Дальневосточный математический журнал. 2014. Том 14. № 2. С. 191–199

УДК 517.54
MSC2010 2010, 30C75, 30C85

© В. Н. Дубинин[1]

Двуточечная граничная оценка производной Шварца голоморфной функции

Пусть f – голоморфная в круге $|z| < 1$ функция, $|f(z)| < 1$ при $|z| < 1$, и пусть z_1, z_2 – различные граничные точки этого круга, в которых существуют угловые пределы $f(z_1) \neq f(z_2)$, $|f(z_1)| = |f(z_2)| = 1$. При некоторых геометрических ограничениях на функцию f в круге $|z| < 1$ устанавливается точная верхняя оценка величины $\mathrm{Re}\{S_f(z_1) + S_f(z_2)\}$, где $S_f(z)$ означает производную Шварца функции f в точке z.

Ключевые слова: *шварциан, голоморфные функции, граничное искажение.*

Введение и формулировка основного результата

В геометрической теории функций хорошо известны так называемые двуточечные теоремы искажения, включающие в себя значения модулей производных однолистных функций в двух заданных точках некоторой области, а также значения этих функций в указанных точках (см., например, [1]–[4]). В последнее время наблюдается значительный интерес к граничным теоремам искажения, при этом рассматриваются как однолистные, так и многолистные голоморфные функции [5]–[8]. Пусть функция f голоморфна в круге $U = \{z : |z| < 1\}$ и удовлетворяет условию $|f(z)| < 1$ при $z \in U$. По лемме Жюлиа – Вольфа существование углового предела $f(z_1)$ в точке z_1, $|z_1| = |f(z_1)| = 1$, влечет за собой существование угловой производной $f'(z_1)$. В случае, если последняя конечна, существует угловой предел голоморфной функции $f'(z)$, равный $f'(z_1)$ при $z \to z_1$ [9, с. 79–83]. Это обстоятельство позволяет распространить некоторые теоремы искажения для внутренних точек круга U на случай граничных точек (см. [10, с. 32–34]). Неравенства для производных более высокого порядка изучены в меньшей степени. В

[1]Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8; Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: dubinin@iam.dvo.ru

частности, представляют интерес оценки производной Шварца (шварциана) функции $f(z)$, т.е. оценки величины

$$S_f(z) = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2.$$

К настоящему времени не известны оценки производной Шварца в круге U, если функция f не является однолистной в этом круге. Тем не менее, многими авторами получены одноточечные граничные оценки шварциана (см., например, статьи [11]–[13] и библиографию в них). В данной статье впервые устанавливается двуточечная граничная оценка производной Шварца для голоморфной функции f (не обязательно однолистной). Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть f — голоморфная в круге U функция, $|f(z)| < 1$ при $z \in U$, и пусть z_1, z_2 — различные граничные точки этого круга, в окрестности каждой из которых справедливы разложения*

$$f(z) = w_1 + a_1(z - z_1) + a_2(z - z_1)^2 + a_3(z - z_1)^3 + \angle o((z - z_1)^3), \quad z \to z_1,$$

$$f(z) = w_2 + b_1(z - z_2) + b_2(z - z_2)^2 + b_3(z - z_2)^3 + \angle o((z - z_2)^3), \quad z \to z_2,$$

где $w_1 \neq w_2$, $|w_1| = |w_2| = 1$, $a_1 b_1 \neq 0$ и $\angle o((z - z_k)^3)$ означает бесконечно малую по сравнению с функцией $(z - z_k)^3$ при $z \to z_k$ в каждом угле Штольца с вершиной в z_k, лежащем в круге U, $k = 1, 2$. Предположим, что выполняются равенства

$$2\,\mathrm{Re}\,\frac{z_1 a_2}{a_1} = |a_1| - 1, \qquad 2\,\mathrm{Re}\,\frac{z_2 b_2}{b_1} = |b_1| - 1, \tag{1}$$

и пусть образ $f(U \backslash \gamma(z_1, z_2))$ не содержит ни одной открытой дуги окружности с концами в точках w_1 и w_2, $\gamma(z_1, z_2) := \{z : |z - z_1| = |z - z_2|\}$. Тогда

$$\mathrm{Re}\{S_f(z_1) + S_f(z_2)\} \leqslant 12\left[\frac{1}{|z_1 - z_2|^2} - \frac{|a_1 b_1|}{|w_1 - w_2|^2}\right]. \tag{2}$$

Здесь

$$S_f(z_1) = 6\left(\frac{a_3}{a_1} - \frac{a_2^2}{a_1^2}\right) \qquad \text{и} \qquad S_f(z_2) = 6\left(\frac{b_3}{b_1} - \frac{b_2^2}{b_1^2}\right).$$

Равенство в (2) достигается, например, для любого дробно-линейного автоморфизма круга U.

Условия (1) являются необходимыми условиями для оценки шварциана в граничной точке. Геометрический смысл этих условий показан в работе [13, с. 31–32]. Поскольку

$$|w_1 - w_2|^2 \leqslant |a_1 b_1||z_1 - z_2|^2$$

[10, с. 36], то правая часть в (2) неположительная, и мы приходим к уточнению известных неравенств $\mathrm{Re}\,S_f(z_k) \leqslant 0$, $k = 1, 2$. Заметим также, что в условиях теоремы 1 $\mathrm{Im}\,S_f(z_k) = 0$, $k = 1, 2$ (см. [11]–[13]). Ограничение на покрытие множеством $f(U \backslash \gamma(z_1, z_2))$ дуг окружностей является существенным. Действительно, легко проверить, что функция $f(z) = z^3$ и точки $z_1 = 1$, $z_2 = -1$ удовлетворяют всем условиям теоремы 1, кроме указанного геометрического ограничения. Однако неравенство (2) в этом случае не выполняется. Если функция f однолистна в круге U, то указанное геометрическое условие в теореме 1 излишне. Доказательство теоремы 1 приводится в третьем параграфе данной статьи. Предварительно нам необходимо установить несколько вспомогательных утверждений.

2. Леммы

Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Лемма 1. *Пусть функция f голоморфна в круге U, $|f(z)| < 1$ при $z \in U$ и справедливо разложение*

$$f(z) = 1 + a_1(z-1) + a_2(z-1)^2 + a_3(z-1)^3 + \angle o((z-1)^3), \quad z \to 1,$$

причем

$$\operatorname{Re}(2a_2 + a_1(1-a_1)) = 0.$$

Предположим, что функция g голоморфна в круге $|\zeta| < 1$, отображает этот круг в круг U так, что

$$g(\zeta) = 1 + c_1(\zeta-1) + c_2(\zeta-1)^2 + c_3(\zeta-1)^3 + \angle o((\zeta-1)^3), \quad \zeta \to 1,$$

$$\operatorname{Re}(2c_2 + c_1(1-c_1)) = 0.$$

Тогда для суперпозиции $f \circ g$ выполняется

$$f(g(\zeta)) = 1 + d_1(\zeta-1) + d_2(\zeta-1)^2 + d_3(\zeta-1)^3 + \angle o((\zeta-1)^3), \ \ \zeta \to 1,$$

и

$$\operatorname{Re}(2d_2 + d_1(1-d_1)) = 0.$$

Лемма 2. *Для любого дробно-линейного автоморфизма f круга U и любых точек z_1, z_2, $|z_1| = |z_2| = 1$, справедливы равенства* (1).

Доказательство. Достаточно установить первое равенство. Отображение f представимо в виде

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z-\sigma}{1-\overline{\sigma}z},$$

где θ — вещественное число и $|\sigma| < 1$. Отсюда

$$a_1 = f'(z_1) = \frac{e^{i\theta}(1-|\sigma|^2)}{(1-\overline{\sigma}z_1)^2}, \qquad 2a_2 = f''(z_1) = \frac{2\overline{\sigma}e^{i\theta}(1-|\sigma|^2)}{(1-\overline{\sigma}z_1)^3}.$$

Первое равенство в (1) равносильно равенству

$$2\operatorname{Re}\frac{b}{1-b} = \frac{1-|b|^2}{|1-b|^2} - 1,$$

где $b := z_1\overline{\sigma}$. Последнее соотношение проверяется непосредственным вычислением. Лемма доказана. $\square$

Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ определим функцию

$$\Psi_\varepsilon(z) = \sqrt{\frac{\psi_\varepsilon(z^2) - \varepsilon}{1 - \varepsilon\psi_\varepsilon(z^2)}}, \qquad \sqrt{1} = 1, \tag{3}$$

где $\psi_\varepsilon(z) = z - \varepsilon(z-1)^3,\ \ z \in U$.

Лемма 3. *Существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всех ε, ε', $0 < \varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon_0$, функция Ψ_ε голоморфна и однолистна в круге U, $\Psi_\varepsilon(\pm 1) = \pm 1$, $|\Psi_\varepsilon(z)| < 1$ при $|z| = 1$, $z \neq \pm 1$, $\Psi_\varepsilon(U) \supset \overline{\Psi_{\varepsilon'}(U)} \backslash \{-1, 1\}$ и для коэффициентов разложения функции Ψ_ε в углах Штольца с вершинами в точках $z_1 = 1, z_2 = -1$ справедливы равенства* (1).

Доказательство. Покажем сперва, что при малых ε голоморфная функция ψ_ε является однолистной в круге U. Действительно, если $z_1, z_2 \in U$ и $z_1 \neq z_2$, то равенство $\psi_\varepsilon(z_1) = \psi_\varepsilon(z_2)$ или, что то же самое,

$$z_1 - z_2 = \varepsilon(z_1 - z_2)[(z_1 - 1)^2 + (z_1 - 1)(z_2 - 1) + (z_2 - 1)^2]$$

невозможно при $\varepsilon < 1/12$. Учитывая ограниченность ψ_ε в U и свойства дробно-линейного отображения, заключаем, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ функция

$$\frac{\psi_\varepsilon(z) - \varepsilon}{1 - \varepsilon\psi_\varepsilon(z)}$$

голоморфна и однолистна в U и переводит точку 0 в 0. Отсюда стандартными рассуждениями получаем однолистность функции Ψ_ε (см., например, [14, с. 50]). Для точек $z = e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, лежащих на единичной окружности, выполняется $|z - 1| = 2\sin(\varphi/2)$. По теореме косинусов

$$|\psi_\varepsilon(z)|^2 = 1 + \varepsilon^2 \left(2\sin\frac{\varphi}{2}\right)^6 - 2\varepsilon\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\right)^3 \cos(\varphi - 3\theta),$$

где $\theta = \varphi/2 + \pi/2$ — аргумент $z - 1$. Следовательно, при $\varepsilon_0 < 1/8$ выполняется $|\psi_{\varepsilon'}(z)| < |\psi_\varepsilon(z)| < 1$ во всех точках окружности $|z| = 1$, исключая точку $z = 1$, в которой $\psi_\varepsilon(1) = 1$. Отсюда вытекают свойства функции Ψ_ε : $\Psi_\varepsilon(\pm 1) = \pm 1$, $|\Psi_\varepsilon(z)| < 1$ при $|z| = 1$, $z \neq \pm 1$ и $\Psi_\varepsilon(U) \supset \overline{\Psi_{\varepsilon'}(U)} \backslash \{-1, 1\}$. Справедливость равенств (1) для коэффициентов разложения функции Ψ_ε получаем из лемм 1 и 2 и легко проверяемого факта, что подобные равенства выполняются также для степенных функций z^2, $\sqrt{\cdot}$ и функции ψ_ε. Лемма доказана. $\square$

Внутренним радиусом области B относительно конечной точки $z_0 \in B$ называется величина

$$r(B, z_0) = \exp\{\lim_{z \to z_0} [g_B(z, z_0) + \log|z - z_0|]\},$$

где $g_B(z, z_0)$ — функция Грина области B с полюсом в точке z_0.

Лемма 4. *Внутренний радиус полукруга $U^+ := \{z \in U : \operatorname{Re} z > 0\}$ относительно точки ρ, $0 < \rho < 1$, равен $2\rho(1 - \rho^2)/(1 + \rho^2)$.*

Доказательство. Непосредственно видно, что $g_U(z,0) = -\log|z|$. Поэтому достаточно отобразить полукруг U^+ конформно и однолистно на круг U так, чтобы точка ρ перешла в начало координат, и воспользоваться конформной инвариантностью функции Грина. Лемма доказана. □

Лемма 5. *Пусть B_1 и B_2 — области плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$, и пусть z_1, z_2 — конечные точки, $z_1 \neq z_2, z_k \in B_k$, $k = 1, 2$. Тогда справедливо неравенство*

$$\log[r(B_1, z_1)r(B_2, z_2)] \leqslant \log[r(B_1 \cup B_2, z_1)r(B_1 \cup B_2, z_2)] + 2g_{B_1 \cup B_2}(z_1, z_2).$$

Доказательство. Воспользуемся обозначениями и понятиями из [15]. По теореме 1.10 из [15] для емкости конденсаторов

$$C(r) = (B_1 \cup B_2, \{\partial(B_1 \cup B_2), \{z : |z - z_1| \leqslant r\}, \{z : |z - z_2| \leqslant r\}\}, \{0, 1, 1\}),$$

$$C_1(r) = (B_1, \{\partial B_1, \{z : |z - z_1| \leqslant r\}\}, \{0, 1\}),$$
$$C_2(r) = (B_2, \{\partial B_2, \{z : |z - z_2| \leqslant r\}\}, \{0, 1\})$$

справедливо неравенство

$$\operatorname{cap} C(r) \leqslant \operatorname{cap} C_1(r) + \operatorname{cap} C_2(r).$$

Применяя асимптотическую формулу (2.10) из [15] для каждой из выписанных емкостей, приходим к неравенству леммы 5. Лемма доказана. □

3. Доказательство теоремы 1

Покажем сначала, что неравенство (2) достаточно установить при следующих ограничениях: $z_1 = f(z_1) = -z_2 = -f(z_2) = 1$. В этом случае неравенство (2) представимо в виде

$$\operatorname{Re}\{S_f(1) + S_f(-1)\} \leqslant 3(1 - |a_1 b_1|). \tag{4}$$

В произвольном случае рассмотрим дробно-линейные автоморфизмы круга U, g_1 и g_2, удовлетворяющие условиям

$$g_1(1) = z_1, \qquad g_1(-1) = z_2, \qquad g_2(w_1) = 1, \qquad g_2(w_2) = -1.$$

Для суперпозиции $F = g_2 \circ f \circ g_1$ справедливы разложения

$$F(z) = 1 + \widetilde{a}_1(z-1) + \widetilde{a}_2(z-1)^2 + \widetilde{a}_3(z-1)^3 + \angle o((z-1)^3), \qquad z \to 1,$$

$$F(z) = -1 + \widetilde{b}_1(z+1) + \widetilde{b}_2(z+1)^2 + \widetilde{b}_3(z+1)^3 + \angle o((z+1)^3), \qquad z \to -1.$$

Учитывая леммы 1 и 2, заключаем, что соотношения (1) влекут за собой равенства

$$\operatorname{Re}(2\widetilde{a}_2 + \widetilde{a}_1(1 - \widetilde{a}_1)) = \operatorname{Re}(-2\widetilde{b}_2 + \widetilde{b}_1(1 - \widetilde{b}_1)) = 0$$

$(\widetilde{a}_1 > 0, \widetilde{b}_1 > 0)$. Кроме того, непосредственные вычисления дают

$$\widetilde{a}_1 = \frac{|a_1||z_1 - z_2|}{|w_1 - w_2|}, \qquad \widetilde{b}_1 = \frac{|b_1||z_1 - z_2|}{|w_1 - w_2|},$$

$$S_F(1) = \frac{1}{4} S_f(z_1)|z_1 - z_2|^2, \qquad S_F(-1) = \frac{1}{4} S_f(z_2)|z_1 - z_2|^2.$$

Заметим также, что из условий теоремы 1 и свойств дробно-линейных отображений следует, что образ $F(U \backslash [-i, i])$ не содержит ни одной открытой дуги окружности с концами в точках ± 1. Применяя неравенство (4) к функции F, приходим к неравенству (2).

Докажем теперь неравенство (4). Зафиксируем положительное число $\varepsilon < \varepsilon_0$ (ε_0 из леммы 3) и рассмотрим суперпозицию $F = f \circ \Psi_\varepsilon$, где Ψ_ε задана соотношениями (3). Здесь и далее для простоты записи в обозначениях функций и множеств будем опускать зависимость их от ε. Справедливы разложения вида.

$$F(z) = 1 + c_1(z-1) + c_2(z-1)^2 + c_3(z-1)^3 + \angle o((z-1)^3), \qquad z \to 1,$$

$$F(z) = -1 + d_1(z+1) + d_2(z+1)^2 + d_3(z+1)^3 + \angle o((z+1)^3), \qquad z \to -1,$$

причем из лемм 1, 3 и условия (1) получаем

$$\operatorname{Re}(2c_2 + c_1(1 - c_1)) = \operatorname{Re}(-2d_2 + d_1(1 - d_1)) = 0. \tag{5}$$

Функция F отображает полукруги $U^+ = \{z \in U : \operatorname{Re} z > 0\}$ и $U^- = \{z \in U : \operatorname{Re} z < 0\}$ на некоторые области соответственно B_1 и B_2, лежащие в круге $|w| < 1$. Учитывая неравенство Хеймана [16, с. 124] и лемму 5, приходим к цепочке неравенств

$$\begin{gathered} 2\log r(U^+, \rho) = \log[r(U^+, \rho) r(U^-, -\rho)] \leqslant -\log|F'(\rho)F'(-\rho)| + \\ + \log[r(B_1, F(\rho)) r(B_2, F(-\rho))] \leqslant -\log|F'(\rho)F'(-\rho)| + \\ + \log[r(B, F(\rho)) r(B, F(-\rho))] + 2g_B(F(\rho), F(-\rho)), \end{gathered}$$

где $0 < \rho < 1$ и $B = B_1 \bigcup B_2$. Если $B_1 \bigcap B_2 = \varnothing$, то в последнем выражении полагаем $r(B, F(\rho)) = r(B_1, F(\rho))$, $r(B, F(-\rho)) = r(B_2, F(-\rho))$ и $g_B(F(\rho), F(-\rho)) = 0$. Привлекая лемму 4, получаем неравенство

$$\log\left|F'(\rho)F'(-\rho)\frac{4\rho^2(1-\rho^2)^2}{(1+\rho^2)^2}\right| \leqslant \log[r(B, F(\rho)) r(B, F(-\rho))] + 2g_B(F(\rho), F(-\rho)). \tag{6}$$

Обозначим через Φ_1 дробно-линейный автоморфизм круга U, удовлетворящий условию $\Phi_1(F(\rho)) = -\Phi_1(F(-\rho)) =: \rho' > 0$, и пусть функция Φ_2 комформно и однолистно отображает круг U с разрезами $(-1, -\rho'], [\rho', 1)$ на вертикальную полосу $P = \{x + iy : -1 < x < 1\}$ так, что $\Phi_2(\rho') = i\infty$, $\Phi_2(-\rho') = -i\infty$ и $\Phi_2(0) = 0$. Прообраз прямой $\operatorname{Re} z = x$ при отображении Φ_2 назовем траекторией и обозначим через $\gamma(x, \rho)$. Траектория $\gamma(x, \rho)$ является открытой жордановой дугой с концами в точках $\pm\rho'$. Легко увидеть, что при $\rho \to 1$ траектория $\gamma(x, \rho)$ стремится к некоторой открытой дуге окружности в U с концами в точках ± 1. Заметим, что при некотором ρ_0, $0 < \rho_0 < 1$, для всех ρ, $\rho_0 < \rho < 1$ и всех x, $-1 < x < 1$, траектория $\gamma(\rho, x) \not\subset \Phi_1(B)$ (или, что то же самое, $\Phi_1^{-1}(\gamma(\rho, x)) \not\subset B$). Действительно, в противном случае существовали бы последовательность $\rho_n \to 1$ и последовательность $x_n \to x_0$, $-1 \leqslant x_0 \leqslant 1$, такие, что $\Phi_1^{-1}(\gamma(\rho_n, x_n)) \subset B$. Последовательность кривых $\Phi_1^{-1}(\gamma(\rho_n, x_n))$ сходится к открытой дуге γ некоторой окружности с концами в точках ± 1. Так как $\overline{B} \subset U \bigcup \{1, -1\}$ (см. лемму 3), то дуга γ не может лежать на границе U. Кроме того, γ не содержит внешних точек множества B и, следовательно, может содержать разве лишь граничные точки этого множества. Однако в этом случае γ принадлежит множеству $B = f(\Psi_\varepsilon(U^+)) \bigcup f(\Psi_\varepsilon(U^-))$ с изначально меньшим значением ε (лемма 3) и, следовательно, $\gamma \subset f(U \backslash [-i, i])$, что противоречит условию теоремы. Рассмотрим конденсатор

$$C(r) = (\Phi_1(B), \{\overline{U} \backslash \Phi_1(B), E(\rho', r), E(-\rho', r)\}, \{0, 1, 1\}),$$

где $E(z_0, r) = \{z : |z - z_0| \leqslant r\}$ и r достаточно мало. Суперпозиция конформных отображений и симметризации Штейнера $\Phi_2^{-1} \circ \mathrm{St} \circ \Phi_2$ переводит конденсатор $C(r)$ в конденсатор

$$C^*(r) = (B^*, \{\overline{U} \backslash B^*, E(\rho', r), E(-\rho', r)\}, \{0, 1, 1\})$$

(см. [15]). По сделанному выше замечанию о траекториях $\gamma(\rho, x)$ и по определнию симметризации Штейнера St множество B^* состоит из двух областей и не пересекается с отрезком $[-i, i]$ для всех $\rho_0 < \rho < 1$. Используя монотонность емкости и теорему 4.1 из [15], получаем

$$\operatorname{cap} C(r) \geqslant \operatorname{cap} C^*(r) \geqslant \operatorname{cap} \widetilde{C}(r),$$

где $\widetilde{C}(r) = (U^+ \bigcup U^-, \{\partial(U^+ \bigcup U^-), E(\rho', r), E(-\rho', r)\}, \{0, 1, 1\})$. Асимптотическая формула (2.10) из [15] дает

$$\log[r(\Phi_1(B), \rho')(\Phi_1(B), -\rho')] + 2g_{\Phi_1(B)}(\rho', -\rho') \leqslant \log[r(U^+, \rho')r(U^-, -\rho')].$$

Отсюда

$$\log[r(B, F(\rho))r(B, F(-\rho))] + 2g_B(F(\rho), F(-\rho)) \leqslant$$
$$\leqslant \log\left\{|F(\rho) - F(-\rho)|^2 \left[1 - \left|\frac{F(\rho) - F(-\rho)}{1 - F(\rho)\overline{F(-\rho)}}\right|^2\right]\right\}.$$

Учитывая (6), после элементарных преобразований приходим к неравенству

$$\frac{4\rho^2}{(1+\rho^2)^2} \frac{|F'(\rho)(1-\rho^2)|}{1 - |F(\rho)|^2} \frac{|F'(-\rho)(1-\rho^2)|}{1 - |F(-\rho)|^2} \leqslant \left|\frac{F(\rho) - F(-\rho)}{1 - F(\rho)\overline{F(-\rho)}}\right|^2. \tag{7}$$

Вывод следующих двух асимптотических равенств с использованием (5) приводится по существу в работе [17, с. 71–72]

$$\frac{|F'(\rho)(1-\rho^2)|}{1 - |F(\rho)|^2} = 1 + 2\operatorname{Re}\left[\frac{c_3}{c_1} - \frac{c_2^2}{c_1^2}\right](1-\rho)^2 + o((1-\rho)^2), \qquad \rho \to 1,$$

$$\frac{|F'(-\rho)(1-\rho^2)|}{1-|F(-\rho)|^2} = 1 + 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{d_3}{d_1} - \frac{d_2^2}{d_1^2}\right](1-\rho)^2 + o((1-\rho)^2), \qquad \rho \to 1.$$

Элементарные вычисления дают также

$$\frac{4\rho^2}{(1+\rho^2)^2} = 1 - (1-\rho)^2 + o((1-\rho)^2), \qquad \rho \to 1,$$

$$\left|\frac{F(\rho) - F(-\rho)}{1 - F(\rho)\overline{F(-\rho)}}\right|^2 = 1 - c_1 d_1 (1-\rho)^2 + o((1-\rho)^2), \qquad \rho \to 1.$$

Подставляя выписанные соотношения в (7), получаем неравенство (4) для функции $F = f \circ \Psi_\varepsilon$. Предельным переходом при $\varepsilon \to 0$ завершаем доказательство (4) для функции f.

Предположим теперь, что f — дробно-линейный автоморфизм круга U и z_1, z_2 — произвольные различные граничные точки этого круга, $f(z_1) \neq f(z_2)$. Тогда для функции f выполняются асимптотические разложения в окрестности точек z_1, z_2 и по лемме 2 справедливы равенства (1). Ввиду однолистности f, образ $f(U \backslash \gamma(z_1, z_2))$ не содержит ни одной открытой дуги окружности с концами в точках $f(z_1)$ и $f(z_2)$. Таким образом, f удовлетворяет условиям теоремы 1. Непосредственно убеждаемся, что для f обе части равенства (2) обращаются в ноль. Теорема доказана.

Список литературы

[1] S. Kim, D. Minda, “Two-point distortion theorems for univalent function”, *Pacific J. Math.*, **163** (1994), 137–157.

[2] W. Ma, D. Minda, “Two-point distortion for univalent functions”, *J. Comput. Appl. Math.*, **105** (1999), 385–392.

[3] J. A. Jenkins, “On two-point distortion theorems for bounded univalent regular functions”, *Kodai Math. J.*, **24**:3 (2001), 329–338.

[4] D. Kraus, O. Roth, “Weighted distortion in conformal mapping in euclidean, hyperbolic and elliptic geometry”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, **31** (2006), 111–130.

[5] M. D. Contreras, S. Díaz-Madrigal, A. Vasil’ev, “Digons and angular derivatives of analytic self-maps of the unit disk”, *Complex Variables and Elliptic Equations*, **52**:8 (2007), 685–691.

[6] J. M. Anderson, A. Vasil’ev, “Lower Schwarz-Pick estimates and angular derivatives”, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, **33** (2008), 101–110.

[7] V. Bolotnikov, M. Elin, D. Shoikhet, “Inequalities for angular derivatives and boundary interpolation”, *Anal. Math. Phys.*, **3**:1 (2013), 63–96.

[8] A. Frolova, M. Levenshtein, D. Shoikhet, A. Vasil’ev, “Boundary distortion estimates for holomorphic maps”, Theory, Published online: 18 December 2013, *Complex Anal. Oper.*.

[9] Ch. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal maps*, Springer, 1992.

[10] В. Н. Дубинин, В. Ю. Ким, “Теоремы искажения для регулярных и ограниченных в круге функций”, Зап. научн. семин. ПОМИ, **350**, 2007, 26–39.

[11] R. Tauraso, F. Vlacci, “Rigidity at the boundary for holomorphic self-maps of the unit disk”, *Complex Variables Theory Appl.*, **45**:2 (2001), 151–165.

[12] D. Shoikhet, “Another look at the Burns-Krantz theorem”, *J. Anal. Math.*, **105**:1 (2008), 19–42.

[13] В. Н. Дубинин, “О граничных значениях производной Шварца регулярной функции”, *Матем. сб.*, **202**:5 (2011), 29–44.

[14] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1966.

[15] В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Дальнаука, Владивосток, 2009.

[16] W. K. Hayman, *Myltivalent functions*, Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1994.

[17] В. Н. Дубинин, “Лемма Шварца и оценки коэффициентов для регулярных функций со свободной областью определения”, *Матем. сб.*, **196**:11 (2005), 53–74.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 23 мая 2014 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-12404-офи-м2) и программы ДВО РАН «Дальний Восток».

Dubinin V. N. Two-point boundary distortion estimate for Schwarzian derivative of holomorphic function. Far Eastern Mathematical Journal. 2014. V. 14. № 2. P. 191–199.

ABSTRACT

Let f be a holomorphic function in the disk $|z| < 1$, $|f(z)| < 1$, and let z_1, z_2 are distinct boundary points of this disk in which the angular limits $f(z_k)$, $k = 1, 2$, exist, $f(z_1) \neq f(z_2)$, $|f(z_1)| = |f(z_2)| = 1$. Under some geometric constraints on f the precise upper bound for $\mathrm{Re}\{S_f(z_1)+ S_f(z_2)\}$ is established. Here $S_f(z)$ means the Schwarzian derivative of the function f at the point z.

Key words: *Schwarzian derivative, holomorphic functions, boundary distortion.*