Дальневосточный математический журнал. 2014. Том 14. № 2. С. 173–190

УДК 539.3 514
MSC2010 74A05 53B50

© А. И. Гудименко, М. А. Гузев[1]

Геометрические аспекты изучения закона сохранения массы

Теория расслоенных пространств используется для представления закона сохранения массы в бескоординатной форме. Предлагается обобщенная формулировка этого закона и обсуждаются ее физические интерпретации.

Ключевые слова: *законы сохранения, расслоения, производная Ли, ковариантная производная.*

Введение

Проблема полного описания физико-механических свойств материалов, ставшая особенно актуальной в последние годы, осложняется непривычным поведением этих материалов в различных условиях. Усвоенные нами со студенческих лет представления о поведении материалов, такие ясные и понятные людям в течение веков, вдруг утрачивают свою стабильность и прозрачность, когда исследуются структурные свойства материалов, зависящие от характера их нагружения, предыстории и других факторов. Необходимость корректировки классических модельных представлений в механике сплошной среды связана, например, с попытками описать наличие в инженерных конструкциях внутренних самоуравновешенных напряжений, не исчезающих при снятии внешних нагрузок. Другим примером может служить проблема старения материалов: изменение их свойств со временем при внешних неизменных условиях.

Традиционный способ расширения модели основан на учете специфики рассматриваемого явления. Однако, избрав этот путь, исследователь становится ориентированным на «опыт-фаворит», поэтому применение развитого теоретического подхода для анализа новых экспериментальных ситуаций требует дополнительного рассмотрения. Один из путей решения этой проблемы основан на исследовании геометрической структуры моделей. Эта идея, восходящая еще к работам Клейна и Пуанкаре [1, 2], позволяет установить границы применимости классических моделей, указывая на возможные направления их модификации.

[1]Тихоокеанский океанологический институт им. В. И. Ильичева ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Балтийская, 43; Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: algud@poi.dvo.ru; guzev@iam.dvo.ru

Развитием общей геометрической теории применительно к моделям сплошной среды занимались многие исследователи. Еще Л. И. Седов [3] отмечал, что эту теорию можно «...уподобить и сравнить с общей геометрической теорией многомерных неевклидовых многообразий». Из числа последних работ отметим [4], в которой дано последовательное изложение начал механики сплошных сред с позиции геометрии расслоений с акцентом на инвариантность описания относительно выбора системы отсчета. Там же приведены ссылки на работы по геометрической теории сплошных сред.

Наша работа является одним из шагов реализации подхода [3], направленного на выяснение основных геометрических принципов, лежащих в основе построения моделей механики сплошных сред. Общего рецепта для геометрического конструирования новых моделей сформулировать нельзя. Однако мы сразу полагаем, что выполняются законы сохранения массы, импульса, момента импульса и энергии [5, 6]. Такое предположение с физической точки зрения является естественным требованием в плане согласования новой модели с классическими. Если сформулировать эти законы в бескоординатной форме, предлагаемой современной дифференциальной геометрией, то можно надеяться, что удастся выяснить, какие геометрические структуры лежат в основе этих законов.

Предложенный рецепт построения новой геометрической модели реализован в данной работе на примере закона сохранения массы. Среди всех законов сохранения он выделяется тем, что определен одним скалярным уравнением, поэтому естественно начать рассмотрение именно с этого закона.

Конкретно, в нашей работе предлагается вариант геометрической теории сплошных сред в части, касающейся описания кинематики и используемых полей (раздел 1). В рамках этого описания формулируется закон сохранения массы (раздел 2) и предлагается обобщение этого закона с иллюстрацией физическими примерами (раздел 3).

Остановимся на ключевых моментах предлагаемого исследования. Как и в работе [4], мы полагаем, что геометрические свойства закона сохранения массы адекватно выражаются в рамках представления о пространстве-времени как расслоении [7], составленном из пространств одновременных событий над интервалом времени и снабженном метрикой на этих слоях (раздел 1.1). Такое понимание пространства-времени в механике восходит, по-видимому, еще к Г. Лейбницу (см. ссылки в работе [8]) и с тех пор развивалось многими авторами (см., например, работы [9–14]). Интерес механиков к такому представлению обусловлен отчасти тем, что в его рамках естественным образом описывается кинематика сплошной среды, в частности, — понятие системы отсчета (раздел 1.4) [4,15]. Геометрические структуры, необходимые для описания кинематики, — это проектируемые, в том числе вертикальные, векторные поля (раздел 1.2) и связность (раздел 1.3) [7].

Отметим, что вертикальные тензорные поля играют в геометрической теории одну из центральных ролей [4]. Каждое такое поле представляет собой семейство обычных тензорных полей на слоях пространства-времени, параметризованное точками временного интервала. Например, такие известные геометрические объекты, как пространственные метрика и элемент объема [16, 17], используемые для формулировки закона сохранения массы, являются в этой модели вертикальными тензорными полями, в частности, элемент объема является вертикальной формой (раздел 1.2).

Однако при формулировке закона сохранения массы в рамках четырехмерного описания сплошной среды возникает трудность. Напомним, что в обычной формулировке этого закона используется пространственный элемент объема, выраженный координатно-инвариантной 3-формой, а сам закон формулируется как инвариантность массы, заключенной в этом объеме, при движении среды. Но в классическом пространстве-времени, в отличие от релятивистской модели, не существует элемента объема в общем случае, поскольку не определена метрика. В данной работе эта трудность преодолевается переходом к специальной 4-форме на пространстве-времени, инвариантной относительно расслоенных координатных преобразований (раздел 1.5). При таком подходе введенная форма может рассматриваться как четырехмерный аналог пространственного элемента объема. Отметим, что идея использовать эту специальную 4-форму в пространстве-времени как аналог пространственного элемента объема применялась другими авторами (см., например, [18]).

Мы формулируем закон сохранения массы в бескоординатном виде, что обеспечивает независимость описания сплошной среды от системы отсчета (frame-free description). Преимущества использования такого подхода были указаны еще в [19] и последовательно утверждаются авторами работы [4] (см. ссылки в этой работе). Использование бескоординатной формы позволяет гарантировать выполнение законов сохранения для сплошной среды без априорных представлений о ее пространственно-временной структуре.

Полученная нами бескоординатная форма более адекватно в сравнении с известной формулировкой [5, 20] выражает геометрическую структуру закона сохранения массы. В частности, используемая в этом законе производная Ли допускает естественное обобщение посредством ее замены на ковариантную производную Ли [21] (раздел 3.1). В работе указаны физические приложения обобщенной формулировки закона сохранения массы, связанные с исследованием поведения сплошной среды на подмногообразиях пространства-времени (раздел 3.2).

1. Геометрическая модель сплошной среды

1.1. Пространственно-временной континуум

Будем описывать сплошную среду в рамках пространственно-временного континуума, который будем представлять как расслоение $\pi\colon X \to \mathbb{R}$, где X — ориентируемое многообразие, интерпретируемое как пространство событий, и π — отображение, ставящее в соответствие каждому событию $x \in X$ момент времени $\pi(x)$, когда оно произошло. В теории расслоений [7, 22] многообразие X называют *пространством расслоения*, π — *проекцией* и $\mathbb{R}$ — *базой расслоения* $\pi\colon X \to \mathbb{R}$. Наглядно расслоение $\pi\colon X \to \mathbb{R}$ представляется в виде семейства слоев $\pi^{-1}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, как показано на рис. 1.

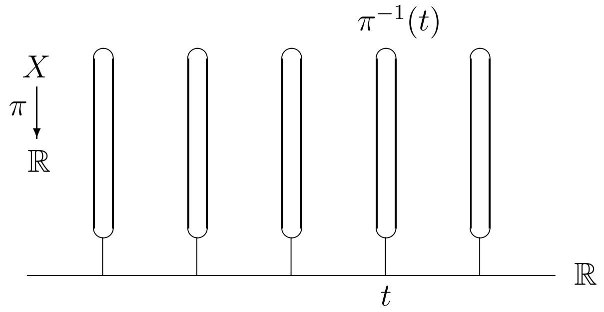

Рис. 1. Пространство-время как расслоение

Расслоение $\pi\colon X \to \mathbb{R}$ является *тривиальным* [22], то есть существует многообразие S и диффеоморфизм $\psi\colon X \to \mathbb{R}\times S$, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{R}\times S \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd},$$

где pr_1 — проекция на первый множитель. Многообразие S называется *типичным слоем* расслоения π, диффеоморфизм ψ — *тривиализацией* этого расслоения.

Структура расслоения обусловливает использование специальных координат на X. Координатная система $\chi\colon U \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ на X называется *адаптированной*, если существует координатная система $\bar{\chi}\colon \pi(U) \to \mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$, такая, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ \pi(U) \arrow[r, "\bar{\chi}"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}.$$

В компонентах χ представляется четверкой (t, x^i), $i = 1, 2, 3$. В данной работе мы будем считать, что $\bar{\chi}$ определяется правилом $\bar{\chi}(t) = t + \tau$ для некоторого $\tau \in \mathbb{R}$. При таком ограничении произвольное преобразование адаптированных координат $(t, x^i) \to (t', x^{i'})$ имеет вид

$$t = t' + \tau, \quad x^i = x^i(t', x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}).$$

Будем ссылаться на такие адаптированные координаты просто как на *координаты* на X. Учитывая ориентируемость X, будем использовать только координаты, согласованные с выбранной ориентацией.

1.2. Ассоциированные расслоения

С пространством расслоения X как гладким многообразием ассоциированы тензорные расслоения над X [7, 17]. Они реализуются как всевозможные тензорные произведения над X (то есть послойные тензорные произведения) касательного

$\tau_X\colon TX \to X$ и кокасательного $\tau_X^*\colon T^*X \to X$ расслоений. Среди тензорных расслоений над X выделим расслоение $\bigwedge^p T^*X \to X$ — p-кратное альтернированное произведение расслоений τ_X^* [7]. Сечение тензорного расслоения, то есть гладкое отображение X в пространство тензорного расслоения, при котором каждому $x \in X$ отвечает тензор в x, называется *тензорными полем* на X. В частности, сечение $X \to TX$ называется *векторным полем*, а сечение $X \to \bigwedge^p T^*X$ — *p-формой* на X. В координатах (t, x^i) произвольное векторное поле u имеет вид

$$u = u^0 \frac{\partial}{\partial t} + u^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

а произвольная p-форма α —

$$\alpha = a_0 dt + a_I dx^I,$$

где $I = i_1 \ldots i_p$ — мультииндекс, $dx^I = dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$ (символ $\wedge$ обозначает внешнее умножение форм).

В качестве примера тензорных полей на X укажем на проектируемые векторные поля и форму времени. Векторное поле u на X называется *проектируемым* [7], если оно *проектируется* на некоторое векторное поле на базе $\mathbb{R}$, то есть если коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{u} & TX \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_*} \\ \mathbb{R} & \longrightarrow & T\mathbb{R} \end{array},$$

где π_* — дифференциал отображения π. В координатах проектируемое векторное поле u характеризуется тем, что его временной коэффициент u^0 зависит только от времени. *Форма времени* определяется как 1-форма $\theta = \pi^*(dt)$, где π^* — индуцированное проекцией π отображение форм (pull-back of differential forms), переводящее формы на $\mathbb{R}$ в формы на X, и dt — каноническая 1-форма на $\mathbb{R}$. В произвольных координатах (t, x^i) форма времени имеет вид $\theta = dt$.

С расслоением $\pi\colon X \to \mathbb{R}$ ассоциирован также класс вертикальных тензорных расслоений над X [7] — всевозможных тензорных произведений над X вертикальных касательного $VX \to X$ и кокасательного $V^*X \to X$ расслоений. Пространство *вертикального касательного расслоения* $VX \to X$ образовано *вертикальными векторами* из TX, то есть такими векторами $v \in TX$, для которых $\pi_*(v) = 0$. Вертикальные векторы характеризуются также тем, что они касаются слоев расслоения. *Вертикальное кокасательное расслоение* $V^*X \to X$ определяется как расслоение, дуальное к касательному расслоению $VX \to X$. Сечения вертикальных тензорных расслоений называются *вертикальными тензорными полями.*

В качестве примера вертикальных тензорных полей на X укажем на *вертикальные векторные поля* — сечения вертикального касательного расслоения. Каждое такое поле является проектируемым векторным полем, и в координатах его временная компонента равна нулю. Другими примерами являются *вертикальная риманова метрика*

$$g\colon X \to V^*X \underset{X}{\otimes} V^*X$$

(риманова метрика на слоях) и ассоциированный с ней и выбранной ориентацией *вертикальный элемент объема* $\omega\colon X \to \bigwedge^3 V^*X$, для которого в координатах имеем формулу

$$\omega = \sqrt{|g|}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \quad |g| = \det(g_{ij}). \tag{1}$$

1.3. Связность

Вертикальное касательное расслоение $VX \to X$ в общем случае не имеет выделенного дополнительного к нему расслоения «горизонтальных касательных векторов». Опишем конструкцию, определяющую такое расслоение [7, 22].

Определим расслоение $X \times_{\mathbb{R}} T\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ как декартово произведение над $\mathbb{R}$ расслоения $\pi\colon X \to \mathbb{R}$ и касательного расслоения $\tau_{\mathbb{R}}\colon T\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Имеется естественный морфизм расслоений над X

$$\pi_T\colon TX \to X \times_{\mathbb{R}} T\mathbb{R},$$

который каждому вектору $u \in TX$ ставит в соответствие пару $(\tau_X(u), \pi_*(u))$, состоящую из точки приложения вектора и его проекции на ось времени. *Связностью* на π называется морфизм векторных расслоений над X

$$\Gamma\colon X \times_{\mathbb{R}} T\mathbb{R} \to TX \tag{2}$$

такой, что

$$\pi_T \circ \Gamma = \mathrm{id}, \tag{3}$$

где, напомним, символ $\circ$ обозначает операцию композиции отображений, а символ id — тождественное отображение.

Образ морфизма (2) является одномерным распределением, трансверсальным к слоям расслоения $\pi\colon X \to \mathbb{R}$. Вместе с естественной проекцией на X он образует расслоение $HX \to X$, которое называется *горизонтальным касательным расслоением.* При этом

$$TX = HX \oplus_X VX, \tag{4}$$

то есть касательное пространство в каждой точке $x \in X$ разлагается в прямую сумму его вертикального и горизонтального касательных подпространств.

Из определения связности (2), (3) следует, что она однозначно характеризуется как способ «поднятия» (горизонтальный лифт) векторных полей с базы $\mathbb{R}$ на пространство расслоения X. В координатах горизонтальный лифт задается отображением

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t} + h^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{5}$$

функции h^i называются *коэффициентами связности.*

В силу (5) со связностями на расслоении $\pi\colon X \to \mathbb{R}$ можно работать через их представителей — векторные поля h на X, проекция которых на базу совпадает с каноническим векторным полем $\partial/\partial t$. Такие векторные поля назовем *нормированными.* В координатах они представляются в виде

$$h = \frac{\partial}{\partial t} + h^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

то есть временной коэффициент в координатном разложении этих полей равен единице. В терминах нормированных векторных полей разложение (4) читается так: при заданном нормированном векторном поле h на X любое нормированное векторное поле u на X представляется в виде суммы $u = h + v$ для некоторого вертикального векторного поля v на X. Правило сложения векторных полей в отдельной точке иллюстрирует рис. 2.

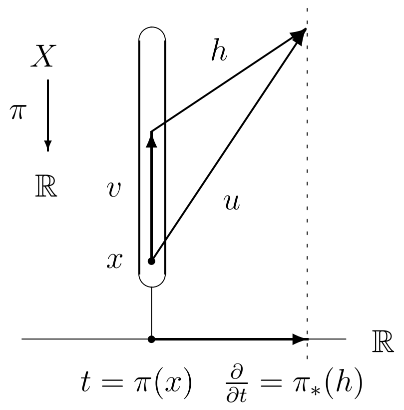

Рис. 2. Соотношение нормированных и вертикальных векторных полей

1.4. Поля скоростей и системы отсчета

С позиции рассматриваемого геометрического описания сплошной среды связность и вертикальное векторное поле на расслоении $\pi\colon X \to \mathbb{R}$ интерпретируются как система отсчета на X [15] и поле относительных скоростей сплошной среды соответственно. Один из аргументов в оправдание такой интерпретации состоит в том, что в ее рамках естественным образом определяется поле абсолютных скоростей сплошной среды — так же, как связность на указанном расслоении.

Напомним, что поле скоростей сплошной среды всегда определяется по отношению к системе отсчета, то есть является полем относительных скоростей. При переходе от одной системы отсчета к другой новое поле относительных скоростей складывается из старого и поля относительных скоростей систем отсчета. Данное утверждение составляет содержание *классического закона преобразования скоростей.* Если обозначить h и h' — нормированные векторные поля, ассоциированные с выбранными системами отсчета (см. предыдущий раздел), и v и v' — соответствующие поля относительных скоростей сплошной среды, то указанный закон выражается соотношением $v' = v + h - h'$. Это соотношение показывает, что нормированное векторное поле $u = h + v$ (см. рис. 2) инвариантно относительно выбора системы отсчета. Назовем это поле *полем абсолютных (4-)скоростей* сплошной среды. Поле h при этом будем называть *полем отсчетных (4-)скоростей.*

Таким образом, при рассматриваемой интерпретации связности и вертикального векторного поля естественным образом определяется понятие поля абсолютных скоростей сплошной среды. При этом соблюдается классический закон преобразования скоростей. Отметим, что говорить об абсолютных скоростях в рамках классической трехмерной картины мира, где время выступает в качестве параметра, проблематично.

1.5. Вертикальные формы

В предлагаемой ниже формулировке закона сохранения массы используется вертикальный элемент объема ω, определенный формулой (1). Обсудим правила работы с этой формой как с произвольной вертикальной формой.

Напомним, что вертикальной p-формой на X, $p = 0, 1, 2, 3$, называется произвольное сечение $\beta\colon X \to \bigwedge^p V^*X$. В координатах (t, x^i) такая форма записывается в виде $\beta = b_I dx^I$, причем координатные вертикальные формы dx^i понимаются как ограничения соответствующих координатных форм на X на вертикальные векторные поля.

Над вертикальными формами определены операции сложения, внешнего умножения $\wedge$, производной Ли L_u вдоль проектируемого векторного поля u, внутреннего умножения $v\rfloor$ на вертикальное векторное поле v и внешнего дифференцирования d. За определения этих операций можно принять известные [23] для обычных форм тождества

$$(\beta \wedge \gamma)(v_1, \dots, v_{p+q}) = \sum_{\substack{\sigma(1)<\dots<\sigma(p)\\ \sigma(p+1)<\dots<\sigma(p+q)}} \epsilon_\sigma \beta(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)})\gamma(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)}), \tag{6}$$

$$(L_u\beta)(v_1, \dots, v_p) = u\beta(v_1, \dots, v_p) - \sum_{i=1}^{p} \beta(v_1, \dots, [u, v_i], \dots, v_p), \tag{7}$$

$$(v\rfloor\, \beta)(v_1, \dots, v_{p-1}) = \beta(v, v_1, \dots, v_{p-1}), \tag{8}$$

$$\begin{aligned}(d\beta)(v_0, v_1, \dots, v_p) = &\sum_{i=0}^{p} (-1)^i v_i \beta(v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \beta([v_i, v_j], v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_p),\end{aligned} \tag{9}$$

где β и γ — вертикальная p- и q-форма соответственно, v, v_i, $i = 0, 1, \dots,$ — вертикальные векторные поля, u — проектируемое векторное поле, ϵ_σ — сигнатура перестановки σ набора $(1, 2, \dots, p+q)$. Заметим, что определение производной Ли формы вдоль проектируемого векторного поля (формула (7)) корректно, так как скобка Ли $[u, v_i]$ проектируемого и вертикального векторных полей является вертикальным векторным полем [7].

Покажем, что вертикальные формы характеризуются как классы эквивалентности обычных форм. Рассмотрим совокупность $\mathcal{I}$ всех форм на X, которые аннулируются вертикальным касательным распределением VX, или, иначе, — всеми вертикальными векторными полями на X. Эта совокупность замкнута относительно вычитания и умножения на формы на X, то есть образует *идеал* в пространстве всех форм на X.

Лемма 1. *Идеал $\mathcal{I}$ обладает следующими свойствами.*

1) Он порождается формой времени θ, то есть любой элемент α идеала имеет вид $\alpha = \theta \wedge \gamma$ для некоторой формы γ на X.

2) Если $\theta \wedge \alpha = 0$, то $\alpha \in \mathcal{I}$.

3) Идеал $\mathcal{I}$ замкнут относительно производной Ли вдоль проектируемого векторного поля, внутреннего умножения на вертикальное векторное поле и внешнего дифференцирования.

Доказательство. Доказательство свойств 1 и 2 можно найти, например, в [24], там, где обсуждается теорема Фробениуса. Свойство 3 проверяется непосредственно с использованием тождеств (7), (8) и (9). □

Над классами вычетов $[\alpha]$ форм на X по модулю $\mathcal{I}$ в соответствии с правилами

$$\begin{gathered}[\alpha] + [\gamma] = [\alpha + \gamma], \quad [\alpha] \wedge [\gamma] = [\alpha \wedge \gamma], \\ L_u[\alpha] = [L_u \alpha], \quad v \rfloor [\alpha] = [v \rfloor \alpha], \quad d[\alpha] = [d\alpha]\end{gathered} \tag{10}$$

определены те же операции, что и указанные выше для вертикальных форм. Более того, каждый класс вычетов можно рассматривать как вертикальную форму, полагая $[\alpha] = \alpha$ на вертикальных векторных полях. Наоборот, если β — вертикальная форма, то $\beta = [\alpha]$, где α — произвольное расширение формы β. Ясно, что одноименные операции над вертикальными формами как отображениями (формулы (6)–(9)) и как классами вычетов (формулы (10)) совпадают.

Следующее утверждение показывает, что существует естественная биекция между вертикальными формами на X и формами вида $\theta \wedge \alpha$, где α — произвольная форма на X.

Утверждение 1. *Для каждой вертикальной p-формы $[\alpha]$ выражение*

$$\theta \wedge [\alpha] = \theta \wedge \alpha \tag{11}$$

корректно определяет $(p+1)$-форму $\theta \wedge [\alpha]$. Соответствие $[\alpha] \to \theta \wedge [\alpha]$ инъективно.

Доказательство. Из свойств 1 и 2 идеала $\mathcal{I}$ следует, что класс вычетов $[\alpha]$ состоит в точности из элементов γ, для которых $\theta \wedge \alpha = \theta \wedge \gamma$. □

В заключение раздела обсудим понятие производной Ли вертикальной формы вдоль нормированного векторного поля. Такая производная была определена формулой (7) и однозначно охарактеризована как класс эквивалентности производных Ли обычных форм (см. (10)). Для полноты укажем еще на ее определение в терминах потока.

Напомним, что производной Ли формы α на X вдоль векторного поля u на X называется выражение

$$L_u \alpha = \frac{d}{d\tau}\Big|_{\tau=0} \phi_\tau^*(\alpha) = \lim_{\tau \to 0} \frac{\phi_\tau^*(\alpha) - \alpha}{\tau}, \tag{12}$$

где ϕ_τ — поток поля u. Прямое применение правила (12) к вертикальным формам невозможно, так как операция ϕ_τ^* в общем случае не определена для вертикальных форм. Однако если ϕ_τ — поток проектируемого векторного поля, то ϕ_τ как послойный локальный диффеоморфизм переводит вертикальные векторные поля в вертикальные [7], и определено действие ϕ_τ^* на вертикальные формы:

$$(\phi_\tau^*\beta)(v,\ldots,w)=\beta(\phi_{\tau*}(v),\ldots,\phi_{\tau*}(w)).$$

Таким образом, правило (12) применимо и к вертикальным формам и может выступать в качестве определения соответствующей производной Ли.

Отметим, что рассматриваемая производная Ли обладает рядом свойств обычной производной Ли. В частности, она удовлетворяет правилу Лейбница и перестановочна с дифференциалом. Однако для нее нарушается известное тождество [17]

$$L_u=u\rfloor\circ d+d\circ u\rfloor, \tag{13}$$

которое выражает производную Ли в виде антикоммутатора операторов внешнего дифференцирования и внутреннего умножения.

Следующее утверждение устанавливает связь производной Ли вертикальной формы с классической производной Ли в случае, когда эти производные берутся вдоль нормированного векторного поля.

Утверждение 2. *Пусть u — нормированное векторное поле. Тогда для любой вертикальной формы β*

$$L_u(\theta\wedge\beta)=\theta\wedge L_u\beta. \tag{14}$$

Доказательство. Положим $\beta=[\alpha]$. Справедлива цепочка равенств

$$L_u(\theta\wedge[\alpha])=L_u(\theta\wedge\alpha)=\theta\wedge L_u\alpha=\theta\wedge[L_u\alpha]=\theta\wedge L_u[\alpha],$$

где первое и третье равенства выполнены в силу (11), второе — согласно правилу Лейбница, четвертое — по определению производной Ли из (10). □

2. Бескоординатная формулировка закона сохранения массы

2.1. Классическая форма записи закона сохранения массы

При классическом описании сплошной среды пространственно-временной континуум представляется как расслоение $\mathrm{pr}_1\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ с естественной интерпретацией $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^3$ как евклидовых пространств. Движение среды описывается полем v ее относительных скоростей по отношению к канонической системе отсчета (то есть системе отсчета, заданной естественными горизонтальными направлениями) [5]. В этой системе в канонических координатах пространственные компоненты полей абсолютных u и относительных v скоростей среды совпадают. Пространственные компоненты потока поля u,

$$t=t_0+\tau,\quad x^i=x_\tau^i(t_0,x_0^1,x_0^2,x_0^3), \tag{15}$$

описывают закон изменения во времени канонических координат материальных точек, то есть (x^i) и (x_0^i) интерпретируется как координаты текущего и начального положения материальной точки соответственно.

Закон сохранения массы представляет собой требование сохранения элемента массы среды относительно преобразований (15):

$$\rho\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = \rho_0\, dx_0^1 \wedge dx_0^2 \wedge dx_0^3, \tag{16}$$

где ρ и ρ_0 — соответственно текущая и начальная плотность среды.

Закон сохранения массы записывают в материальной и пространственной формах [20]. Первая форма представления закона следует из уравнения (16), если в нем перейти к координатам начального состояния. Тогда

$$\rho \det \left(\frac{\partial x^i}{\partial x_0^j} \right) = \rho_0 \tag{17}$$

или

$$\rho \sqrt{|g|} = \rho_0, \qquad |g| = \det \left(\frac{\partial x^k}{\partial x_0^i} \frac{\partial x^k}{\partial x_0^j} \right). \tag{18}$$

Вторую форму представления закона получаем как результат дифференцирования по t уравнения (17) при постоянных переменных x^i. Это приводит к известной формуле

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^i}{\partial x^i} = 0. \tag{19}$$

В произвольных координатах уравнение (19) может быть записано в виде

$$\frac{\partial \sqrt{|g_e|}\rho}{\partial t} + \frac{\partial \sqrt{|g_e|}\rho u^i}{\partial x^i} = 0, \tag{20}$$

где g_e — евклидова метрика. Такая форма записи инвариантна относительно преобразований

$$t = t' + \tau \quad x^i = x^i(t', x^{1'}, x^{3'}, x^{3'}),$$
$$u^i = \frac{\partial x^i}{\partial t'} + u^{i'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}.$$

2.2. Формулировка закона сохранения массы в терминах производной Ли

Рассмотрим уравнение

$$L_u(\theta \wedge \mu) = 0, \tag{21}$$

где u — нормированное векторное поле на X, $\mu = \rho\omega$, ρ — функция на X, ω — вертикальный элемент объема (1). Подчеркнем, что форма $\theta \wedge \mu$ определена в соответствии с формулой (11), а не является классическим внешним умножением θ на μ, так как это умножение не определено, когда один операнд — форма, а второй — вертикальная форма. Мы утверждаем, что уравнение (21) адекватно выражает закон сохранения массы сплошной среды, если u интерпретировать как поле абсолютных 4-скоростей сплошной среды, а ρ — как плотность среды (для этого, вообще говоря, функция ρ должна быть неотрицательной). Основанием этому служит следующее утверждение.

Утверждение 3. *В произвольных координатах (t, x^i) уравнение (21) имеет вид*

$$\frac{\partial\sqrt{|g|}\rho}{\partial t} + \frac{\partial\sqrt{|g|}\rho u^i}{\partial x^i} = 0, \tag{22}$$

который совпадает с классическим выражением (20) для закона сохранения массы, если в качестве пространственно-временного континуума $\pi\colon X \to \mathbb{R}$ выступает расслоение $\mathrm{pr}_1\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, а в качестве вертикальной римановой метрики g на X — евклидова метрика на $\mathbb{R}^3$.

Доказательство. Воспользуемся представлением (13) для производной Ли. Имеем $d\mu = 0$ и

$$u\rfloor\,\mu = \rho\sqrt{|g|}[dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3 + dt\wedge(-u^1dx^2\wedge dx^3 + u^2dx^1\wedge dx^3 - u^3dx^1\wedge dx^2)],$$

$$d(u\rfloor\,\mu) = \left(\frac{\partial\sqrt{|g|}\rho}{\partial t} + \frac{\partial\sqrt{|g|}\rho u^i}{\partial x^i}\right) dt\wedge dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3. \tag{23}$$

Приравнивая выражение (23) к нулю, получаем (22). □

Заметим, что в координатах, согласованных с u, то есть при $u = \partial/\partial t$, выражение (22) после интегрирования по t дает материальную форму (18) закона сохранения массы.

2.3. Формулировка закона сохранения массы в терминах полной производной

Формулировку закона сохранения массы (21) естественно назвать *четырехмерной*, так как время, хотя и выделено, рассматривается как координата на X. Между тем в классической механике время рассматривается как параметр и формулировка закона сохранения массы естественным образом является трехмерной. Покажем, как в рамках рассматриваемого геометрического описания сплошной среды реализуется трехмерная формулировка закона сохранения массы.

Сформулируем сначала этот закон в терминах производной Ли вертикальной формы. Для этого просто применим тождество (14) к уравнению (21) и получим

$$L_u\mu = 0,$$

то есть производная Ли вертикальной формы μ вдоль поля абсолютных скоростей сплошной среды равна нулю.

Переходя к трехмерной формулировке закона сохранения массы, обсудим с позиции рассматриваемого геометрического подхода известное в механике понятие полной производной. Зададим систему отсчета h и будем рассматривать только согласованными с h координаты, то есть такие координаты (t, x^i) на X, относительно которых $h = \partial/\partial t$. Тогда корректно определен оператор $\partial/\partial t|_h$, действующий на вертикальных формах $\beta = b_I dx^I$ по правилу

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_h \beta = \frac{\partial \beta_I}{\partial t}\, dx^I.$$

При этом очевидно $\partial/\partial t|_h = L_h$, и из соотношения $u = h + v$, связывающего поля абсолютных, отсчетных и относительных скоростей сплошной среды, следует

$$L_u = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_h + L_v. \tag{24}$$

Слева в равенстве (24) стоит производная Ли вертикальной формы вдоль поля 4-скоростей, справа — сумма производной по времени и обычной трехмерной производной Ли. Время в обоих слагаемых выступает как параметр. Выражение (24) соответствует классической полной производной.

В терминах оператора (24) закон сохранения массы записывается в виде

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_h \mu + L_v \mu = 0.$$

3. Обобщенная формулировка закона сохранения массы

3.1. Ковариантная производная Ли

Покажем, что классическая производная Ли формы допускает естественное обобщение. Будем исходить из соотношения

$$(L_u \alpha)(u_1, \ldots, u_p) = L_u \alpha(u_1, \ldots, u_p) - \sum_{i=1}^{p} \alpha(u_1, \ldots, [u, u_i], \ldots, u_p), \tag{25}$$

которое сводит вычисление производной Ли p-формы к вычислению производной Ли функции. Это соотношение уже использовалось (см. формулу (7)) для определения производной Ли вертикальной формы. Заменим в формуле (25) производную Ли функции $f = \alpha(u_1, \ldots, u_p)$ выражением

$$L_u^{\nabla} f = u \rfloor (df + \Gamma f),$$

где Γ — произвольная 1-форма на X. Тогда в соответствии с (25) получим оператор L_u^{∇} на формах, который назовем *ковариантной производной Ли* формы вдоль векторного поля u.

Непосредственно из определения ковариантной производной Ли следует соотношение

$$L_u^{\nabla} \alpha = L_u \alpha + (u \rfloor \Gamma) \wedge \alpha. \tag{26}$$

Наряду с ковариантной производной Ли L_u^∇ введем в рассмотрение оператор d^∇ на формах, полагая

$$d^\nabla \alpha = d\alpha + \Gamma \wedge \alpha, \tag{27}$$

и назовем его *ковариантным внешним дифференциалом.*

Отметим ряд свойств введенных операторов.

Лемма 2. *Для произвольных форм α и γ и векторных полей u и h на X имеем*

$$\begin{gathered} L_u^\nabla(\alpha \wedge \gamma) = L_u^\nabla \alpha \wedge \gamma + \alpha \wedge L_u \gamma, \\ d^\nabla(\alpha \wedge \gamma) = d^\nabla \alpha \wedge \gamma + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d\gamma, \\ L_u^\nabla = u\rfloor \circ d^\nabla + d^\nabla \circ u\rfloor, \\ [L_u^\nabla, L_h^\nabla]\alpha = L_{[u,h]}^\nabla \alpha + d\Gamma(u,h) \wedge \alpha, \quad [L_u^\nabla, d^\nabla]\alpha = (u\rfloor\, d\Gamma) \wedge \alpha, \\ d^\nabla d^\nabla \alpha = d\Gamma \wedge \alpha, \end{gathered} \tag{28}$$

где скобки $[,]$ обозначают коммутатор операторов.

Эти свойства следуют из соотношений (26), (27) и свойств классических производной Ли и внешнего дифференциала. Доказательство в более общей ситуации можно найти в [21].

В работе [21] оператор на функциях $\nabla_u = L_u^\nabla$ называется *законом дифференцирования*, а соответствующая этому оператору 2-форма $d\Gamma$ — *формой кривизны* этого закона. При кривизне, равной нулю, указанные в лемме свойства превращаются в известные свойства классических производной Ли и внешнего дифференциала [23].

3.2. Обобщенная формулировка закона сохранения массы

Обобщенная формулировка закона сохранения массы получается из формулировки (21) заменой классической производной Ли на ковариантную:

$$L_u^\nabla(\theta \wedge \mu) = 0. \tag{29}$$

С учетом соотношения (26) уравнение (29) записывается в виде

$$L_u(\theta \wedge \mu) + (u\rfloor\, \Gamma) \wedge \theta \wedge \mu = 0$$

или в координатах

$$\frac{\partial \sqrt{|g|}\rho}{\partial t} + \frac{\partial \sqrt{|g|}\rho u^i}{\partial x^i} + \sqrt{|g|}\rho u\rfloor\, \Gamma = 0, \tag{30}$$

где

$$u\rfloor\, \Gamma = \Gamma_0 + u^i \Gamma_i.$$

При рассмотрении обобщенной формулировки закона сохранения массы естественно выделяется случай, когда форма Γ — точная. Тогда, полагая $\Gamma = d\ln f$, с помощью соотношений (26) и (28) находим

$$L_u^\nabla(\theta \wedge \mu) = f^{-1} L_u(\theta \wedge f\mu),$$

откуда следует, что обобщенная формулировка закона сохранения массы (29) эквивалентна классической с заменой μ на $f\mu$.

В физических приложениях обобщенная формулировка закона сохранения массы (30) возникает, например, когда на поток налагаются кинематические ограничения и обычное уравнение закона сохранения массы (21) «факторизуется» по ним. Иначе говоря, такая формулировка возникает при редукции обычного уравнения закона сохранения массы с четырехмерного пространства-времени на многообразия меньшей размерности.

Если ограничения *голономные*, то есть задаются интегрируемыми распределениями на пространстве-времени, то в редуцированном уравнении форма Γ оказывается точной. Так получаются, в частности, известные уравнения закона сохранения массы для волн в каналах, жидкости в трубке [25] и мелкой воды. Проиллюстрируем сказанное выводом закона сохранения массы для модели мелкой воды.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ слой жидкости плотности ρ, ограниченный снизу поверхностью дна, а сверху — свободной поверхностью (рис. 3).

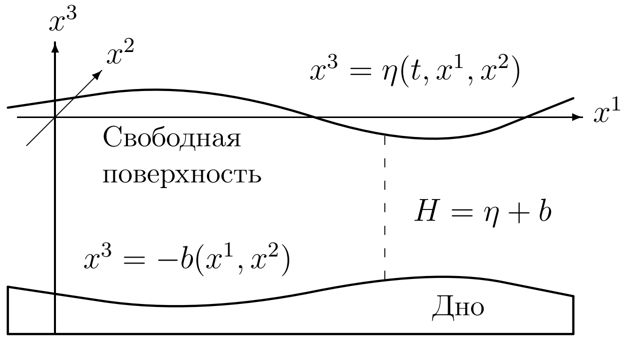

Рис. 3. Вертикальный профиль слоя жидкости

Обозначим u^i компоненты скорости потока жидкости в натуральных координатах на $\mathbb{R}^3$. Наложим на поток граничные условия на свободной поверхности

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t} - u^1 \frac{\partial \eta}{\partial x^1} - u^2 \frac{\partial \eta}{\partial x^2} + u^3 = 0$$

и на дне

$$u^1 \frac{\partial b}{\partial x^1} + u^2 \frac{\partial b}{\partial x^2} + u^3 = 0.$$

Эти условия означают, что жидкость не пересекает граничные поверхности, и играют роль кинематических ограничений на поток жидкости.

Для получения закона сохранения массы проинтегрируем обе части уравнения (19) по переменной x^3 в пределах от нижней границы жидкости до свободной поверхности. С учетом граничных условий получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{-b}^{\eta} \rho \, dx^3 + \frac{\partial}{\partial x^1} \int\limits_{-b}^{\eta} \rho u^1 \, dx^3 + \frac{\partial}{\partial x^2} \int\limits_{-b}^{\eta} \rho u^2 \, dx^3 = 0. \tag{31}$$

Введем усредненные плотность и горизонтальные компоненты скорости:

$$\bar{\rho} = \frac{1}{H}\int\limits_{-b}^{\eta} \rho\, dx^3, \quad \bar{u}^i = \frac{1}{H\bar{\rho}}\int\limits_{-b}^{\eta} \rho u^i\, dx^3, \quad i = 1, 2.$$

Тогда уравнение (31) примет вид

$$\frac{\partial H\bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial H\bar{\rho}\bar{u}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial H\bar{\rho}\bar{u}^2}{\partial x^2} = 0,$$

или

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}\bar{u}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \bar{\rho}\bar{u}^2}{\partial x^2} + \bar{\rho}\bar{u} \rfloor d\ln H = 0. \tag{32}$$

Уравнение (32) по форме совпадает с уравнением (30), но имеет размерность на единицу меньше. При этом форма $\Gamma = d\ln H$ является точной.

Обсуждение

В соответствии с поставленной задачей о бескоординатной формулировке закона сохранения массы в работе рассмотрены три такие формулировки: четырехмерная в терминах обычной производной Ли (раздел 2.2), «промежуточная» в терминах производной Ли вертикальной формы и трехмерная в терминах полной производной (раздел 2.3).

Мы указали на основные геометрические структуры, которые составляют формальный каркас этого закона. К эти структурам можно отнести, в частности, специальную 4-форму на расслоенном пространстве-времени — четырехмерный аналог обычного элемента объема пространства, специальное векторное поле (поле 4-скоростей абсолютного движения среды), определяющее связь слоев расслоения пространства-времени, и производную Ли. Отметим, что указанная 4-форма строится, в свою очередь, из вертикальной формы объема, включающей пространственную метрику, и формы времени. Если обратиться к формуле Картана (13), представляющей производную Ли как антикоммутатор операций внутреннего умножения на векторное поле и внешнего дифференцирования, то эти операции также можно отнести к геометрическим составляющим закона сохранения массы.

Анализ отмеченных составляющих показывает, что некоторые из них могут быть обобщены без нарушения общей структуры закона. В данной работе мы указали на естественное обобщение для производной Ли и внешнего дифференциала посредством замены их на ковариантные аналоги (раздел 3.1). Оказывается, что полученная обобщенная форма записи закона сохранения массы встречается в физических приложениях. В работе приведен пример (раздел 3.2) из геофизический гидродинамики. Однако найденный пример соответствует лишь случаю, когда форма Γ, определяющая ковариантное дифференцирование (26), (27), является точной.

Список литературы

[1] Ф. Клейн, *Лекции о развитии математики в XIX столетии*, ОНТИ, М.-Л., 1998.

[2] А. Пуанкаре, *О науке*, Наука, М., 1990.

[3] Л. И. Седов, “Математические методы построения новых моделей сплошных сред”, *УМН*, **20**:5(125) (1965), 121–180.

[4] G. Romano, R. Barretta, M. Diaco, “Geometric continuum mechanics”, *Meccanica*, **49**:1 (2014), 111–133.

[5] С. К. Годунов, Е. И. Роменский, *Элементы механики сплошных сред и законы сохранения*, Научная книга, Новосибирск, 1998.

[6] Л. И. Седов, *Механика сплошной среды. Т. 1*, Наука, М., 1994.

[7] D. Saunders, *The Geometry of Jet Bundles*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.

[8] J. Ehlers, “The Nature and Structure of Space-Time”, In: *The Physicist′s Conception of Nature*, ed. J. Mehra, Raidel, Dordrecht, 1973, 71–91.

[9] E. Cartan, “Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (premiére partie)”, *Ann École Norm Sup.*, **40** (1923), 325–412.

[10] E. Cartan, “Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (suite)”, *Ann École Norm Sup.*, **41** (1924), 1–25.

[11] A. Bernal, M. Sanchez, “Leibnizian, Galilean and Newtonian structures of space-time”, *J. Math. Phys.*, **44** (2003), 77–108.

[12] A. Trautman, “Foundations and current problems of general relativity”, In: *Lectures on General Relativity. Volume 1 of Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics*, ed. S. Deser and K. Ford, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1965, 1–248.

[13] A. Trautman, “Fibre Bundles Associated with Space-Time”, *Reports in Mathematical Physics*, **1** (1970), 29–62.

[14] A. Trautman, “A classification of space-time structures”, *Reports in Mathematical Physics*, **10** (1976), 297–310.

[15] G. Giachetta, L. Mangiarotti and G. Sardanashvily, *Geometric formulation of classical and quantum mechanics*, World Scientific, Singapore, 2011.

[16] С. П. Новиков, И. А. Тайманов, *Современные геометрические структуры и поля*, МЦНМО, М., 2005.

[17] F. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer, Berlin, 1983.

[18] A. Jadczyk, M. Modugno, *Galilei general relativistic quantum mechanics*, Report of Department of Applied Mathematics, University of Florence, 1994 `http://www.dma.unifi.it/~modugno/`.

[19] W. Noll, “On the continuity of the solid and fluid states”, *J. Rational Mech.Anal.*, **4** (1955), 3–81.

[20] C. Truesdell, R. Toupin, “The classical field theories”, In: *Encyclopedia of Physics*, ed. S. Flugge, Springer-Verlag, Berlin, Gottingen, Heidelberg, 1960.

[21] J. Koszull, *Lectures on fibre bundles and differential geometry*, Notes by S. Ramanan, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1960.

[22] G. Giachetta, L. Mangiarotti and G. Sardanashvily, *Advanced Classical Field Theory*, World Scientific, Singapore, 2009.

[23] I. Kolár, P. Michor, J. Slovák, *Natural operations in differential geometry*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1993.

[24] B. Schutz, *Geometrical methods of mathematical physics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980.

[25] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика*, Физматлит, М., 2001.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 16 октября 2014 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект № 14-11-00079).

Gudimenko A. I., Guzev M. A. Geometrical aspects of the mass conservation law. Far Eastern Mathematical Journal. 2014. V. 14. № 2. P. 173–190.

ABSTRACT

The theory of fiber bundles is used for representation of the mass conservation law in a coordinate-free form. A generalized formulation of the law is proposed and its physical interpretations are discussed.
Key words: *conservation laws, Lie derivative, bundles, covariant derivative.*