Дальневосточный математический журнал. 2014. Том 14. № 2. С. 248–256

УДК 512.572
MSC2010 17B01, 17B63, 16R10

© С. М. Рацеев[1]

О минимальных алгебрах Лейбница – Пуассона полиномиального роста

Пусть $\{\gamma_n(\mathbf{V})\}_{n\geq 1}$ — последовательность собственных коразмерностей многообразия алгебр Лейбница – Пуассона $\mathbf{V}$. В работе приводится класс минимальных многообразий алгебр Лейбница – Пуассона полиномиального роста последовательности $\{\gamma_n(\mathbf{V})\}_{n\geq 1}$, т.е. последовательность $\{\gamma_n(\mathbf{V})\}_{n\geq 1}$ любого такого многообразия $\mathbf{V}$ растет как полином некоторой степени k, но последовательность $\{\gamma_n(\mathbf{W})\}_{n\geq 1}$ любого собственного подмногообразия $\mathbf{W}$ многообразия $\mathbf{V}$ растет как полином строго меньшей степени, чем k.

Ключевые слова: *алгебра Пуассона, алгебра Лейбница – Пуассона, многообразие алгебр, рост многообразия.*

На протяжении всей работы предполагается, если это специально не оговорено, что основное поле имеет нулевую характеристику.

Векторное пространство A над полем K с двумя K-билинейными операциями умножения $\cdot$ и $\{,\}$ называется алгеброй Лейбница – Пуассона, если относительно операции $\cdot$ пространство A является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей, относительно операции $\{,\}$ — алгеброй Лейбница, и данные операции связаны правилами

$$\{a \cdot b, c\} = a \cdot \{b, c\} + \{a, c\} \cdot b,$$

$$\{c, a \cdot b\} = a \cdot \{c, b\} + \{c, a\} \cdot b,$$

где $a, b, c \in A$. При этом алгебра Лейбница $A(+, \{,\}, K)$ над полем K определяется тождеством

$$\{\{x, y\}, z\} = \{\{x, z\}, y\} + \{x, \{y, z\}\}.$$

Заметим, что если в алгебре Лейбница выполнено тождество антикоммутативности $\{x, x\} = 0$, то она будет являться алгеброй Ли, поэтому если тождество антикоммутативности выполнено в алгебре Лейбница – Пуассона, то данная алгебра будет

[1]Ульяновский государственный университет, 432017, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42. Электронная почта: `RatseevSM@mail.ru`

являться алгеброй Пуассона. Таким образом, алгебры Лейбница – Пуассона являются обобщениями алгебр Пуассона, которые возникают естественным образом в некоторых разделах алгебры, дифференциальной геометрии, топологии, современной теоретической физике и т.д.

Договоримся опускать скобки $\{,\}$ при их левонормированной расстановке: $\{\{a,b\},c\} = \{a,b,c\}$.

Пусть $F(X)$ — свободная алгебра Лейбница – Пуассона, где $X = \{x_1, x_2, ...\}$ — счетное множество свободных образующих. Обозначим через P_n пространство в $F(X)$, состоящее из полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, ..., x_n$.

Лемма 1 ([1]). *Базис пространства P_n над произвольным полем состоит из всех элементов вида*

$$x_{k_1} \cdot ... \cdot x_{k_r} \cdot \{x_{i_1}, ..., x_{i_s}\} \cdot ... \cdot \{x_{j_1}, ..., x_{j_t}\}, \tag{1}$$

для каждого из которых выполнены следующие условия:

(i) *$r \geq 0$, $k_1 < ... < k_r$;*

(ii) *каждая из переменных x_1,...,x_n встречается в (1) ровно один раз;*

(iii) *каждый множитель $\{x_{i_1}, ..., x_{i_s}\}$,..., $\{x_{j_1}, ..., x_{j_t}\}$ в (1) левонормирован и имеет длину ≥ 2;*

(iv) *множители в (1) упорядочены по длине: $s \leq ... \leq t$;*

(v) *если два соседних множителя в (1), являющиеся скобками $\{,\}$, имеют одинаковую длину*

$$... \cdot \{x_{p_1}, ..., x_{p_s}\} \cdot \{x_{q_1}, ..., x_{q_s}\} \cdot ...,$$

то $p_1 < q_1$.

Обозначим через Γ_n подпространство в P_n, являющееся линейной оболочкой элементов вида

$$\{x_{i_1}, ..., x_{i_s}\} \cdot ... \cdot \{x_{j_1}, ..., x_{j_t}\}, \quad s \geq 2, ..., \ t \geq 2. \tag{2}$$

Тогда из леммы 1 следует, что базисом пространства Γ_n будут являться все элементы вида (2) с условиями (ii)–(v) из леммы 1.

Пусть $\mathbf{V}$ — некоторое многообразие алгебр Лейбница – Пуассона (все необходимые сведения о многообразиях PI-алгебр можно найти, например, в монографиях [2, 3]). Пусть $\mathrm{Id}(\mathbf{V})$ — идеал тождеств многообразия $\mathbf{V}$. Обозначим

$$\Gamma_n(\mathbf{V}) = \Gamma_n / (\Gamma_n \cap \mathrm{Id}(\mathbf{V})), \quad \gamma_n(\mathbf{V}) = \dim \Gamma_n(\mathbf{V}).$$

Важность изучения пространств $\Gamma_n(\mathbf{V})$ основана на следующем обстоятельстве [1]: в случае основного поля нулевой характеристики идеал тождеств $\mathrm{Id}(\mathbf{V})$ произвольного многообразия алгебр Лейбница – Пуассона $\mathbf{V}$ порождается последовательностью пространств $\Gamma_n \cap \mathrm{Id}(\mathbf{V})$, $n \geq 1$.

Далее нам понадобится следующее утверждение, которое нетрудно проверить.

Лемма 2. *Пусть A — некоторая ассоциативная алгебра с операцией умножения $\wedge$ над произвольным полем K. Рассмотрим декартово произведение*

$C = A \times A \times K$, в котором определим операцию сложения и две операции умножения $\cdot$ и $\{,\}$ элементов множества C:

$$
\begin{gathered}
(x_1, x_2, \alpha) + (y_1, y_2, \beta) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \alpha + \beta),\\
(x_1, x_2, \alpha) \cdot (y_1, y_2, \beta) = (\beta x_1 + \alpha y_1, \beta x_2 + \alpha y_2, \alpha\beta),\\
\{(x_1, x_2, \alpha), (y_1, y_2, \beta)\} = ([x_1, y_1], x_2 \wedge y_1, 0),
\end{gathered}
$$

где $[x_1, y_1] = x_1 \wedge y_1 - y_1 \wedge x_1$, $(x_1, x_2, \alpha), (y_1, y_2, \beta) \in C$. Тогда полученная алгебра C будет алгеброй Лейбница – Пуассона, в которой выполнено тождество $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$.

Пусть $f(n)$ и $g(n)$ — две функции натурального аргумента. Будем обозначать $f(n) \approx g(n)$, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

Пусть Λ_{2k} — алгебра Грассмана с единицей и $2k$-образующими элементами $\{e_1, \ldots, e_{2k}\}$, $G_{2k} = \Lambda_{2k} \times \Lambda_{2k} \times K$ — алгебра Лейбница – Пуассона, построенная с помощью леммы 2.

Теорема 1. *В случае основного поля нулевой характеристики для алгебры Лейбница – Пуассона G_{2k}, $k \geq 1$, верны следующие утверждения:*

1) *идеал тождеств $\mathrm{Id}(G_{2k})$ порождается тождествами*

$$
\begin{gathered}
\{z, \{x_1, x_2, x_3\}\} = 0, \quad \{z, \{x, y\}, \{x, y\}\} = 0,\\
\{z, \{x_1, y_1\}, \ldots, \{x_{k+1}, y_{k+1}\}\} = 0, \quad \{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0;
\end{gathered}
\tag{3}
$$

2) *для любого $n \geq 1$ полилинейные элементы от переменных $x_1, \ldots, x_n$*

$$
\begin{gathered}
\{x_m, x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}, \{x_{j_1}, x_{j_2}\}, \ldots, \{x_{j_{2s-1}}, x_{j_{2s}}\}\},\\
r + 2s + 1 = n,\ i_1 < i_2 < \ldots < i_r,\ j_1 < j_2 < \ldots < j_{2s},\ 0 \leq s \leq k,\ r \geq 0,
\end{gathered}
\tag{4}
$$

образуют базис пространства $\Gamma_n(G_{2k})$;

3) *размерности пространств $\Gamma_n(G_{2k})$ вычисляются по следующей формуле:*

$$
\gamma_n(G_{2k}) = \begin{cases} n2^{n-2}, & 1 < n < 2k+1,\\ n \sum\limits_{i=0}^{k} C_{n-1}^{2i}, & n \geq 2k+1, \end{cases}
$$

причем для любого $n \geq 2k + 1$

$$\gamma_n(G_{2k}) = \gamma_n(G_{2k-2}) + nC_{n-1}^{2k} \approx \frac{n^{2k+1}}{(2k)!},\ n \to \infty,$$

где C_n^k — число сочетаний из n по k;

4) *если $\mathbf{W}$ — некоторое собственное подмногообразие в $\mathrm{var}(G_{2k})$, то найдется такой многочлен $f(x)$ с рациональными коэффициентами, зависящий от $\mathbf{W}$, что для всех достаточно больших n выполнено неравенство $\gamma_n(\mathbf{W}) \leq f(n)$, причем $\deg\ f(x) < 2k + 1$.*

Доказательство. Нетрудно убедиться, что тождества (3) выполнены в алгебре G_{2k}. В работе [4] показано, что если в многообразии алгебр Лейбница выполнены тождества

$$\{z,\{x_1,x_2,x_3\}\}=0,\quad \{z,\{x,y\},\{x,y\}\}=0,$$

то пространство полилинейных элементов степени n относительно свободной алгебры данного многообразия является линейной оболочкой элементов следующего вида

$$\{x_m,x_{i_1},\ldots,x_{i_r},\{x_{j_1},x_{j_2}\},\ldots,\{x_{j_{2s-1}},x_{j_{2s}}\}\},$$
$$r+2s+1=n,\ i_1<i_2<\ldots<i_r,\ j_1<j_2<\ldots<j_{2s},\ s\geq 0,\ r\geq 0.$$

Поэтому $\Gamma_n(G_{2k})$ является линейной оболочкой элементов вида (4). Покажем, что элементы вида (4) линейно независимы. Предположим, что для некоторого n нетривиальная линейная комбинация элементов вида (4) принадлежит идеалу тождеств $\mathrm{Id}(G_{2k})$. Зафиксируем в данной линейной комбинации элемент с наименьшим значением s и ненулевым коэффициентом. Пусть это слагаемое имеет вид

$$\alpha\{x_m,x_{i_1},\ldots,x_{i_r},\{x_{j_1},x_{j_2}\},\ldots,\{x_{j_{2s-1}},x_{j_{2s}}\}\},\quad 0\neq\alpha\in K.$$

Во всей линейной комбинации сделаем такую подстановку:

$$x_m\to(0,1,0),\quad x_{i_q}\to(1,0,0),\ q=1,\ldots,r,\quad x_{j_a}\to(e_a,0,0),\ a=1,\ldots,2s.$$

Тогда все слагаемые, кроме рассматриваемого, будут равны нулю, а данное слагаемое будет равно $\alpha 2^s(0,e_1\wedge e_2\wedge\ldots\wedge e_{2s},0)$. Понятно, что равенство

$$\alpha 2^s(0,e_1\wedge e_2\wedge\ldots\wedge e_{2s},0)=(0,0,0)$$

выполнено лишь в случае $\alpha=0$. Получили противоречие.

В работе [1] показано, что в случае основного поля нулевой характеристики идеал тождеств $\mathrm{Id}(\mathbf{V})$ произвольного многообразия алгебр Лейбница – Пуассона $\mathbf{V}$ порождается последовательностью пространств $\Gamma_n\cap\mathrm{Id}(\mathbf{V})$, $n\geq 1$. Таким образом, условия 1 и 2 доказаны.

Условие 3 следует из условия 2.

Покажем условие 4. Пусть $\mathbf{W}$ — некоторое собственное подмногообразие в $\mathrm{var}(G_{2k})$. Тогда для некоторого n найдется нетривиальная линейная комбинация элементов вида (4), принадлежащая идеалу тождеств $\mathrm{Id}(\mathbf{W})$. В данной линейной комбинации зафиксируем элемент вида (4) с наименьшим значением s и ненулевым коэффициентом. Если $s<k$, то данную линейную комбинацию поочередно справа домножим с помощью умножения $\{,\}$ на $k-s$ скобок $\{y_1,y_2\},\ldots,\{y_{2(k-s)-1},y_{2(k-s)}\}$. Также вместо переменной x_m подставим скобку $\{z_1,z_2\}$. Тогда, с учетом тождеств (3), в многообразии $\mathbf{W}$ выполнено нетривиальное полилинейное тождество вида

$$\sum_{\substack{i_1<\ldots<i_p\\ j_1<\ldots<j_{2k}}}\alpha^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_{2k}}\{z_1,z_2,x_{i_1},\ldots,x_{i_p},\{x_{j_1},x_{j_2}\},\ldots,\{x_{j_{2k-1}},x_{j_{2k}}\}\}=0,\quad \alpha^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_{2k}}\in K,$$

в котором числа p и k фиксированы. Переименовав переменные в данном тождестве, получим полилинейное тождество вида

$$\{z_1, z_2, x_{2k+1}, \ldots, x_{2k+p}, \{x_1, x_2\}, \ldots, \{x_{2k-1}, x_{2k}\}\} = \tag{5}$$

$$= \sum_{\substack{i_1<\ldots<i_p,\ \{i_1,\ldots,i_p\}\neq\{2k+1,\ldots,2k+p\} \\ j_1<\ldots<j_{2k},\ \{j_1,\ldots,j_{2k}\}\neq\{1,\ldots,2k\}}} \beta^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_{2k}} \{z_1, z_2, x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}, \{x_{j_1}, x_{j_2}\}, \ldots, \{x_{j_{2k-1}}, x_{j_{2k}}\}\}.$$

Пусть A и B — два непустых подмножества множества натуральных чисел. Положим $A < B$, если $a < b$ для любых $a \in A$, $b \in B$.

С учетом тождества (5) пространство $\Gamma_n(\mathbf{W})$ для всех достаточно больших n является линейной оболочкой таких элементов вида (4), что для элементов с $s = k$ скобками не выполнено неравенство

$$\{i_{r-p+1}, \ldots, i_r\} > \{j_1, \ldots, j_{2k}\}. \tag{6}$$

Заметим, что число элементов вида (4) с $s = k$ скобками, для которых выполнено неравенство (6), равно nC^{2k}_{n-1-p}. Поэтому

$$c_n(\mathbf{W}) \leq n\left(1 + C^2_{n-1} + \ldots + C^{2k-2}_{n-1} + (C^{2k}_{n-1} - C^{2k}_{n-1-p})\right).$$

Остается заметить, что степень полинома $C^{2k}_{n-1} - C^{2k}_{n-1-p}$ по переменной n строго меньше чем $2k$. □

Пусть $UT_k = UT_k(K)$ — алгебра верхнетреугольных матриц порядка k над полем K. Обозначим чрез $J = \sum_{i=1}^{k-1} e_{i,i+1}$ квадратную матрицу порядка k, которая на диагонали, проходящей выше главной диагонали, содержит единицы, а все остальные элементы этой матрицы равны нулю, e_{ij} — матричные единички. Рассмотрим следующую подалгебру в UT_k над полем K, которая была введена в работе [5]:

$$N_k = \langle E, J, J^2, \ldots, J^{k-2}; e_{12}, e_{13}, \ldots, e_{1k}\rangle_K,$$

где E — единичная матрица порядка k. В работе [6], в частности, показано, что алгебры Λ_{2k}, $k \geq 1$, N_k, $k \geq 3$, порождают минимальные многообразия ассоциативных алгебр полиномиального роста.

Пусть $R_k = N_k \times N_k \times K$ — алгебра Лейбница–Пуассона, построенная с помощью леммы 2. Понятно, что $\mathrm{var}(R_2) = \mathrm{var}(G_0)$.

Теорема 2. *В случае основного поля нулевой характеристики для алгебры Лейбница–Пуассона R_k, $k \geq 3$, верны следующие утверждения:*

1) *идеал тождеств* $\mathrm{Id}(R_k)$ *порождается полилинейными тождествами*

$$\{z, \{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}\} = 0, \quad \{z, \{x_1, \ldots, x_k\}\} = 0, \quad \{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0; \tag{7}$$

2) *для любого* $n \geq 1$ *полилинейные элементы от переменных* $x_1, \ldots, x_n$

$$\{x_m, x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}, \{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_s}\}\}, \tag{8}$$

$$r+s+1=n, \quad i_1<i_2<\ldots<i_r, \quad j_1>j_2<\ldots<j_s,$$
$$0\le s\le k-1, \quad s\ne 1, \quad r\ge 0,$$

образуют базис пространства $\Gamma_n(R_k)$*;*

3) *размерности пространств* $\Gamma_n(R_k)$ *вычисляются по следующей формуле:*

$$\gamma_n(R_k)=\begin{cases} n!, & 1\le n\le \min\{4,k\},\\ n(n-3)2^{n-2}+2n, & 5\le n\le k,\\ n\left(1+\sum\limits_{i=2}^{k-1}(i-1)C_{n-1}^{i}\right), & n\ge k+1,\end{cases}$$

причем для любого $n\ge k+1$

$$\gamma_n(R_k)=\gamma_n(R_{k-1})+n(k-2)C_{n-1}^{k-1}\approx \frac{k-2}{(k-1)!}n^k,\ n\to\infty;$$

4) *если* $\mathbf{W}$ *— некоторое собственное подмногообразие в* $\mathrm{var}(R_k)$*, то найдется такой многочлен* $f(x)=a_0+\ldots+a_kx^k$ *с рациональными коэффициентами, зависящий от* $\mathbf{W}$*, что для всех достаточно больших* n *выполнено неравенство* $\gamma_n(\mathbf{W})\le f(n)$*, причем*

$$a_k\le\frac{k-3}{(k-1)!}.$$

Доказательство. Нетрудно увидеть, что тождества (7) выполнены в алгебре R_k. В работе [7] показано, что если в многообразии алгебр Лейбница $\mathbf{V}$ выполнено тождество

$$\{z,\{x_1,x_2\},\{x_3,x_4\}\}=0,$$

то пространство полилинейных элементов степени n относительно свободной алгебры данного многообразия является линейной оболочкой элементов следующего вида:

$$\{x_m,x_{i_1},\ldots,x_{i_r},\{x_{j_1},x_{j_2},\ldots,x_{j_s}\}\}, \quad i_1<i_2<\ldots<i_r, \quad j_1>j_2<\ldots<j_s, \quad r\ge 0.$$

Поэтому $\Gamma_n(R_k)$ является линейной оболочкой элементов вида (8). Покажем, что элементы вида (8) линейно независимы. Предположим, что для некоторого n нетривиальная линейная комбинация элементов вида (8) принадлежит идеалу тождеств $\mathrm{Id}(R_k)$. Выберем в данной линейной комбинации элемент вида (8) с наименьшим значением s и ненулевым коэффициентом. Пусть это слагаемое имеет вид

$$\alpha\{x_m,x_{i_1},\ldots,x_{i_r},\{x_{j_1},x_{j_2},\ldots,x_{j_s}\}\}, \quad 0\ne\alpha\in K.$$

В рассматриваемой линейной комбинации сделаем такую подстановку:

$$x_m\to(0,E,0),\ x_{i_q}\to(E,0,0),\ q=1,\ldots,r,$$
$$x_{j_1}\to(e_{12},0,0),\ x_{j_2}\to(J,0,0),\ldots,\ x_{j_s}\to(J,0,0).$$

Тогда все слагаемые, кроме данного, станут равны нулю, а линейная комбинация примет один из следующих видов:

$$\alpha(0, E, 0) = (0,0,0), \quad s = 0,$$
$$\alpha(0, e_{s+1}, 0) = (0,0,0), \quad s > 1,$$

что возможно только при $\alpha = 0$. Получили противоречие.

С учетом того, что идеал тождеств $\mathrm{Id}(\mathbf{V})$ произвольного многообразия алгебр Лейбница–Пуассона $\mathbf{V}$ порождается последовательностью пространств $\Gamma_n \cap \mathrm{Id}(\mathbf{V})$, $n \geq 1$, условия 1 и 2 доказаны.

Условие 3 следует из условия 2.

Пусть $\mathbf{W}$ — некоторое собственное подмногообразие в $\mathrm{var}(R_k)$. Тогда для некоторого n элементы вида (8) линейно зависимы в пространстве $P_n(\mathbf{W})$. Поэтому найдется нетривиальная линейная комбинация данных элементов, принадлежащая идеалу тождеств $\mathrm{Id}(\mathbf{W})$. В данной линейной комбинации зафиксируем элемент вида (8) с наименьшим значением s и ненулевым коэффициентом. Для значения s возможны следующие случаи.

a) $s = 0$. В полученной линейной комбинации вместо переменной x_m подставим скобку $\{z_1, \ldots, z_k\}$. Тогда в многообразии $\mathbf{W}$ будет выполнено полилинейное тождество вида

$$\{x_1, \ldots, x_p\} = 0.$$

Поэтому для всех $n \geq p$ будет выполнено равенство $\gamma_n(\mathbf{W}) = 0$.

b) $1 < s < k-1$. Вместо переменной x_{j_1} подставим скобку $\{y_1, \ldots, y_{k-s}\}$, а вместо переменной x_m подставим скобку $\{z_1, \ldots, z_k\}$. Получаем, что в многообразии $\mathbf{W}$ выполнено нетривиальное полилинейное тождество вида

$$\sum_{\substack{i_1<\ldots<i_p \\ j_1<\ldots<j_{s-1}}} \alpha^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_{s-1}} \{z_1, \ldots, z_k, x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}, \{y_1, \ldots, y_{k-s}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_{s-1}}\}\} = 0,$$

в котором числа p, $q = s$ и k фиксированы. Переименовав переменные в данном тождестве, получим полилинейное тождество вида

$$\{z_1, \ldots, z_k, x_q, \ldots, x_{q+p-1}, \{y_1, \ldots, y_{k-q}, x_1, \ldots, x_{q-1}\}\} = \tag{9}$$
$$= \sum_{\substack{i_1<\ldots<i_p,\ \{i_1,\ldots,i_p\}\neq\{q,\ldots,q+p-1\} \\ j_1<\ldots<j_{q-1},\ \{j_1,\ldots,j_{q-1}\}\neq\{1,\ldots,q-1\}}} \beta^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_{q-1}} \cdot$$
$$\cdot \{z_1, \ldots, z_k, x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}, \{y_1, \ldots, y_{k-q}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_{q-1}}\}\},$$

С учетом тождества (9) пространство $\Gamma_n(\mathbf{W})$ для всех достаточно больших n является линейной оболочкой таких элементов вида (8), что для элементов с длиной скобки $s = k-1$ не выполнено неравенство

$$\{i_{r-p+1}, \ldots, i_r\} > \{j_{k-q+1}, \ldots, j_{k-1}\}.$$

Поэтому

$$c_n(\mathbf{W}) \leq n\left(1 + C^2_{n-1} + \ldots + (k-3)C^{k-2}_{n-1} + (k-2)(C^{k-1}_{n-1} - C^{k-1}_{n-1-p})\right) = f(n).$$

Остается заметить, что степень полинома $f(n)$ по переменной строго меньше чем k.

c) $s = k-1$. Тогда в полученной нетривиальной линейной комбинации элементов вида (8) при $s = k-1$ зафиксируем любое слагаемое с ненулевым коэффициентом и сделаем в линейной комбинации такую подстановку: $x_m \to \{z_1, z_2\}$. Тогда в многообразии $\mathbf{W}$ выполнено нетривиальное полилинейное тождество вида

$$\sum_{\substack{i_1<\ldots<i_p \\ j_1>j_2<\ldots<j_{k-1}}} \alpha^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_{k-1}} \{z_1, z_2, x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}, \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_{k-1}}\}\} = 0, \quad \alpha^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_{k-1}} \in K,$$

в котором числа p и k фиксированы. Переименовав переменные в данном тождестве, получим, что элемент

$$\{z_1, z_2, x_k, \ldots, x_{k+p-1}, \{x_{k-1}, x_1, \ldots, x_{k-2}\}\}$$

равен линейной комбинации элементов вида

$$\{z_1, z_2, x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}, \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_{k-1}}\}\},$$

для которых

$$i_1 < \ldots < i_p, \quad j_1 > j_2 < \ldots < j_{k-1},$$

причем либо не выполнено неравенство $\{i_1, \ldots, i_p\} > \{j_1, \ldots, j_{k-1}\}$, либо не выполнено неравенство $j_1 > j_{k-1}$. Поэтому пространство $\Gamma_n(\mathbf{W})$ для всех достаточно больших n является линейной оболочкой таких элементов вида (8), что для элементов с длиной скобки $s = k-1$ либо не выполнено неравенство $\{i_{r-p+1}, \ldots, i_r\} > \{j_1, \ldots, j_{k-1}\}$, либо не выполнено неравенство $j_1 > j_{k-1}$. Поэтому

$$c_n(\mathbf{W}) \leq n\left(1 + C^2_{n-1} + \ldots + (k-3)C^{k-2}_{n-1} + (k-2)C^{k-1}_{n-1} - C^{k-1}_{n-1-p}\right).$$

$\square$

Список литературы

[1] С. М. Рацеев, “Коммутативные алгебры Лейбница–Пуассона полиномиального роста”, *Вестн. Сам. гос. ун-та. Естеств. серия*, **94**:3/1 (2012), 54–65.

[2] Ю. А. Бахтурин, *Тождества в алгебрах Ли*, Наука, М., 1985.

[3] A. Giambruno, M. V. Zaicev, *Polynomial Identities and Asymptotic Methods.* V. 122, Providence R.I., AMS Mathematical Surveys and Monographs, 2005.

[4] Л. Е. Абанина, С. М. Рацеев, “Многообразие алгебр Лейбница, связанное со стандартными тождествами”, *Вестн. Сам. гос. ун-та. Естеств. серия*, **40**:6 (2005), 36–50.

[5] A. Giambruno, D. La Mattina, V. M. Petrogradsky, “Matrix algebras of polynomial codimention growth”, *Israel J. Math.*, **158** (2007), 367–378.

[6] D. La Mattina, “Varieties of almost polynomial growth: classifying their subvarieties”, *Manuscripta Math.*, **123**:2 (2007), 185–203.

[7] S. P. Mishchenko, A. Valenti, “A Leibniz variety with almost polynomial growth”, *J. Pure Appl. Algebra*, **202**:1-3 (2005), 82–101.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 4 июня 2014 г.

Ratseev S. M. On minimal Leibniz – Poisson algebras of polynomial growth. Far Eastern Mathematical Journal. 2014. V. 14. № 2. P. 248–256.

ABSTRACT

Let $\{\gamma_n(\mathbf{V})\}_{n\geq 1}$ be the sequence of proper codimension growth of a variety of Leibniz – Poisson algebras $\mathbf{V}$. We give one class of minimal varieties of Leibniz – Poisson algebras of polynomial growth of the sequence $\{\gamma_n(\mathbf{V})\}_{n\geq 1}$, i.e. the sequence of proper codimensions of any such variety grows as a polynomial of some degree k, but the sequence of proper codimensions of any proper subvariety grows as a polynomial of degree strictly less than k.

Key words: *Poisson algebra, Leibniz – Poisson algebra, variety of algebras, growth of a variety.*