2}\,d\Gamma\right| \le C_2\|g_{\varepsilon 2}\|_V \le \delta\|g_{\varepsilon 2}\|_V^2 + C_\delta,$$

$$\left|\int\limits_{\Gamma}(u-\widehat{u})\widehat{\varphi}g_{\varepsilon 2}\,d\Gamma\right| \le \delta\|g_{\varepsilon 2}\|_V^2 + C_\delta, \qquad \left|\int\limits_{\Gamma}(u-\widehat{u})\theta_b^4 g_{\varepsilon 2}\,d\Gamma\right| \le \delta\|g_{\varepsilon 2}\|_V^2 + C_\delta.$$

Данные неравенства справедливы для любого $\delta > 0$ с некоторой константой $C_\delta > 0$. Здесь и далее C_i — положительные постоянные, не зависящие от ε.

Выбрав достаточно малое $\delta > 0$, получим

$$\frac{d}{dt}\|g_{\varepsilon 1}\|^2 + C_3\|g_{\varepsilon 1}\|_V^2 \le C_4\|g_{\varepsilon 1}\|^2 + C_5\|g_{\varepsilon 2}\|^2,$$
$$\frac{d}{dt}\|g_{\varepsilon 2}\|^2 + C_6\|g_{\varepsilon 2}\|_V^2 \le C_7\|g_{\varepsilon 1}\|^2 + C_8\|g_{\varepsilon 2}\|^2 + C_9.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\frac{d}{dt}(\|g_{\varepsilon 1}\|^2 + \|g_{\varepsilon 2}\|^2) + C_{10}(\|g_{\varepsilon 1}\|_V^2 + \|g_{\varepsilon 2}\|_V^2) \le C_{11}(\|g_{\varepsilon 1}\|^2 + \|g_{\varepsilon 2}\|^2) + C_{12}. \tag{14}$$

Отсюда

$$\|g_{\varepsilon 1}(t)\|^2 + \|g_{\varepsilon 2}(t)\|^2 \le C_{11}\int\limits_0^t(\|g_{\varepsilon 1}(\tau)\|^2 + \|g_{\varepsilon 2}(\tau)\|^2)d\tau + C_{12}T.$$

По лемме Гронуолла

$$\|g_{\varepsilon 1}(t)\|^2 + \|g_{\varepsilon 2}(t)\|^2 \le C_{12}Te^{C_{11}t}.$$

Следовательно, $\|g_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H})} \le C_{13}$.

Из (14) получаем, что

$$\|g_{\varepsilon 1}(t)\|^2 + \|g_{\varepsilon 2}(t)\|^2 + C_{10}\int\limits_0^t(\|g_{\varepsilon 1}(\tau)\|_V^2 + \|g_{\varepsilon 2}(\tau)\|_V^2)d\tau \le C_{14}.$$

Таким образом,

$$\|g_\varepsilon\|_{L^2(0,T;\mathbf{V})} \le C_{15}. \tag{15}$$

Оценим производные по t:

$$\|g'_{\varepsilon 1}\|_* = \sup_{\|v\|_V=1}(g'_{\varepsilon 1}, v) \le \sup_{\|v\|_V=1}(a\|\nabla g_{\varepsilon 1}\|\|\nabla v\| + C_{16}\|g_{\varepsilon 1}\|_V\|v\|_V +$$

$$+\|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla g_{\varepsilon 1}\|\|v\|_{L^4(\Omega)} + b\kappa_a\|g_{\varepsilon 2}\|\|v\| + C_{17}\|g_{\varepsilon 1}\|\|v\|) \le C_{18}\|g_{\varepsilon 1}\|_V + C_{19}\|g_{\varepsilon 2}\|,$$

аналогично

$$\|g'_{\varepsilon 2}\|_* \le C_{20}\|g_{\varepsilon 2}\|_V + C_{21}\|g_{\varepsilon 1}\| + C_{22}.$$

Из полученных неравенств и оценки (15) получим $\|g'_\varepsilon\|_{L^2(0,T;\mathbf{V}')} \le C_{23}$. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть $\{\widehat{y}, \widehat{u}\}$ — оптимальная пара. Тогда для каждого элемента $u \in U_{ad}$ существует решение $g = \{g_1, g_2\} \in \mathbf{W}$ задачи*

$$Dg' + A_1 g + A_2 g + A_3 g + A_5(g, \widehat{y}) + F(g, \widehat{u}) + F(\widehat{y}, u - \widehat{u}) = B(u - \widehat{u}), \quad g|_{t=0} = 0, \tag{16}$$

где

$$(A_5(g, \widehat{y}), z) = 4\kappa_a(\widehat{\theta}^3 g_1, bv - w)$$

такое, что

$$\int_0^T (\widehat{\theta} - \theta_d, g_1)\, dt \geq 0. \tag{17}$$

Доказательство. Сделаем предельный переход в уравнении (11) при $\varepsilon \to 0$. Так как последовательность g_ε ограничена в $\mathbf{W}$, то подпоследовательность $g_\varepsilon \to g$ слабо в $\mathbf{W}$, и поэтому $g_\varepsilon \to g$ сильно в $L^2(0, T; \mathbf{H})$. Так как D, A_1, A_2, A_3, F — линейные непрерывные операторы, то $Dg'_\varepsilon \to Dg'$, $A_1 g_\varepsilon \to A_1 g$, $A_2 g_\varepsilon \to A_2 g$, $A_3 g_\varepsilon \to A_3 g$, $F(g_\varepsilon, \widehat{u}) \to F(g, \widehat{u})$, $F(g_\varepsilon, u - \widehat{u}) \to F(g, u - \widehat{u})$ слабо в $L^2(0, T; \mathbf{V}')$.

Чтобы сделать предельный переход в пятом слагаемом в (11), нужно показать, что $\widehat{\theta}^3 g_{\varepsilon 1} \to \widehat{\theta}^3 g_1$, $\varepsilon \widehat{\theta}^2 g_{\varepsilon 1}^2 \to 0$, $\varepsilon^2 \widehat{\theta} g_{\varepsilon 1}^3 \to 0$, $\varepsilon^3 g_{\varepsilon 1}^4 \to 0$ слабо в $L^2(0, T; V')$.

Проверим, что

$$\int_0^T \Big(\widehat{\theta}^3 (g_{\varepsilon 1} - g_1), v\Big)\, dt \to 0 \quad \forall v \in L^2(0, T; V).$$

В самом деле,

$$\left| \int_0^T \Big(\widehat{\theta}^3 (g_{\varepsilon 1} - g_1), v\Big)\, dt \right| \leq M^3 \int_0^T \|g_{\varepsilon 1} - g_1\| \|v\|\, dt \leq \|g_{\varepsilon 1} - g_1\|_{L^2(0,T;H)} \|v\|_{L^2(0,T;H)} \to 0,$$

так как $g_{\varepsilon 1} \to g_1$ сильно в $L^2(0, T; H)$.

Последовательность $\widehat{\theta}^2 g_{\varepsilon 1}^2$ ограничена в $L^2(0, T; V')$, так как

$$\int_0^T \|\widehat{\theta}^2 g_{\varepsilon 1}^2\|_*^2\, dt = \int_0^T \left(\sup_{\|v\|_V = 1} \left| \int_\Omega \widehat{\theta}^2 g_{\varepsilon 1}^2 v\, dx \right| \right)^2 dt \leq$$

$$\leq M^4 \int_0^T \left(\sup_{\|v\|_V = 1} \|g_{\varepsilon 1}\| \|g_{\varepsilon 1}\|_{L^4(\Omega)} \|v\|_{L^4(\Omega)} \right)^2 dt \leq C_1 \int_0^T \|g_{\varepsilon 1}\|_V^2\, dt \leq C_2.$$

Таким образом, $\varepsilon \widehat{\theta}^2 g_{\varepsilon 1}^2 \to 0$ сильно в $L^2(0, T; V')$.

Докажем, что $\varepsilon^2 \widehat{\theta} g_{\varepsilon 1}^3 \to 0$ в $L^2(0, T; V')$. По аналогии можно показать, что $\varepsilon \widehat{\theta} g_{\varepsilon 1}^2 \to 0$ сильно в $L^2(0, T; V')$. Тогда

$$\left\| \varepsilon^2 \widehat{\theta} g_{\varepsilon 1}^3 \right\|_{L^2(0,T;V')}^2 = \int_0^T \left(\sup_{\|v\|_V = 1} \left| (\varepsilon g_{\varepsilon 1} \widehat{\theta} \varepsilon g_{\varepsilon 1}^2, v) \right| \right)^2 dt \leq$$

$$\leq M^2 \int\limits_0^T \left(\sup_{\|v\|_V=1} \left| (\widehat{\theta}\varepsilon g_{\varepsilon 1}^2, v) \right| \right)^2 dt = M^2 \left\| \varepsilon\widehat{\theta} g_{\varepsilon 1}^2 \right\|^2_{L^2(0,T;V')} \to 0.$$

Таким же образом доказывается утверждение $\varepsilon^3 g_{\varepsilon 1}^4 \to 0$. Итак, в результате предельного перехода получаем (16).

Для получения (17) рассмотрим выражение

$$\frac{1}{\varepsilon}(J(y_\varepsilon) - J(\widehat{y})) = \int\limits_0^T (\theta_\varepsilon + \widehat{\theta} - 2\theta_d, g_{\varepsilon 1})\, dt.$$

Поскольку $g_{\varepsilon 1} \to g_1$, $\theta_\varepsilon = \widehat{\theta} + \varepsilon g_{\varepsilon 1} \to \widehat{\theta}$ сильно в $L^2(0,T;H)$,

$$\frac{1}{\varepsilon}(J(y_\varepsilon) - J(\widehat{y})) \to 2\int\limits_0^T (\widehat{\theta} - \theta_d, g_1)\, dt.$$

Так как $J(y_\varepsilon) \geq J(\widehat{y})$, то $\int\limits_0^T (\widehat{\theta} - \theta_d, g_1)\, dt \geq 0$. Лемма доказана. □

Перейдем к выводу системы оптимальности.

Лемма 3. *Пусть $\{\widehat{y}, \widehat{u}\}$ — оптимальная пара. Существует единственное решение $p \in \mathbf{W}$ «сопряженной» системы*

$$-Dp' + A_1 p + A_6 p + A_7(p, \widehat{y}) + F(p, \widehat{u}) = G(\widehat{y}), \quad p|_{t=T} = 0, \tag{18}$$

где

$$(A_6 p, z) = (\mathbf{v}\nabla v, p_1), \quad (A_7(p,\widehat{y}), z) = 4b\kappa_a(\widehat{\theta}^3 p_1, v) - b\kappa_a(p_1, w) - 4\kappa_a(\widehat{\theta}^3 p_2, v),$$

$$(G(\widehat{y}), z) = (\widehat{\theta} - \theta_d, v), \quad p = \{p_1, p_2\}, \quad z = \{v, w\}.$$

Доказательство. Сделаем замену $\widetilde{p}(t) = p(T-t)$, получим

$$D\widetilde{p}' + A_1\widetilde{p} + A_6\widetilde{p} + A_7(\widetilde{p}, \widehat{y}) + F(\widetilde{p}, \widehat{u}) = G(\widehat{y}), \quad \widetilde{p}|_{t=0} = 0.$$

Нетрудно получить оценки

$$(A_1 y + A_6 y + F(y, \widehat{u}), y) \geq C_1\|y\|^2_{\mathbf{V}}, \quad |(A_7(y,\widehat{y}), y)| \leq C_2\|y\|^2_{\mathbf{H}},$$

из которых вытекает неравенство Гординга

$$(A_1 y + A_6 y + A_7(y,\widehat{y}) + F(y,\widehat{u}), y) \geq C_1\|y\|^2_{\mathbf{V}} - C_2\|y\|^2_{\mathbf{H}}.$$

Следовательно [17, теорема 1.2, с. 110], решение задачи (18) существует и единственно. □

Теорема 3. *Для любой оптимальной пары* $\{\widehat{y}, \widehat{u}\}$ *найдется единственный элемент* $p \in \mathbf{W}$ *такой, что*

$$D\widehat{y}' + A_1\widehat{y} + A_2\widehat{y} + A_3\widehat{y} + A_4\widehat{y} + F(\widehat{y}, \widehat{u}) = B\widehat{u} + f, \qquad y\big|_{t=0} = y_0,$$
$$-Dp' + A_1 p + A_6 p + A_7(p, \widehat{y}) + F(p, \widehat{u}) = G(\widehat{y}), \qquad p\big|_{t=T} = 0,$$
$$\int_0^T \int_\Gamma (\widehat{\varphi} - \theta_b^4) p_2 (u - \widehat{u})\, d\Gamma\, dt \le 0 \qquad \forall u \in U_{ad}.$$

Доказательство. Пусть $\{\widehat{y}, \widehat{u}\}$ — оптимальная пара, $u \in U_{ad}$. В силу леммы 2 найдется $g \in \mathbf{W}$ такой, что

$$Dg' + A_1 g + A_2 g + A_3 g + A_5(g, \widehat{y}) + F(g, \widehat{u}) + F(\widehat{y}, u - \widehat{u}) = B(u - \widehat{u}), \qquad g\big|_{t=0} = 0, \tag{19}$$

$$\int_0^T (\widehat{\theta} - \theta_d, g_1)\, dt \ge 0.$$

По лемме 3 найдется $p \in \mathbf{W}$ такой, что

$$-Dp' + A_1 p + A_6 p + A_7(p, \widehat{y}) + F(p, \widehat{u}) = G(\widehat{y}), \qquad p\big|_{t=T} = 0. \tag{20}$$

Умножим скалярно (19) на p, (20) на g, вычтем одно из другого и проинтегрируем по t. Воспользуемся тем, что

$$\int_0^T (Dg', p)\, dt = (Dg, p)\big|_0^T - \int_0^T (Dg, p')\, dt,$$

поэтому

$$\int_0^T (Dg', p)\, dt + \int_0^T (Dp', g)\, dt = 0.$$

Также

$$(A_1 g, p) = (A_1 p, g), \qquad (A_2 g, p) = (A_6 p, g), \qquad (F(g, \widehat{y}), p) = (F(p, \widehat{y}), g),$$
$$(A_3 g, p) + (A_5(g, \widehat{y}), p) = (A_7(p, \widehat{y}), g).$$

В итоге получаем

$$\int_0^T (F(\widehat{y}, u - \widehat{u}), p)\, dt = \int_0^T [(B(u - \widehat{u}), p) - (G(\widehat{y}), g)]\, dt.$$

Так как

$$\int_0^T (G(\widehat{y}), g)\, dt = \int_0^T (\widehat{\theta} - \theta_d, g_1)\, dt \ge 0,$$

то

$$\int_0^T [(F(\widehat{y}, u - \widehat{u}), p) - (B(u - \widehat{u}), p)]\, dt \le 0,$$

или

$$\int_0^T \int_\Gamma (u - \widehat{u})(\widehat{\varphi} - \theta_b^4) p_2 \, d\Gamma \, dt \le 0.$$

Теорема доказана. □

Выведем теперь принцип максимума для оптимальной пары. Докажем, что

$$(\widehat{\varphi} - \theta_b^4) p_2 (\xi - \widehat{u}) \le 0 \quad \forall \xi(x,t) \in [u_1(x,t), u_2(x,t)] \ \text{ п.в. на } \Sigma. \tag{21}$$

Предположим противное, что найдется функция $\xi_0(x,t) \in [u_1(x,t), u_2(x,t)]$, для которой

$$(\widehat{\varphi} - \theta_b^4) p_2 (\xi_0 - \widehat{u}) > 0 \ \text{ на } E \subset \Sigma, \ \ \mu(E) > 0.$$

Положим $u = \begin{cases} \xi_0, & x \in E, \\ \widehat{u}, & x \notin E. \end{cases}$ Очевидно, что $u \in U_{ad}$. Тогда

$$\int_0^T \int_\Gamma (u - \widehat{u})(\widehat{\varphi} - \theta_b^4) p_2 \, d\Gamma \, dt = \int_E (\xi_0 - \widehat{u})(\widehat{\varphi} - \theta_b^4) p_2 \, d\Gamma > 0.$$

Приходим к противоречию.

Замечание 2. Функции $p_1, p_2 \in W$ для заданных $\widehat{\theta}$ и $\widehat{u}$ являются слабыми решениями следующей сопряженной начально-краевой задачи:

$$\begin{gathered} -\partial p_1/\partial t - a\Delta p_1 - \mathbf{v} \cdot \nabla p_1 + 4\kappa_a \widehat{\theta}^3 (b p_1 - p_2) = \widehat{\theta} - \theta_d, \\ -\nu \partial p_2/\partial t - \alpha \Delta p_2 + \kappa_a (p_2 - b p_1) = 0 \text{ в } \Omega, \\ a\partial_n p_1 + (\beta + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) p_1 = 0, \qquad \alpha \partial_n p_2 + \widehat{u} p_2 = 0 \text{ на } \Gamma, \\ p_1\big|_{t=T} = 0, \quad p_2\big|_{t=T} = 0. \end{gathered}$$

Замечание 3. Из неравенства (21) вытекает аналог принципа bang-bang:

$$\widehat{u} = \begin{cases} u_1, & \text{если } (\widehat{\varphi} - \theta_b^4) p_2 < 0, \\ u_2, & \text{если } (\widehat{\varphi} - \theta_b^4) p_2 > 0. \end{cases}$$

Список литературы

[1] D. Clever, J. Lang, “Optimal control of radiative heat transfer in glass cooling with restrictions on the temperature gradient”, *Optimal Control Appl. Methods*, **33**:2 (2012), 157–175.

[2] M. Frank, A. Klar, R. Pinnau, “Optimal control of glass cooling using simplified P_N theory”, *Transport Theory Statist. Phys.*, **39**:2–4 (2010), 282–311.

[3] R. Pinnau, G. Thömmes, “Optimal boundary control of glass cooling processes.”, *Math. Methods Appl. Sci.*, **27**:11 (2004), 1261–1281.

[4] R. Pinnau, “Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modelled by the SP_1-system”, *Comm. Math. Sci.*, **5**:4 (2007), 951–969.

[5] G. Thömes, R. Pinnau, M. Seaïd, T. Götz, A. Klar, "Numerical methods and optimal control for glass cooling processes", *Trans. Theory Stat. Phys.*, **31**:4–6 (2002), 513–529.

[6] O. Tse, R. Pinnau, N. Siedow, "Identification of temperature dependent parameters in a simplified radiative heat transfer", *Aust. J. Basic Appl. Sci.*, **5**:1 (2011), 7–14.

[7] O. Tse, R. Pinnau, "Optimal control of a simplified natural convection-radiation model", *Commun. Math. Sci.*, **11**:3 (2013), 679–707.

[8] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, "Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive-convective-radiative heat transfer", *J. Math. Anal. Appl.*, **412**:1 (2014), 520–528.

[9] Г. В. Гренкин, А. Ю. Чеботарев, "Нестационарная задача сложного теплообмена", *Журн. вычисл. матем. физ.*, **54**:11 (2014), 1806–1816.

[10] Г. В. Гренкин, А. Ю. Чеботарев, "Устойчивость стационарных решений диффузионной модели сложного теплообмена", *Дальневост. матем. журн.*, **14**:1 (2014), 18–32.

[11] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, "An iterative method for solving a complex heat transfer problem", *Appl. Math. Comput.*, **219**:17 (2013), 9536–9362.

[12] А. Е. Ковтанюк, А. Ю. Чеботарев, "Стационарная задача сложного теплообмена", *Ж. вычисл. матем. физ.*, **54**:4 (2014), 191–199.

[13] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, "The unique solvability of a complex 3D heat transfer problem", *J. Math. Anal. Appl.*, **409**:2 (2014), 808–815.

[14] A. E. Kovtanyuk, A. Yu. Chebotarev, N. D. Botkin, K.-H. Hoffmann, "Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model", *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **20**:3 (2015), 776–784.

[15] M. F. Modest, *Radiative Heat Transfer*, Academic Press, 2003.

[16] D. A. Boas, *Diffuse photon probes of structural and dynamical properties of turbid media: theory and biomedical applications*, A Ph.D. Dissertation in Physics, University of Pennsylvania, 1996.

[17] Ж.-Л. Лионс, *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными*, Мир, М, 1972.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 9 июля 2014 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект №14-11-00079).

Grenkin G. V. Optimal control in a nonstationary complex heat transfer problem. Far Eastern Mathematical Journal. 2014. V. 14. № 2. P. 160–172.

ABSTRACT

The problem of optimal control of boundary properties for a nonstationary complex heat transfer problem is considered. The diffusion approximation of radiative transfer is used. The solvability of the optimal control problem is proved, necessary optimality conditions of the first order are obtained.

Key words: *optimal control, conductive-convective-radiative heat transfer, diffusion approximation.*