Дальневосточный математический журнал. 2014. Том 14. № 2. С. 200–216

УДК 519.21
MSC2010 60H15, 60J60, 60G20

© В. А. Дубко, Е. В. Карачанская [1]

Стохастические первые интегралы, ядра интегральных инвариантов и уравнения Колмогорова

В работе мы представляем стохастический первый интеграл, обобщенную формулу Ито – Вентцеля и ее применение к получению уравнений для стохастического первого интеграла, ядер интегральных инвариантов и уравнений Колмогорова для плотности переходных вероятностей случайных процессов, описываемых обобщенным СДУ Ито.

Ключевые слова: *стохастический первый интеграл, стохастическое ядро стохастического интегрального инварианта, локальное стохастическое ядро, обобщенное уравнение Ито, уравнения Колмогорова.*

Введение

В аналитической механике понятие первого интеграла решения детерминированной динамической системы играет фундаментальную роль, поскольку его наличие связано с законами сохранения (энергии, массы и т.п.). Выяснилось, что первый интеграл существует и в теории стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). Это *первый интеграл* для системы СДУ Ито (В. А. Дубко, 1978 [1]); *первый прямой интеграл* и *первый обратный интеграл* для системы СДУ Ито (Н. В. Крылов и Б. Л. Розовский, 1982 [2]), *стохастический первый интеграл* для системы обобщенных уравнений Ито (ОСДУ) [3]. Однако классический перенос понятия первого интеграла на стохастические системы уравнений невозможен.

Источником инвариантов, первых интегралов являются различные законы сохранения (энергии, массы, импульса, момента импульса и т. п.). Например, если набор счетного числа начальных значений решений некоторого динамического уравнения связать с точками (аналогами частиц), то при выполнении условий существования и единственности решений число этих точек будет оставаться одним и тем же в любой момент времени. Предельным обобщением этого представления

[1]Академия муниципального управления, 01042, г. Киев, ул. Ивана Кудри, 33; Тихоокеанский госуниверситет, 680035, г. Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136. Электронная почта: doobko2008@yandex.ru, ekarachanskaya@mail.khstu.ru

является плотность числа точек и, соответственно, постоянство значения интеграла от этой плотности по всему пространству. Функцию, обладающую таким свойством, называют ядром интегрального инварианта.

При определенных ограничениях возможно построить уравнение в частных производных для ядер [3, 4]. Не исключается и ситуация, когда ограничениями являются свойства функционалов, сохраняющихся в некоторой области пространственно-временного континуума. Для таких случаев приходят к представлению о локальных инвариантах [5]. Эволюционирующие структуры и функционалы, связанные с областью начальных значений, рассматриваются как *динамические инварианты.* Примерами динамических инвариантов могут служить элемент фазового объема, гиперповерхности.

Теория стохастических инвариантов представляет собой один из подходов к изучению стохастических динамических систем, описываемых уравнениями Ито [4, 6, 7]. Этот подход оказался эффективен для того, чтобы установить наличие сохраняющихся функционалов у стохастических эволюционирующих структур (первых и стохастических первых интегралов уравнений Ито [1, 8], длины случайной цепи [9], постоянной скорости случайно движущейся частицы [10, 11]). Кроме того, он позволил построить точное решение стохастического дифференциального уравнения (СДУ) типа Ланжевена [12], определить моментные характеристики диффундирующей на сфере частицы [13, 14], получить формулу Ито – Вентцеля и ее аналог — обобщенную формулу Ито – Вентцеля для обобщенных СДУ Ито с винеровской и пуассоновской составляющей [4, 3, 15, 16, 17]. Существование стохастических инвариантов стало обоснованием возможности определения и построения континуума программных управлений с вероятностью единица в стохастических системах, находящихся в условиях сильных возмущений [18, 19, 20].

Продемонстрируем, как можно использовать представление о стохастическом первом интеграле при построении и доказательстве теорем о виде уравнений для него и теорем существовании и единственности решений уравнений для ядер интегральных инвариантов. Именно подход, основанный на том, что существуют ядра интегрального инварианта, связанного с решением стохастического дифференциального уравнения Ито с винеровской и пуассоновской составляющими (обобщенного уравнения Ито), позволил получить правило дифференцирования случайных функций, зависящих от решений обобщенных уравнений Ито [3, 16, 17]. Этому правилу мы дали название «обобщенная формула Ито – Вентцеля». Выбор такого названия связан с тем фактом, что при отсутствии пуассоновских возмущений полученная нами формула переходит в формулу, известную под названием «формула Ито – Вентцеля» [2, 4, 21].

Цель статьи: продемонстрировать возможности применения обобщенной формулы Ито – Вентцеля к построению уравнения для стохастического первого интеграла, строгого обоснования уравнения для стохастических ядер стохастических интегральных инвариантов и получения уравнений Колмогорова для переходных вероятностей в качестве доказательства достоверности и наглядности метода стохастических интегральных инвариантов. [22].

Работа состоит из трех частей. В первой мы определяем понятие стохастического первого интеграла, приводим обобщенную формулу Ито – Вентцеля и уравнение для стохастического первого интеграла; во второй части вводим понятие локальной стохастической плотности динамического инварианта, связанного с решением обобщенного уравнения Ито, устанавливаем вид уравнения для плотности и связь локальной стохастической плотности с понятием стохастического ядра стохастического интегрального инварианта; в третьей — строим уравнения Колмогорова.

Стохастические первые интегралы

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — полное вероятностное пространство, $\mathcal{F}_t = \{\mathcal{F}_t, \quad t \in [0, T]\}$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, $s < t$ — неубывающий поток $\sigma-$алгебр. Рассматриваются следующие случайные процессы: $\mathbf{w}(t)$ — m-мерный винеровский процесс; $\nu(\Delta t; \Delta\gamma)$ — стандартная мера Пуассона, определенная на $[0; T] \times \mathbb{R}^{n'}$, $\mathrm{M}[\nu(\Delta t, \Delta\gamma)] = \Delta t \cdot \Pi(\Delta\gamma)$; $\int_{\mathbb{R}(\gamma)} \Pi(d\gamma) < \infty$, $\mathbb{R}(\gamma) = \mathbb{R}^{n'}$ (это условие означает, что интенсивность скачков за бесконечно малый промежуток времени конечна); одномерные винеровские процессы $w_k(t)$ и пуассоновская мера $\nu([0; T], \mathcal{A})$ определены на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $\mathcal{F}_t-$измеримы для всех $t > 0$ для любых множеств $\mathcal{A}$ из $\sigma-$алгебры борелевских множеств и являются взаимно независимыми.

Пусть случайный процесс $x(t)$, определенный на $\mathbb{R}^n$, является решением системы стохастических уравнений [23]

$$\begin{gathered} dx_i(t) = a_i(t)dt + b_{ik}(t)dw_k(t) + \int_{\mathbb{R}(\gamma)} g_i(t; \gamma)\nu(dt; d\gamma), \\ x(t) = x(t; x_0)\big|_{t=0} = x_0 \quad \text{для всех} \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \qquad i = \overline{1, n}; \quad k = \overline{1, m}, \end{gathered} \tag{1}$$

где $\mathbb{R}(\gamma) = \mathbb{R}^{n'}$ — пространство, на котором определены векторы γ, и по индексам, встречающимся дважды, ведется суммирование. Коэффициенты $a(t; x)$, $b(t; x)$ и $g(t; x; \gamma)$ удовлетворяют условиям, которые обеспечивают существование и единственность решения уравнения (1) (см., например, [23]). Далее, следуя [23], вместо $\int_{\mathbb{R}(\gamma)}$ будем использовать обозначение $\int$.

Пусть $u(t; x; \omega)$ — случайная функция, определенная на том же вероятностном пространстве, что и решение системы (1).

Определение 1. [3, 17]. *Случайную функцию $u(t; x; \omega)$, определенную на том же вероятностном пространстве, что и решение системы (1), будем называть стохастическим первым интегралом системы ОСДУ Ито (1), если с вероятностью единица выполняется условие*

$$u\big(t; x(t; x_0); \omega\big) = u\big(0; x_0\big) \tag{2}$$

для любого решения $x(t; x_0; \omega)$ системы (1).

Символ ω, как принято, далее по тексту опускаем.

Приведем теперь формулировку обобщенной формулы Ито – Вентцеля, которая будет использоваться и для получения уравнения для стохастического первого интеграла.

Теорема 1 (Обобщенная формула Ито – Вентцеля [16, 17])**.** *Пусть случайный процесс $x(t) \in \mathbb{R}^n$ подчинен системе* (1) *с коэффициентами, для которых выполняются условия $\mathcal{L}_\mathbf{1}$:*

$\mathcal{L}_1$.1. $\displaystyle\int_0^T |a_i(t)|dt < \infty; \quad \int_0^T |b_{ik}(t)|^2 dt < \infty;$

$\mathcal{L}_1$.2. $\displaystyle\int_0^T dt \int |g_i(t;\gamma)|^s \Pi(d\gamma) < \infty, \qquad s = 1, 2.$

Тогда, если $F(t;x)$, $(t;x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ – скалярная функция, обобщенный стохастический дифференциал которой имеет вид

$$d_t F(t;x) = Q(t;x)dt + D_k(t;x)dw_k(t) + \int G(t;x;\gamma)\nu(dt;d\gamma) \tag{3}$$

и для коэффициентов (3) *выполнены условия $\mathcal{L}_\mathbf{2}$:*

$\mathcal{L}_2$.1. *$Q(t;x)$, $D_k(t;x)$, $G(t;x;\gamma)$ — в общем случайные функции, измеримые относительно потока $\sigma-$алгебр $\mathcal{F}_t$, согласованного с процессами $w_k(t)$, $k = \overline{1,m}$, и $\nu(t;\mathcal{A})$ из* (1) *для любого множества $\mathcal{A} \in \mathfrak{B}$ из фиксированной борелевской $\sigma-$алгебры* ([23, с. 266]),

$\mathcal{L}_2$.2. $Q(t;x) \in \mathcal{C}^{1,2}_{t,x}, \quad D_k(t;x) \in \mathcal{C}^{1,2}_{t,x}, \quad G(t;x;\gamma) \in \mathcal{C}^{1,2,1}_{t,x,\gamma},$

то существует стохастический дифференциал

$$\begin{gathered}
d_t F(t;x(t)) = Q(t;x(t))dt + D_k(t;x(t))dw_k + \\
+ \left[a_i(t)\frac{\partial F(t;x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}b_{ik}(t)b_{j,k}(t)\frac{\partial^2 F(t;x)}{\partial x_i \partial x_j} + b_{ik}(t)\frac{\partial D_k(t;x)}{\partial x_i}\right]\Bigg|_{x=x(t)} dt + \\
+ b_{ik}(t)\frac{\partial F(t;x)}{\partial x_i}\bigg|_{x=x(t)} dw_k + \int \Big[(F(t;x(t)+g(t;\gamma)) - F(t;x(t))\Big]\nu(dt;d\gamma) + \\
+ \int G\big(t;x(t)+g(t;\gamma);\gamma\big)\nu(dt;d\gamma).
\end{gathered} \tag{4}$$

Отметим, что обобщенную формулу Ито – Вентцеля будем применять при дополнительных ограничениях на коэффициенты уравнения (1) [15], необходимых для дальнейших рассуждений:

$$a_i(t) = a_i(t;x) \in \mathcal{C}^{1,2}_{t,x}, \quad b_k(t) = b_k(t;x) \in \mathcal{C}^{1,2}_{t,x}, \quad g_i(t;\gamma) = g_i(t;x;\gamma) \in \mathcal{C}^{1,2,1}_{t,x,\gamma}. \tag{5}$$

Для компактности записи далее будем использовать обозначение $\dfrac{\partial f(t;x(t))}{\partial x_j}$ вместо $\dfrac{\partial f(t;x)}{\partial x_j}\bigg|_{x=x(t)}$.

Замечание 1. *Частные случаи обобщенной формулы Ито – Вентцеля получили Б. Оксендаль, Т. Джан (2007) и вместе с А. Сулем (2013) для одномерного случайного процесса, подчиненного стохастическому уравнению Ито. В работе [24] уравнение Ито и функция содержали только пуассоновские составляющие, в [25] без доказательства, со ссылкой на [24], уравнение Ито и функция имели и винеровские и пуассоновские компоненты (формула названа авторами «формула Ито – Вентцеля со скачками»)* .

Построим уравнение для стохастических первых интегралов обобщенного уравнения Ито, предполагая, что дифференциал стохастического первого интеграла существует и имеет вид

$$d_t u(t;x) = Q(t;x)dt + D_k(t;x)dw_k(t) + \int G(t;x;\gamma)\nu(dt;d\gamma). \tag{6}$$

Опираясь на определение 1 и представление (6), применим обобщенную формулу Ито – Вентцеля (4):

$$\begin{gathered} d_t u(t;x(t)) = Q(t;x(t))dt + D_k(t;x(t))dw_k + b_{ik}(t)\frac{\partial}{\partial x_i}u(t;x(t))dw_k + \\ + \left[a_i(t)\frac{\partial}{\partial x_i}u(t;x(t)) + \frac{1}{2}b_{ik}(t)b_{j,k}(t)\frac{\partial^2 u(t;x(t))}{\partial x_i \partial x_j} + b_{ik}(t)\frac{\partial}{\partial x_i}D_k(t;x(t))\right]dt + \\ + \int G(t;x(t)+g(t;\gamma);\gamma)\nu(dt;d\gamma) + \int \big[(u(t;x(t)+g(t;\gamma)) - u(t;x(t))\big]\nu(dt;d\gamma) = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

На вид уравнения для стохастического первого интеграла влияет зависимость или независимость функция $g(t;\gamma)$ от x. Рассмотрим оба случая.

Пусть функция $g(t;\gamma)$ явно не зависит от x и коэффициенты уравнения (6) имеют следующий вид:

$$Q(t;x) = -\left[a_i(t)\frac{\partial u(t;x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}b_{ik}(t)b_{j,k}(t)\frac{\partial^2 u(t;x)}{\partial x_i \partial x_j} - b_{ik}(t)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_{j,k}(t)\frac{\partial}{\partial x_j}u(t;x)\right)\right], \tag{8a}$$

$$D_k(t;x) = -b_{ik}(t)\frac{\partial}{\partial x_i}u(t;x), \tag{8b}$$

$$G(t;x;\gamma) = u(t;x-g(t;\gamma)) - u(x;t). \tag{8c}$$

Теорема 2. *Для того, чтобы непрерывная, ограниченная вместе со своими производными, вплоть до второй по компонентам x, функция $u(t,x)$, дифференциал от которой определяется* (6), *была первым стохастическим интегралом системы* (1) *достаточно, чтобы она являлась решением уравнения* (6) *с коэффициентами* (8).

Доказательство. Достаточность связана с проверкой выполнения равенства (2). Это равенство заведомо будет реализовано, если коэффициенты уравнения (6) будут определяться (8), что проверяется непосредственно прямой подстановкой в уравнение (7). □

Перейдем к рассмотрению случая, когда $g(t;\gamma) = g(t;x;\gamma)$:

$$dx(t) = a(t)dt + b_k(t)dw_k(t) + \int g(t;x(t);\gamma)\,\nu(dt;d\gamma), \tag{9}$$

где $a(t) = (a_i(t))$, $b_k(t) = (b_{ik}(t))$, $g(\cdot) = (g_i(\cdot))$, $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,m}$.

Введем новые функции и сделаем ряд замечаний относительно их свойств.

Обозначим через $x^{-1}(t;y;\gamma)$ решения относительно переменной x равенства $y = x + g(t;x;\gamma)$ (см. (7)). Из этого определения следует, что если рассматривать области однозначности, то, выбрав из такой области

$$y = z + g(t;z;\gamma), \tag{10}$$

приходим к тождеству

$$x^{-1}(t;z + g(t;z;\gamma);\gamma) = z. \tag{11}$$

Пусть теперь $u(t;x)$ — случайная функция, стохастический дифференциал для которой определяется (6) с коэффициентами (8a), (8b) и

$$G(t;x;\gamma) = u(t;x - g(t;x^{-1}(t;x;\gamma);\gamma)) - u(x;t). \tag{12}$$

Теорема 3. *Случайная функция $u(t;x) \in \mathcal{C}^{1,2}_{t,x}$, стохастический дифференциал которой определяется* (6)*, а коэффициенты $D_k(t;x)$, $Q(t;x)$ и $G(t;x;\gamma)$ — соотношениями* (8a)*,* (8b) *и* (12) *соответственно, является стохастическим первым интегралом обобщенного уравнения Ито* (9)*. Причем при указанных ограничениях на коэффицициенты эти условия являются необходимыми и достаточными.*

Доказательство. Для доказательства достаточно проверить равенство нулю суммы слагаемых в (7), связанных с интегралами по пуассоновской мере. Действительно, учитывая представление (12) и свойства (10) и (11), убеждаемся, что

$$\begin{gathered}
\int G(t;x(t) + g(t;x(t);\gamma))\nu(dt;d\gamma) + \\
+ \int \big[(u(t;x(t) + g(t;x(t);\gamma)) - u(t;x(t))\big]\nu(dt;d\gamma) = \\
= \int \big[(u(t;x(t) + g(t;x(t);\gamma) - g(t;x^{-1}(t;x + g(t;x(t);\gamma);\gamma) - \\
- u(x(t) + g(t;x(t);\gamma);t)\big]\nu(dt;d\gamma) + \\
+ \int \big[(u(t;x(t) + g(t;x(t);\gamma)) - u(t;x(t))\big]\nu(dt;d\gamma) \equiv 0.
\end{gathered} \tag{13}$$

Достаточность доказана.

Необходимость следует из условий существования и единственности решений (9) и, как результат, единственности представления для стохастического дифференциала для $F(t;x(t))$ от произвольной случайной функции $F(t;x)$, стохастический дифференциал от которой определяется (2). □

Ядра инвариантов для обобщенных уравнений Ито и уравнения для ядер

Пусть теперь случайный процесс $x(t)$, определенный на $\mathbb{R}^n$, является решением системы стохастических дифференциальных уравнений при более строгих ограничениях на часть коэффициентов [23, с. 278–290, 298–302]:

$$\begin{gathered} dx_i(t) = a_i(t;x(t))dt + b_{ik}(t;x(t))dw_k(t) + \int g_i(t;x(t);\gamma)\nu(dt;d\gamma), \\ x(t) = x(t;x_0)|_{t=0} = x_0, \quad \text{для всех} \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, \qquad i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,m}, \end{gathered} \tag{14}$$

$$a_i(t;x) \in \mathcal{C}^{1,1}_{t,x}, \qquad b_{ik}(t;x) \in \mathcal{C}^{1,2}_{t,x}; \tag{15}$$

и

$$\int\limits_0^T dt \int |\nabla^\alpha g(t;x;\gamma)|^\beta \Pi(d\gamma) < \infty, \qquad \alpha = 1,2, \quad \beta = \overline{1,4}, \tag{16}$$

где ∇^k обозначает всевозможные комбинации частных производных k-го порядка по компонентам x в предположении, что соответствующие им выражения непрерывны по совокупности переменных.

Условий (15) и (16) достаточно для существования и единственности решения уравнения (14) [23].

Введем несколько определений.

Определение 2 ([26]). *Пусть* $S(t) = S(t;v)$, $v \subset \hat{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}$ — *измеримое отображение* $\mathbb{R}^n$ *в* $\mathbb{R}^n$. *Множество* $\Delta(t) = S(t;v)\cdot\Delta(0)$ *будем называть динамическим инвариантом области* $\Delta(0)$ *для процесса* $x(t) \in \mathbb{R}^n$, *если*

$$\mathbf{P}\Big\{x(t) \in \Delta(t)\big|x = x_0\Big\} = 1 \qquad \text{для всех} \quad t > 0,\ x \in \Delta(0).$$

Пусть $\rho(t;x;\omega)$ — случайная функция, измеримая относительно потока σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, согласованного с процессами $w_k(t)$, $k = \overline{1,m}$ и $\nu(t;\Delta\gamma)$ (в дальнейшем индекс ω будем опускать).

Определение 3. *Случайную функцию* $\rho(t;x)$ *назовем локальной стохастической плотностью динамического инварианта для уравнения, связанного с обобщенным уравнением Ито* (14), *если случайная функция* $u(t;J;x) = J\rho(t;x)$ *является стохастическим первым интегралом, т. е. удовлетворяет равенству*

$$J(t;x_0)\rho(t;x(t;x_0)) = \rho(0;x_0) \qquad \text{для всех} \quad x_0 \in \Gamma \subset R^n, \tag{17}$$

где функция $J(t) = J(t,x_0)$ *является решением уравнения*

$$\begin{gathered} dJ(t) = J(t)\Bigg\{\mathrm{K(t)dt} + \\ + \frac{\partial b_{ik}(t;x(t))}{\partial x_i}dw_k(t) + \int \left(\det\left[A\left(\delta_{i,j} + \frac{\partial g_i(t;x(t);\gamma)}{\partial x_j}\right)\right] - 1\right)\nu(dt,d\gamma)\Bigg\}, \\ J(t) = J(t,x_0)|_{t=0} = 1, \quad \dim A(\cdot) = n\times n; \end{gathered} \tag{18}$$

$\delta_{i,j}$ *— символ Кронекера;*

$$K(t) = \frac{\partial a_i(t;x(t))}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_{ik}(t;x(t))}{\partial x_i}\frac{\partial b_{j,k}(t;x(t))}{\partial x_j} - \frac{\partial b_{ik}(t;x(t))}{\partial x_j}\frac{\partial b_{ik}(t;x(t))}{\partial x_i}\right),$$

а $x(t)$ *— решение уравнения* (14).

Уравнение (18) является уравнением для якобиана преобразования x_0 в $x(t;x_0)$. Решение (18) может быть представлено в виде

$$J(t) = \exp\left\{\int_0^t \left[K(\tau) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_{ik}(\tau;x(\tau))}{\partial x_i}\right)^2\right]d\tau + \int_0^t \frac{\partial b_{ik}(\tau;x(\tau))}{\partial x_i}dw_k(\tau) + \right.$$
$$\left. + \int_0^t \int \ln\left|\det\left[A\big(\delta_{i,j} + \frac{\partial g_i(\tau;x(\tau);\gamma)}{\partial x_j}\big)\right]\right|\nu(d\tau,d\gamma)\right\}.$$

Отметим, что $J(t) > 0$ для всех $t \geq 0$.

Перейдем к установлению вида уравнения в частных производных для функции $\rho(t;x)$. Из равенства (17) следует, что

$$d_t J(t;x_0)\rho(t;x(t;x_0)) = 0 \quad \text{для всех} \quad x_0 \in \Gamma \subset \mathbb{R}^n. \tag{19}$$

Пусть функция $\rho(t;x)$ является решением уравнения

$$\begin{gathered} d_t\rho(t;x) = Q(t;x)dt + D_k(t;x)dw_k(t) + \int G(t;x;\gamma)\nu(dt;d\gamma), \\ \rho(t;x)\,|_{t=0} = \rho(x) \in C_0^2. \end{gathered} \tag{20}$$

Здесь роль начальных условий выполняет функция. Относительно коэффициентов этого уравнения предполагаем, что они удовлетворяют условиям

$$Q(t;x) \in \mathcal{C}^{1,1}_{t,x}, \qquad D_k(t;x) \in \mathcal{C}^{1,2}_{t,x} \tag{21}$$

и

$$\int_0^T dt \int |\nabla^\alpha G(t;x;\gamma)|^\beta \Pi(d\gamma) < \infty, \quad \alpha = 1,2, \quad \beta = \overline{1,4} \tag{22}$$

В работе [16] другими методами было получено следующее стохастическое уравнение в частных производных для ядра интегрального инварианта :

$$\begin{gathered} d_t\rho(t;x) = -\left[\frac{\partial \rho(t;x)a_i(t;x)}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 \rho(t;x)b_{ik}(t;x)b_{j,k}(t;x)}{\partial x_i \partial x_j}\right]dt - \\ -\frac{\partial \rho(t;x)b_{ik}(t;x)}{\partial x_i}dw_k(t) + \\ + \int \Big[\rho\big(t;x - g(t;x^{-1}(t;x;\gamma);\gamma)\big)\bar{D}\big(x^{-1}(t;x;\gamma)\big) - \rho(t;x)\Big]\nu(dt;d\gamma), \\ \rho(t;x)\Big|_{t=0} = \rho(x) \in C_0^2; \qquad \rho(x) \geq 0, \end{gathered} \tag{23}$$

где $x^{-1}(t;x;\gamma)$ определяется как решение относительно переменной y уравнения

$$y + g(t;y;\gamma) = x \tag{24}$$

во всех подобластях однозначности, а $\bar{D}\left(x^{-1}(t;x;\gamma)\right)$ — якобиан перехода, соответствующий замене (24). Чертой над большими буквами здесь и далее будем обозначать детерминанты матриц.

Покажем, что функция $\rho(t;x)$ — решение уравнения (20) также является решением уравнения (23).

Поскольку стохастический дифференциал (обобщенное СДУ Ито) можно представить в виде суммы слагаемых, одно из которых определяется наличием винеровского процесса, а второе — наличием скачков пуассоновского процесса, то можно заменить требование (19) такими:

$$\left[d_t J(t;x_0)\rho\big(t;x(t;x_0)\big)\right]_1 = 0 \qquad \text{для всех} \quad x_0 \in \Gamma, \tag{25}$$

$$\left[d_t J(t;x_0)\rho\big(t;x(t;x_0)\big)\right]_2 = 0 \qquad \text{для всех} \quad x_0 \in \Gamma, \tag{26}$$

где (25) соответствует стохастическому дифференциалу Ито, а (26) связано с учетом пуассоновских компонент.

Теорема 4. *Пусть коэффициенты уравнений* (14) *и* (20) *удовлетворяют условиям* (15), (16) *и* (21), (22) *соответственно. Тогда коэффициенты* $Q(t;x)$, $D_k(t;x)$, $G(t;x;\gamma)$, *обеспечивающие выполнение условия* (19), *однозначно определяются равенствами*

I.1. $-Q(t;x) = \dfrac{\partial\rho(t;x)a_i(t;x)}{\partial x_i} - \dfrac{\partial^2\rho(t;x)b_{ik}(t;x)b_{j,k}(t;x)}{\partial x_i\partial x_j}$;

I.2. $-D_k(t;x) = \dfrac{\partial\rho(t;x)b_{ik}(t;x)}{\partial x_i}$;

I.3. $G(t;x;\gamma) = \rho\left(t;x - g(t;x^{-1}(t;x;\gamma);\gamma)\right)\bar{D}\left(x^{-1}(t;x;\gamma)\right) - \rho(t;x)$.

Кроме того, при любых начальных условиях для (23) *функция* $\rho(t;x)$ *является единственным решением стохастического уравнения* (20) *с коэффициентами, определяемыми условиями I.1, I.2.*

Доказательство. Ограничения теоремы на коэффициенты уравнения (20) обеспечивают применимость обобщенной формулы Ито – Вентцеля (4). В результате ее применения получим

$$\begin{aligned} d_t\rho(t;x(t)) = {}& Q(t;x(t))dt + D_k(t;x(t))dw_k + b_{ik}(t;x(t))\frac{\partial}{\partial x_i}\rho(t;x(t))dw_k + \\ & + \Big[a_i(t;x(t))\frac{\partial}{\partial x_i}\rho(t;x(t)) + \frac{1}{2}b_{ik}(t;x(t))b_{j,k}(t;x(t))\frac{\partial^2\rho(t;x(t))}{\partial x_i\partial x_j} + \\ & + b_{ik}(t;x(t))\frac{\partial}{\partial x_i}D_k(t;x(t))\Big]dt + \int G\big(t;x(t)+g(t;x(t);\gamma)\big)\nu(dt;d\gamma) + \\ & + \int\Big[\big(\rho(t;x(t)+g(t;x(t);\gamma)\big) - \rho(t;x(t))\Big]\nu(dt;d\gamma). \end{aligned} \tag{27}$$

Рассмотрим составляющую дифференциала Ито этого выражения:

$$\begin{gathered}\left[d_t\rho(t;x(t))\right]_1 = Q(t;x(t))dt + D_k(t;x(t))dw_k(t)+\\ +\left[a_i(t;x(t))\frac{\partial\rho(t;x(t))}{\partial x_i} + \frac{1}{2}b_{ik}(t;x(t))b_{j,k}(t;x(t))\frac{\partial^2\rho(t;x(t))}{\partial x_i\partial x_j} + \right.\\ \left. +b_{ik}(t;x(t))\frac{\partial D_k(t;x(t))}{\partial x_i}\right]dt + b_{ik}(t;x(t))\frac{\partial\rho(t;x(t))}{\partial x_i}dw_k(t).\end{gathered} \tag{28}$$

На явном виде $\left[d_t\rho(t;x(t))\right]_2$ мы остановимся чуть позднее.

Воспользовавшись (18), (28) и формулой Ито [23], находим

$$\begin{gathered}\left[d_tJ(t)\rho(t;x(t))\right]_1 = \rho(t;x(t))\left[dJ(t)\right]_1 + J(t)\left[d\rho(t;x(t))\right]_1 +\\ +J(t)b_{ik}(t;x(t))\frac{\partial b_{j,k}(t;x(t))}{\partial x_j}\frac{\partial\rho(t;x(t))}{\partial x_i}dt =\\ = J(t)\left[b_{ik}(t;x(t))\frac{\partial b_{j,k}(t;x(t))}{\partial x_j}\frac{\partial\rho(t;x(t))}{\partial x_i} + a_i(t;x(t))\frac{\partial\rho(t;x(t))}{\partial x_i} + \right.\\ +\frac{1}{2}b_{ik}(t;x(t))b_{j,k}(t;x(t))\frac{\partial^2\rho(t;x(t))}{\partial x_i\partial x_j} + b_{ik}(t;x(t))\frac{\partial D_k(t;x(t))}{\partial x_i} +\\ +b_{ik}(t;x(t))\frac{\partial D_k(t;x(t))}{\partial x_i} + Q(t;x(t)) +\\ \left. +\rho(t;x(t))\frac{\partial a_i(t;x(t))}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial b_{ik}(t;x(t))}{\partial x_i}\frac{\partial b_{j,k}(t;x(t))}{\partial x_j} - \frac{\partial b_{ik}(t;x(t))}{\partial x_j}\frac{\partial b_{ik}(t;x(t))}{\partial x_i}\right]\right]dt +\\ +J(t)\left[b_{ik}(t;x(t))\frac{\partial\rho(t;x(t))}{\partial x_i} + \rho(t;x(t))\frac{\partial b_{ik}(t;x(t))}{\partial x_i} + D_k(t;x(t))\right]dw_k(t).\end{gathered}$$

С учетом (25) — требования обращения в ноль выражения в правой части полученного выражения, группируем слагаемые и приходим к установлению необходимости выполнения равенств I.1, I.2 теоремы.

Решения уравнений (20), (23) и (28) при указанных ограничениях существуют и единственны [2]. Последнее и приводит к утверждению теоремы без пуассоновской составляющей.

Перейдем к рассмотрению условия I.3 теоремы.

На всех участках между пуассоновскими скачками процесс подвержен только винеровским возмущениям и сохраняется порядок гладкости функции $\rho(t;x(t))$. В момент скачка происходит добавление функционала

$$\begin{gathered}\mathcal{I}(t) = \int_0^t\int G\big(\tau;x(\tau)+g(\tau;x(\tau);\gamma)\big)\nu(d\tau;d\gamma)+\\ +\int_0^t\int\Big[\big(\rho(\tau;x(\tau)+g(t;x(t);\gamma)\big) - \rho(\tau;x(\tau))\Big]\nu(d\tau;d\gamma),\end{gathered} \tag{29}$$

неизменяющего условия гладкости коэффициентов.

В силу теорем о свойствах решений уравнений в частных производных [2], и на последующем интервале между скачками решение будет существовать и не нарушится порядок его гладкости.

Поэтому остается проверить, что для системы

$$\begin{aligned}
\big[d_t\rho(t;x(t))\big]_2 &= \int\Big\{(\rho(t;x(t)+g(t;x(t);\gamma))-\rho(t;x(t))+\\
&+\Big[\rho(t;x(t)+g(t;x(t);\gamma)-g(t;x^{-1}(t;x(t)+g(t;x(t);\gamma);\gamma);\gamma))\Big]\times\\
&\times\bar D\big(x^{-1}(t;x(t)+g(t;x(t);\gamma))\big)-\rho(t;x(t)+g(t;x(t);\gamma))\Big\}\nu(dt;d\gamma)=\\
&=-\int\Big[\rho(t;x(t))-\rho(t;x(t))\bar D\left(\frac{\partial x_i^{-1}(t;x+g(t;x;\gamma);\gamma)}{\partial(x_j+g_j(t;x;\gamma))}\right)\Big]\nu(dt;d\gamma),\\
\big[dJ(t)\big]_2 &= J(t)\int\Big(\det\Big[A\left(\delta_{i,j}+\frac{\partial g_i(t;x(t);\gamma)}{\partial x_j}\right)\Big]-1\Big)\nu(dt,d\gamma)
\end{aligned} \tag{30}$$

будет обращаться в ноль, в силу условия (26), дифференциал

$$\begin{aligned}
&\big[d_tJ(t)\rho(t;x(t))\big]_2=\\
&=\int\Bigg\{\left[\rho(t;x(t))+\rho(t;x(t))\bar D\left(\frac{\partial x_j^{-1}(t;x+g(t;x;\gamma);\gamma)}{\partial(x_i+g_i(t;x;\gamma))}\right)-\rho(t;x(t))\right]\times\\
&\times\left[J(t)+J(t)\bar A\left(\delta_{i,j}(t)+\frac{\partial g_i(t;x(t);\gamma)}{\partial x_l}\right)-J(t)\right]-J(t)\rho(t;x(t))\Bigg\}\nu(dt;d\gamma)=\\
&=J(t)\int\Bigg[\rho(t;x(t))\bar D\left(\frac{\partial x_j^{-1}(t;x(t)+g(t;x;\gamma);\gamma)}{\partial(x_i+g_i(t;x;\gamma))}\right)\bar A\left(\frac{\partial(g_i(t;x(t);\gamma)+x_i)}{\partial x_j}\right)-\\
&\qquad-\rho(t;x(t))\Bigg]\nu(dt;d\gamma).
\end{aligned} \tag{31}$$

Подынтегральное выражение в первом из уравнений системы (30) получено сопоставлением уравнений (34) и (35) для ядра и подстановкой в функционал (29) соответствующего выражения с учетом условия (24).

Поскольку произведение детерминантов $\bar D(\cdot)\bar A(\cdot)=1$, то подынтегральное выражение в (31) равно нулю, и следовательно, условие I.3 имеет место.

Учитывая, что из определения (24) следует равенство $x^{-1}\big(t;x+g(t;x;\gamma)\big)=x$, находим

$$\begin{aligned}
&\det\left[\bar D\left(\frac{\partial x_i^{-1}(t;x+g(t;x;\gamma);\gamma)}{\partial(x_l+g_i(t;x;\gamma))}\right)\bar A\left(\frac{\partial(g_l(t;x;\gamma)+x_i)}{\partial x_j}\right)\right]=\\
&=\det\bar S\left(\frac{\partial x_i^{-1}(t;x+g(t;x;\gamma);\gamma)}{\partial(x_l+g_l(t;x;\gamma))}\frac{\partial(g_l(t;x;\gamma)+x_l)}{\partial x_j}\right)=\\
&=\det\bar S\left(\frac{\partial x_i^{-1}(t;x+g(t;x;\gamma);\gamma)}{\partial x_j}\right)=\det\bar S\big(\delta_{i,j}\big)=1.
\end{aligned}$$

Полученное равенство и приводит к утверждению, что в области, где обеспечивается однозначное соответствие между переменными уравнения $y = x + g(t; x; \gamma)$, решение уравнения с коэффициентами, определяемыми равенствами теоремы, существует и единственно. $\square$

При соблюдении требования существования и единственности решения уравнения (14) во всем пространстве добавляются глобальные равенства [3, 4]:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\rho(t;x)d\Gamma(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x(t;y))\rho(y)d\Gamma(y), \quad \int_{\mathbb{R}^n} \rho(t;x)d\Gamma(x) = 1 \qquad (32)$$

для любой непрерывной и ограниченной $f(x)$, где $\rho(x) = \rho(0;x)$ удовлетворяет требованиям

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{\partial^k \rho(t;x)}{\partial x_i^k}\Big|_{t=0} = 0, \qquad k = 0, 1, 2. \quad i = \overline{1, n}.$$

Соотношения (32) есть определение стохастического ядра стохастического интегрального инварианта [3, 16].

Отметим, что, как и в случае детерминистических уравнений, существует полная система ядер интегральных инвариантов $\rho_r(t;x)$, $r = \overline{1, n+1}$, т. е. такая совокупность ядер, что любая другая функция, являющаяся ядром интегрального инварианта n-го порядка, может быть представлена как функция от элементов этой совокупности. Любое ядро $\rho(t;x)$ однозначно выражается через начальное значение $\rho(x)$ и набор этих ядер [4, 17, 27]. Для стохастических процессов схема доказательства этого утверждения аналогична доказательству, существующему для случая детерминистических систем [27].

Подчеркнем, что существование плотности $\rho(t;x)$ связано со свойствами меры $\mu(t;\Delta)$ ($\int_{\mathbb{R}^n} \mu(t;d(\Delta)) = const$), индуцируемой некоторым динамическим отображением. При условии, что существует, в каком-либо смысле, предел отношения $\mu(t;\Delta)/\mu(\Delta)$ при $\Delta \downarrow 0$, он отождествляется с функцией $\rho(t;x)$. Но функция $\rho(t;x)$ может и не обладать необходимой гладкостью, позволяющей построить уравнение вида (23).

Применение уравнения для стохастической плотности обобщенного уравнения Ито к построению уравнений Колмогорова

Пусть $x(t)$ — решение системы обобщенных уравнений Ито (14), коэффициенты $a_i(t;x)$, $b_{ik}(t;x)$ и $g(t;x;\gamma)$ которого удовлетворяют условиям (15) и (16). Этих условий достаточно для существования и единственности решений уравнения (14) при некоторых дополнительных ограничениях, а также и для рассматриваемых ниже решений уравнений.

Пусть неотрицательная случайная функция $\rho(t;x)$, определенная на том же потоке $\sigma-$алгебр, что и процесс $x(t)$, является стохастическим ядром интегрального инварианта, согласованного с процессом $x(t)$, т. е. удовлетворяет условиям (32).

Уравнения для функции $\rho(t;x)$ можно построить разными способами и для разных представлений стохастических уравнений. Мы воспользуемся уравнением для стохастических ядер со случайной мерой Пуассона (23).

Перейдем в уравнении для ядер (23) к центрированной случайной мере $\tilde{\nu}(\Delta t,\Delta\gamma) = \nu(\Delta t,\Delta\gamma) - \Delta t\Pi(\Delta\gamma)$:

$$\begin{gathered} d_t\rho(t;x) = -\frac{\partial\rho(t;x)b_{ik}(t;x)}{\partial x_i}dw_k(t)- \\ -\left[\frac{\partial\left(\rho(t;x)a_i(t;x)\right)}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\left(\rho(t;x)b_{ik}(t;x)b_{j,k}(t;x)\right)}{\partial x_i\partial x_j}\right]dt+ \\ +\int\left[\rho\left(t;x-g(t;x^{-1}(t;x;\gamma);\gamma)\right)\bar{D}\left(x^{-1}(t;x;\gamma)\right)-\rho(t;x)\right]\Pi(d\gamma)dt+ \\ +\int\left[\rho\left(t;x-g(t;x^{-1}(t;x;\gamma);\gamma)\right)\bar{D}\left(x^{-1}(t;x;\gamma)\right)-\rho(t;x)\right]\tilde{\nu}(dt;d\gamma). \end{gathered} \tag{33}$$

Введем обозначение $\mathbf{M}[\rho(t;x)] = p(t;x)$. Вычислив математическое ожидание обеих частей (33) получаем, что $p(t;x)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered} \frac{\partial p(t;x)}{\partial t} = -\frac{\partial\left(p(t;x)a_i(t;x)\right)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\left(p(t;x)b_{ik}(t;x)b_{j,k}(t;x)\right)}{\partial x_i\partial x_j}+ \\ +\int[p\left(t;x-g(t;x^{-1}(t;x;\gamma);\gamma)\right)\bar{D}\left(x^{-1}(t;x;\gamma)\right)-p(t;x)]\Pi(d\gamma). \end{gathered} \tag{34}$$

Соотношение (34) представляет собой *уравнение Колмогорова для плотности.*

Построим уравнения для плотности переходных вероятностей процессов, являющихся решением обобщенных уравнений Ито (14).

Под плотностью переходных вероятностей для случайного процесса понимают детерминистическую функцию $p(t;x/s;y)$, обеспечивающую выполнение интегрального равенства

$$p(t;x) = \int_{\mathbb{R}^n} p(t;x/s;y)p(s;y)d\Gamma(y), \quad t>s. \tag{35}$$

Из уравнения (35) следует, что функция $p(t;x/s;y)$ не зависит от распределения $p(s;y)$ для всех $s\geq 0$, следовательно, не зависит и от произвольного $p(0;y)=\rho(y)$.

После подстановки (35) в уравнение (34), в силу произвольности $p(s;y)$, приходим к выводу, что требование (35) будет выполнено, если

$$\begin{gathered} \frac{\partial p(t;x/s;y)}{\partial t} = \\ = -\left[\frac{\partial\left(p(t;x/s;y)a_i(t;x)\right)}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\left(p(t;x/s;y)b_{ik}(t;x)b_{j,k}(t;x)\right)}{\partial x_i\partial x_j}\right]+ \\ +\int\Big[p\left(t;x-g(t;x^{-1}(t;x;\gamma);\gamma)/s;y\right)\bar{D}\left(x^{-1}(t;x;\gamma)\right)-p(t;x/s;y)\Big]\Pi(d\gamma). \end{gathered} \tag{36}$$

Это *прямое уравнение Колмогорова* для плотности переходных вероятностей, связанной с уравнением (14).

Перейдем к построению обратного уравнения для $p(t;x/s;y)$.

Учитывая, что $p(t;x/s;y)$ — детерминистическая функция, можно представить уравнение (35) в таком виде:

$$p(t;x)=\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{M}[p(t;x/s;y)\rho(s;y)]d\Gamma(y).$$

От этого представления, с учетом свойства (32) функции $\rho(s;y)$, переходим к равенству

$$p(t;x)=\int_{\mathbb{R}^n}p(t;x/s;y)\mathbf{M}[\rho(s;y)]d\Gamma(y)=\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{M}[p(t;x/s;y(s;z))\rho(0;z)]d\Gamma(z),$$

где $y(s;z)$ — решение обобщенного уравнения Ито (14). Поскольку левая часть равенства не зависит от s, то после дифференцирования по s, используя обобщенную формулу Ито, приходим к равенству

$$\begin{aligned}0=&\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{M}[d_sp(t;x/s;y(s;z))\rho(0;z)]d\Gamma(z)=\\=&\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{M}\Big\{\Big[\frac{\partial p(t;x/s;y(s;z))}{\partial s}+a_j(s;y(s;z))\frac{\partial p(t;x/s;y(s;z))}{\partial y_j}+\\&+\frac{1}{2}b_{j,k}(s;y(s;z))b_{ik}(s;y(s;z))\frac{\partial^2p(t;x/s;y(s;z))}{\partial y_j\partial y_i}\Big]ds+\\&+b_{j,k}(s;y(s;z))\frac{\partial}{\partial y_j}p(t;x/s;y(s;z))dw_k(s)+\\&+\int[p\big(t;x/s;y(s;z)+g(t;y(s;z);\gamma)\big)-p(t;x/s;y(s;z))]\nu(ds;d\gamma)\Big\}\rho(0;z)d\Gamma(z).\end{aligned}$$

Учитывая свойство (32), переходим к следующему равенству:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\Big\{\Big[\frac{\partial p(t;x/s;y)}{\partial s}+a_j(s;y)\frac{\partial p(t;x/s;y)}{\partial y_j}+\frac{1}{2}b_{j,k}(s;y)b_{ik}(s;y)\frac{\partial^2p(t;x/s;y)}{\partial y_j\partial y_i}\Big]+\\&+\int\Big[p(t;x/s;y+g(s;y;\gamma))-p(t;x/s;y)\Big]\Pi(d\gamma)\Big\}p(s;y)d\Gamma(y)=0.\end{aligned}$$

В свою очередь, требование независимости $p(t;x/s;y)$ от $p(s;y)$ будет выполнено, если

$$\begin{aligned}&\frac{\partial p(t;x/s;y)}{\partial s}+a_j(s;y)\frac{\partial p(t;x/s;y)}{\partial y_j}+\frac{1}{2}b_{j,k}(s;y)b_{ik}(s;y)\frac{\partial^2p(t;x/s;y)}{\partial y_j\partial y_i}+\\&+\int\Big[p(t;x/s;y+g(s;y;\gamma))-p(t;x/s;y)\Big]\Pi(d\gamma)=0.\end{aligned}\tag{37}$$

Полученное уравнение соответствует *обратному уравнению Колмогорова* для плотностей переходных вероятностей.

Заметим, что при построении уравнений этого параграфа привлекались обобщенные уравнения Ито (14) со случайной пуассоновской мерой. Чтобы воспользоваться полученными выше выводами для обобщенных уравнений Ито с центрированными мерами, в исходных уравнениях (14) и в уравнениях (36) и(37) потребуется использовать замену коэффициентов $a_j(\tau; z)$ на

$$\bar{a}_j(\tau; z) = a_j(\tau; z) - \int g(\tau; z; \gamma)\Pi(d\gamma).$$

Это приведет к совпадению с уравнениями, полученными И. И. Гихманом и А. В. Скороходом [23, с. 301–302].

Заключение

Введение понятия стохастического ядра стохастического интегрального инварианта позволяет получить известные результаты (например, формулу Ито – Вентцеля [4], уравнения Колмогорова) что подтверждает полноту и замкнутость теории интегральных инвариантов. Кроме того, метод интегральных инвариантов, рассмотренный с статье, дает возможность дальнейшего развития и применения теории стохастических дифференциальных уравнений и ее применения (например, первые и стохастические первые интегралы, программное управление с вероятностью единица [1, 7, 16, 19, 20]).

Список литературы

[1] В. А. Дубко, *Первый интеграл системы стохастических дифференциальных уравнений: препринт*, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1978.

[2] Н. В. Крылов, Б. Л. Розовский , “Стохастические дифференциальные уравнения в частных производных и диффузионные процессы”, *Успехи мат. наук*, **37**:6 (1982), 75–95.

[3] В. А. Дубко, “Открытые эволюционирующие системы.”, *Перша міжнародна науково-практична конференція "Відкриті еволюціонуючі системи" (26-27 квіт. 2002 р., Київ) (Додаток)*, ВНЗ ВМУРоЛ, Київ, 2002, 14–31.

[4] В. А. Дубко, *Вопросы теории и применения стохастических дифференциальных уравнений*, ДВНЦ АН СССР, Владивосток, 1989.

[5] В. А. Дубко, “Откртытые динамические системы”, *В поисках скрытого порядка*, Дальнаука, Владивосток, 1995, 94–116.

[6] В. А. Дубко, “Інтегральні інваріанти для одного класу систем стохастичних диференціальних рівнянь”, *Докл. АН УССР*, **А**:1 (1984), 18–21.

[7] В. А. Дубко, “Интегральные инварианты, первые интегралы и притягивающие многообразия стохастических дифференциальных уравнений для одного класса стохастических дифференциальных уравнений”, *Сб. науч. тр. НАН Украины*, Ин-т математики НАН Украины, Киев, 1998, 87–90.

[8] В. А. Дубко, “Интегральные инварианты уравнений Ито и их связь с некоторыми задачами теории случайных процессов”, *Докл. НАН Украины*, 2002, № 1, 24–29.

[9] E. Karachanskaya(Chalykh), “Dynamics of random chains of finite size with an infinite number of elements in $\mathbb{R}^2$”, *Theory of Stochastic Processes*, **16 (32)**:2 (2010), 58–68.

[10] В. А. Дубко, Е. В. Чалых, *Броуновское движение с детерминированным модулем скорости (Препринт / Ин-т мат. НАН Украины)*, Ин-т мат. НАН Украины, Киев, 1997.

[11] Е. В. Чалых, "Обобщение моделей броуновского движения со случайными ортогональными воздействиями", *Друга міжнародна науково-практична конференція «Відкриті еволюціонуючі системи» (1 -30 грудня 2003 р.)*, ВНЗ ВМУРоЛ, Киев, 2003, 90–93.

[12] В. А. Дубко, Е. В. Чалых, "Построение аналитического решения для одного класса уравнений типа Ланжевена с ортогональными случайными воздействиями", *Укр. мат. журн.*, **50**:4 (1998), 666–668.

[13] Е. В. Карачанская, В. А. Дубко, *Применение характеристических функций в теории вероятностей и теории случайных процессов: учебное пособие*, Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, Хабаровск, 2010.

[14] Е. В. Карачанская, "Моментные характеристики и динамика положения диффундирующей на сфере точки под действием пуассоновских скачков", *Вестник Тихоокеанского госуниверситета*, 2012, № 1(24), 69–72.

[15] Е. В. Карачанская, "Об одном обобщении формулы Ито – Вентцеля", *Обозрение прикладной и промышленной математики*, **18**:2 (2011), 494–496.

[16] В. А. Дубко, Е. В. Карачанская, *О двух подходах к построению обобщенной формулы Ито – Вентцеля: препринт № 174*, Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, Хабаровск, 2012.

[17] Е. В. Карачанская, "Обобщенная формула Ито – Вентцеля для случая нецентрированной пуассоновской меры, стохастический первый интеграл и первый интеграл", *Математические труды*, **17**:1 (2014), 299–122.

[18] Е. В. Чалых, "Программное управление с вероятностью 1 для открытых систем", *Обозрение прикладной и промышленной математики*, **14**:2 (2007), 253–254.

[19] Е. В. Чалых, "Построение множества программных управлений с вероятностью 1 для одного класса стохастических систем", *Автоматика и телемеханика*, **70**:8 (2009), 110–122.

[20] Е. В. Карачанская, "Построение программных управлений с вероятностью 1 для динамической системы с пуассоновскими возмущениями", *Вестник Тихоокеанского государственного университета*, 2011, № 2 (21), 51–60.

[21] А. Д. Вентцель Об уравнениях теории условных марковских процессов, *Теория вероятностей и её применение*, **X**:2 (1965), 390–393.

[22] В. А. Дубко, Е. В. Карачанская, *Специальные разделы теории стохастических дифференци альных уравнений: учеб. пособие*, Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, Хабаровск, 2013.

[23] И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения*, Наук. думка, Киев, 1968.

[24] B. Øksendal and T. Zhang, "The Ito-Ventcel formula and forward stochastic differential equation driven by Poisson random measures", *Osaka J. Math.*, **44** (2007), 207–230.

[25] B. Øksendal and A. Sulem and T. Zhang, "A stochastic HJB equation for optimal control of forward-backward SDEs", *http://arxiv.org/abs/1312.1472v1.*

[26] В. А. Дубко, *Стохастические дифференциальные уравнения в некоторых задачах математической физики / Диссертация на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук; Институт математики АН УССР*, Киев, 1979.

[27] В. И. Зубов, *Динамика управляемых систем: Учебное пособие для вузов*, Высшая школа, М., 1982.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 11 мая 2014 г.

Doobko V. A., Karachanskaya E. V. Stochastic First Integrals, Kernel Functions for Integral Invariants and the Kolmogorov equations. Far Eastern Mathematical Journal. 2014. V. 14. № 2. P. 200–216.

ABSTRACT

In this article the authors present stochastic first integrals (SFI), the generalized Itô-Wentzell formula and its application for obtaining the equations for SFI, for kernel functions for integral invariants and the Kolmogorov equations which described by the generalized Itô equations.
Key words: *Stochastic first integrals, Stochastic kernel function, Stochastic integral invariant, the Itô equation with Poisson measure, the Generalized Itô-Wentzell formula, Kolmogorov's equations.*