Дальневосточный математический журнал. 2014. Том 14. № 2. С. 242–247

УДК 519.116 + 511.556
MSC2010 11F20, 11F27

© М. Д. Монина[1]

Об одном трёхчленном тождестве из теории тэта-функций

В работе предложено основанное на арифметических методах Лиувилля новое доказательство трёхчленного тождества из теории тэта-функций.

Ключевые слова: *эллиптическая функция, тэта-функция, методы Лиувилля, трёхчленное тождество.*

Введение

Пусть

$$\vartheta_1(z) = \vartheta_1(z;q) = -i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}e^{(2n+1)iz}, \quad \vartheta_3(z) = \vartheta_3(z;q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}e^{2inz}$$

и

$$H(z,w) = H(z,w;q) = \mathrm{ctg}\ z + \mathrm{ctg}\ w + 4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} q^{2mn}\sin(2mz+2nw)$$

— классические тэта-функции Якоби.

В работах по теории эллиптических функций, опираясь на теорию функций комплексного переменного, Вейерштрасс доказал серию так называемых “трёхчленных тождеств” для тэта-функций. Одно из них (см. [1], стр. 209) имеет следующий вид

$$\vartheta_3(a)\vartheta_3(b)\vartheta_1(c)\vartheta_1(d) + \vartheta_3(a')\vartheta_3(b')\vartheta_1(c')\vartheta_1(d') + \vartheta_3(a'')\vartheta_3(b'')\vartheta_1(c'')\vartheta_1(d'') = 0,$$

где

$$\begin{aligned} a' &= \frac{1}{2}(a+b+c+d), & a'' &= \frac{1}{2}(a+b+c-d),\\ b' &= \frac{1}{2}(a+b-c-d), & b'' &= \frac{1}{2}(a+b-c+d),\\ c' &= \frac{1}{2}(a-b+c-d), & c'' &= \frac{1}{2}(a-b+c+d),\\ d' &= \frac{1}{2}(-a+b+c-d), & d'' &= \frac{1}{2}(a-b-c-d). \end{aligned}$$

[1]Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: monina@iam.khv.ru

После замен

$$a \to -z_2, \quad b \to z_3,$$
$$c \to z_1 + z_4, \quad d \to z_1 - z_2 - z_3 - z_4$$

и использования четности функции ϑ_1 и нечётности функции ϑ_3 оно примет вид

$$\begin{gathered}\vartheta_3(z_2)\vartheta_3(z_3)\vartheta_1(z_1+z_4)\vartheta_1(z_1-z_2-z_3-z_4)+\\ +\vartheta_3(z_3-z_1)\vartheta_3(z_2-z_1)\vartheta_1(z_1+z_3+z_4)\vartheta_1(z_4)+\\ +\vartheta_3(z_3+z_4)\vartheta_3(z_2+z_4)\vartheta_1(-z_1+z_2+z_3)\vartheta_1(z_1)=0.\end{gathered}$$

Умножив обе части последнего равенства на $\vartheta_1'^2$, разделив на

$$\vartheta_1(z_1)\vartheta_1(z_4)\vartheta_1(z_1-z_2-z_3-z_4)$$

и воспользовавшись соотношением

$$\frac{\vartheta_1(z+w)\vartheta_1'}{\vartheta_1(z)\vartheta_1(w)} = H(z,w),$$

придём к следующему утверждению.

Теорема 1. *Для любых комплексных* z_1, z_2, z_3, z_4 *и* $|q|<1$ *выполняется тождество*

$$\begin{gathered}\vartheta_3(z_2;q)\vartheta_3(z_3;q)H(z_1,z_4;q)+\vartheta_3(z_3-z_1;q)\vartheta_3(z_2-z_1;q)H(z_1-z_2-z_3-z_4,-z_1;q)+\\ +\vartheta_3(z_3+z_4;q)\vartheta_3(z_2+z_4;q)H(-z_4,z_2+z_3+z_4-z_1;q)=0.\end{gathered} \tag{1}$$

В настоящей работе предлагается доказательство тождества (1), основанное на арифметических методах Лиувилля (см. [2], [3] и [4]) и идеях работ [5], [6] и [7].

Автор благодарит В.А. Быковского за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

1. Арифметическое тождество

Мы будем придерживаться следующих обозначений:

1) $b_1, b_2, l_1, l_2, m_2, m_3$ — целые числа;
2) d, a, c, m_1, m_4 — положительные целые числа;
3) A — аддитивная абелева группа;
4) $R(m_1, m_2, m_3, m_4) = (m_4, m_3 - m_4, m_2 - m_4, m_1 + m_2 + m_3 - m_4)$. При этом

$$R^3 = -E, \quad R^6 = E,$$

где E — тождественное преобразование.

Доказательство тождества (1) базируется на следующем результате, полученном в работе [7].

Теорема 2. *Пусть $G : \mathbb{Z}^4 \to A$ произвольная функция с $G(-m) = -G(m)$ ($m \in \mathbb{Z}^4$). Тогда для любого натурального d выполняется равенство*

$$\sum_{b_1^2+b_2^2+2ac=d} \Phi(a, b_1, b_2, c) = \sum_{\substack{(a+b_1)^2+(a+b_2)^2=d \\ a+b_1+b_2>0}} \Phi(a, b_1, b_2, a + b_1 + b_2), \tag{2}$$

где

$$\begin{gathered}\Phi(m) = G(m) + G(R^2(m)) + G(R^4(m)) = \\ = G(m_1, m_2, m_3, m_4) + G(m_1 + m_2 + m_3 - m_4, -m_1 - m_3, -m_1 - m_2, -m_1)+ \\ +G(-m_4, -m_3 + m_4, -m_2 + m_4, -m_1 - m_2 - m_3 + m_4).\end{gathered}$$

При замене $a + b_1$ на l_1 и $a + b_2$ на l_2 в правой части тождества (2) получаем, что

$$l_1 + l_2 = 2a + b_1 + b_2 > a > 0.$$

С учетом вышесказанного тождество теоремы 2 приобретает следующий вид:

$$\sum_{b_1^2+b_2^2+2ac=d} \Phi(a, b_1, b_2, c) = \sum_{\substack{l_1^2+l_2^2=d \\ 0<a<l_1+l_2}} \Phi(a, l_1 - a, l_2 - a, l_1 + l_2 - a). \tag{3}$$

2. Трёхчленное уравнение

Пусть

$$x = e^{2iz_1}, v = e^{2iz_2}, u = e^{2iz_3}, y = e^{2iz_4}.$$

Тогда

$$\vartheta_3(z_1; q) = T(x; q) = \sum_{b=-\infty}^{\infty} x^b q^{b^2},$$

$$\frac{1}{2i} H(z_2, z_3; q) = K(u, v; q) = \frac{uv - 1}{(u - 1)(v - 1)} + \sum_{d_1,d_2=1}^{\infty} (u^{-d_1} v^{-d_2} - u^{d_1} v^{d_2}) q^{2d_1d_2} \tag{4}$$

и тождество теоремы 1 приобретает следующий вид:

$$\begin{gathered}T(u; q)T(v; q)K(x, y; q) + T\left(\frac{u}{x}; q\right) T\left(\frac{v}{x}; q\right) K\left(\frac{x}{vuy}, \frac{1}{x}; q\right) + \\ +T(uy; q)T(vy; q)K\left(\frac{1}{y}, \frac{vuy}{x}; q\right) = 0.\end{gathered} \tag{5}$$

Для доказательства последнего положим в теореме 2

$$G(m_1, m_2, m_3, m_4) = x^{m_1} v^{m_2} u^{m_3} y^{m_4} - x^{-m_1} v^{-m_2} u^{-m_3} y^{-m_4}.$$

Тогда

$$\Phi(m_1,m_2,m_3,m_4) = x^{m_1}v^{m_2}u^{m_3}y^{m_4} - x^{-m_1}v^{-m_2}u^{-m_3}y^{-m_4}+$$
$$+x^{m_1+m_2+m_3-m_4}v^{-m_1-m_3}u^{-m_1-m_2}y^{-m_1} - x^{-m_1-m_2-m_3+m_4}v^{m_1+m_3}u^{m_1+m_2}y^{m_1}+$$
$$+x^{-m_4}v^{-m_3+m_4}u^{-m_2+m_4}y^{-m_1-m_2-m_3+m_4} - x^{m_4}v^{m_3-m_4}u^{m_2-m_4}y^{m_1+m_2+m_3-m_4}.$$

Нетрудно проверить, что

$$S_1(d) = \sum_{b_1^2+b_2^2+2ac=d} \Phi(a,b_1,b_2,c) = \sum_{b_1^2+b_2^2+2ac=d} \Bigg(v^{b_1}u^{b_2}\left(x^a y^c - x^{-a}y^{-c}\right) +$$
$$+\left(\frac{u}{x}\right)^{b_1}\left(\frac{v}{x}\right)^{b_2}\left(\left(\frac{vuy}{x}\right)^{-a}x^{-c} - \left(\frac{vuy}{x}\right)^{a}x^{c}\right)+$$
$$+(uy)^{b_1}(vy)^{b_2}\left(y^{-a}\left(\frac{x}{vuy}\right)^{-c} - y^{a}\left(\frac{x}{vuy}\right)^{c}\right)\Bigg).$$

Для правой части тождества (3) получим

$$S_2(d) = \sum_{\substack{l_1^2+l_2^2=d\\ 0<a<l_1+l_2}} \Phi(a, l_1-a, l_2-a, l_1+l_2-a) =$$
$$=\sum_{l_1^2+l_2^2=d}\Bigg((vy)^{l_1}(uy)^{l_2}\sum_{0<a<l_1+l_2}\left(\frac{x}{vuy}\right)^{a} - (vy)^{-l_1}(uy)^{-l_2}\sum_{0<a<l_1+l_2}\left(\frac{x}{vuy}\right)^{-a}+$$
$$+u^{-l_1}v^{-l_2}\sum_{0<a<l_1+l_2}y^{-a} - u^{l_1}v^{l_2}\sum_{0<a<l_1+l_2}y^{a}+$$
$$+\left(\frac{v}{x}\right)^{l_1}\left(\frac{u}{x}\right)^{l_2}\sum_{0<a<l_1+l_2}x^{a} - \left(\frac{v}{x}\right)^{-l_1}\left(\frac{u}{x}\right)^{-l_2}\sum_{0<a<l_1+l_2}x^{-a}\Bigg) =$$
$$=\sum_{\substack{l_1^2+l_2^2=d\\ l_1+l_2>0}}\Bigg(\frac{vuy}{x-vuy}\left(\frac{u}{x}\right)^{-l_1}\left(\frac{v}{x}\right)^{-l_2} - \frac{x}{vuy-x}\left(\frac{u}{x}\right)^{l_1}\left(\frac{v}{x}\right)^{l_2}+$$
$$+\frac{y}{1-y}(uy)^{-l_1}(vy)^{-l_2} - \frac{1}{y-1}(uy)^{l_1}(vy)^{l_2} + \frac{y}{y-1}u^{l_1}v^{l_2} - \frac{1}{1-y}u^{-l_1}v^{-l_2}\Bigg)+$$
$$+\sum_{\substack{l_1^2+l_2^2=d\\ l_1+l_2>0}}\Bigg(\frac{vuy}{vuy-x}(vy)^{-l_1}(uy)^{-l_2} - \frac{x}{x-vuy}(vy)^{l_1}(uy)^{l_2}+$$
$$+\frac{1}{x-1}v^{l_1}u^{l_2} - \frac{x}{1-x}v^{-l_1}u^{-l_2} + \frac{1}{1-x}\left(\frac{v}{x}\right)^{-l_1}\left(\frac{u}{x}\right)^{-l_2} - \frac{x}{x-1}\left(\frac{v}{x}\right)^{l_1}\left(\frac{u}{x}\right)^{l_2}\Bigg).$$

Выполнив в последней сумме замены $l_1 \to l_2$ и $l_2 \to l_1$, находим

$$S_2(d) = \sum_{\substack{l_1^2+l_2^2=d \\ l_1+l_2>0}} \left(\frac{xy-1}{(x-1)(y-1)} \left(u^{-l_1}v^{-l_2} + u^{l_1}v^{l_2}\right) + \right.$$
$$+ \frac{x(1-vuy)}{(x-1)(vuy-1)} \left(\left(\frac{u}{x}\right)^{-l_1} \left(\frac{v}{x}\right)^{-l_2} + \left(\frac{u}{x}\right)^{l_1} \left(\frac{v}{x}\right)^{l_2} \right) +$$
$$\left. + \frac{y(vu-x)}{(1-y)(vuy-x)} \left((uy)^{-l_1} (vy)^{-l_2} + (uy)^{l_1} (vy)^{l_2} \right) \right) =$$
$$= \sum_{\substack{l_1,\, l_2 \in \mathbb{Z} \\ (l_1,l_2)\neq(0,0)}} \left(\frac{xy-1}{(x-1)(y-1)} u^{l_1}v^{l_2} + \right.$$
$$\left. + \frac{x(1-vuy)}{(x-1)(vuy-1)} \left(\frac{u}{x}\right)^{l_1} \left(\frac{v}{x}\right)^{l_2} + \frac{y(vu-x)}{(1-y)(vuy-x)} (uy)^{l_1} (vy)^{l_2} \right).$$

Так как

$$\frac{xy-1}{(x-1)(y-1)} + \frac{x(1-vuy)}{(x-1)(vuy-x)} + \frac{y(vu-x)}{(1-y)(vuy-x)} = 0,$$

то ограничение $(l_1, l_2) \neq (0,0)$ можно снять.

Пусть

$$\tilde{K}(x,y) = \sum_{d_1,d_2=1}^{\infty} (x^{-d_1}y^{-d_2} - x^{d_1}y^{d_2}) q^{2d_1d_2}.$$

Домножим обе части тождества (3) на q^d и просуммируем по всем натуральным d. Принимая во внимание равенство

$$\sum_{b=-\infty}^{\infty} u^b q^{b^2} = 1 + \sum_{b=1}^{\infty} (u^{-b} + u^b) q^{b^2},$$

приходим к соотношению

$$-T(u;q)T(v;q)\tilde{K}(x,y;q) - T\left(\frac{u}{x};q\right) T\left(\frac{v}{x};q\right) \tilde{K}\left(\frac{x}{vuy}, \frac{1}{x};q\right) -$$
$$-T(uy;q)T(vy;q)\tilde{K}\left(\frac{1}{y}, \frac{vuy}{x};q\right) = \frac{xy-1}{(x-1)(y-1)} T(u;q)\,T(v;q) +$$
$$+ \frac{x(1-vuy)}{(x-1)(vuy-x)} T\left(\frac{u}{x};q\right) T\left(\frac{v}{x};q\right) + \frac{y(vu-x)}{(1-y)(vuy-x)} T(uy;q)\,T(vy;q).$$

С помощью равенства (4) оно преобразуется в равенство (5).

Список литературы

[1] K. Weierstraß, *Math. Werke*, Bd. 5, Berlin, 1915.

[2] J. V. Uspensky, M. A. Heaslet, *Elementary Number Theory*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York and London, 1939.

[3] Б. А. Венков, *Элементарная теория чисел*, ОНТИ НКТП СССР, М.; Ленинград, 1937.

[4] Kenneth S. Williams, *Number theory in the spirit of Liouville*, London Mathematical Society Student Texts, 76, Cambridge University Press, 2011.

[5] Н. В. Бударина, В. А. Быковский, “Арифметическая природа тождесв для тройного и пятикратного произведений”, *Дальневосточный математический журнал*, **11**:2 (2011), 140–148.

[6] В. А. Быковский, М. Д. Монина, “Арифметические тождества, ассоциированные с квадратичными формами, и их приложения”, *Доклады Академии наук*, **449**:5 (2013), 503–506.

[7] В. А. Быковский, М. Д. Монина, “Об арифметической природе некоторых тождеств теории эллиптических функций”, *Дальневосточный математический журнал*, **13**:1 (2013), 15–34.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 18 сентября 2014 г.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00335).

Monina M. D. An arithmetic interpretation of a three-term identity from the theta functions theory. Far Eastern Mathematical Journal. 2014. V. 14. № 2. P. 242–247.

ABSTRACT

The article offers the proof of a three-term identity from the theta functions theory, based on Liouville's arithmetical methods.

Key words: *elliptic function, theta function, Liouville's methods, three-term identity.*