Дальневосточный математический журнал. 2014. Том 14. № 2. С. 257–269

УДК 517.5
MSC2010 30A10, 30C10, 30C15

© Р. Р. Салимов[1]

О кольцевых Q-отображениях относительно неконформного модуля

В работе рассматриваются открытые дискретные кольцевые Q-отображения относительно p-модуля в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Для таких отображений установлена оценка искажения расстояний логарифмического типа. Получена оценка меры образа шара. Для гомеоморфных отображений исследовано асимптотическое поведение в точке.

Ключевые слова: *p-модуль, p-емкость, Q-отображения, Q-гомеоморфизмы.*

Введение

Напомним некоторые определения. Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Борелевская функция $\varrho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства кривых Γ в $\mathbb{R}^n$, если

$$\int\limits_{\gamma} \varrho(x)\, ds \geqslant 1 \tag{1}$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. В дальнейшем запись $\varrho \in \mathrm{adm}\Gamma$ будет означать, что $\varrho(x)$ есть допустимая функция для семейства Γ.

Пусть $p \geqslant 1$. Тогда *p-модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\varrho \in \mathrm{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varrho^p(x)\, dm(x). \tag{2}$$

Здесь m обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Предположим, что $n - 1 < p < n$ и

$$M_p(f\Gamma) \leqslant K\, M_p(\Gamma) \tag{3}$$

[1]Институт прикладной математики и механики Национальной академии наук Украины, ул. Р. Люксембург, 74, 83114, г. Донецк. Электронная почта: ruslan623@yandex.ru

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D. При дополнительном предположении, что f в (3) является гомеоморфизмом, Герингом установлено, что тогда отображение f является *локально липшицеввым*, а точнее, для всех $x_0 \in D$ справедлива оценка

$$\limsup_{x\to x_0}\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|}\leqslant K^{\frac{1}{n-p}},$$

(см., напр., теорему 2 в [1]).

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, и пусть $Q: D\to[0,\infty]$ — измеримая функция. Гомеоморфизм $f: D\to\mathbb{R}^n$ будем называть *Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля*, если

$$M_p(f\Gamma)\leqslant\int\limits_D Q(x)\cdot\varrho^p(x)\,dm(x) \tag{4}$$

для любого семейства Γ путей в D и любой допустимой функции ϱ для Γ.

При $p=n$ проблема локального поведения Q-гомеоморфизмов изучалась в случае, когда $Q\in \mathrm{BMO}$ (ограниченного среднего колебания), в случае, когда $Q\in\mathrm{FMO}$ (конечного среднего колебания) и в других случаях, см. монографию [2]. В работе [3] было показано, что Q-гомеоморфизмы в случае, когда $Q\in \mathrm{L^1_{loc}(D)}$, принадлежат классу Соболева $W^{1,1}_{loc}$ и дифференцируемы почти всюду. Определение Q-гомеоморфизма относительно p-модуля при $p\neq n$ впервые встречается в работе [4]. В работе [5] неравенство вида (4) уставлено для отображений квазиконформных в среднем при $p\neq n$. В этом контексте необходимо также упомянуть работы В.Я. Гутлянского, К. Бишопа, О. Мартио и М. Вуоринена, [6], Ю.Ф. Стругова, [7] и многих других.

Запись $f: D\to\mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f задано в области D и непрерывно. Отображение $f: D\to\mathbb{R}^n$ называется *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y\in\mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек, и *открытым*, если образ любого открытого множества $U\subseteq D$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$.

Напомним следующие термины. Пусть $E,F\subseteq\mathbb{R}^n$ — произвольные множества. Обозначим через $\Delta(E,F,D)$ семейство всех кривых $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, которые соединяют E и F в D, т. е. $\gamma(a)\in E$, $\gamma(b)\in F$ и $\gamma(t)\in D$ при $a<t<b$. Пусть $d_0=\mathrm{dist}(\mathrm{x_0},\partial\mathrm{D})$ и пусть $Q: D\to[0,\infty]$ — измеримая по Лебегу функция. Положим

$$\mathbb{A}(x_0,r_1,r_2)=\{x\in\mathbb{R}^n: r_1<|x-x_0|<r_2\}, \tag{5}$$

$$S_i=S(x_0,r_i)=\{x\in\mathbb{R}^n: |x-x_0|=r_i\},\qquad i=1,2. \tag{6}$$

Будем говорить, что отображение $f: D\to\mathbb{R}^n$ является *кольцевым Q-отображением относительно p-модуля в точке $x_0\in D$,* $(1<p\leqslant n)$ если соотношение

$$M_p\left(\Delta\left(fS_1,fS_2,fD\right)\right)\leqslant\int\limits_{\mathbb{A}} Q(x)\cdot\eta^p(|x-x_0|)\,dm(x) \tag{7}$$

выполнено для любого кольца $\mathbb{A}=\mathbb{A}(x_0,r_1,r_2)$, $0<r_1<r_2<d_0$ и для каждой измеримой функции $\eta:(r_1,r_2)\to[0,\infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)\,dr\geqslant 1. \tag{8}$$

Говорят, что отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$ является *кольцевым Q-отображением относительно p-модуля в области D*, если условие (7) выполнено для всех точек $x_0 \in D$. Свойства кольцевых Q-отображений при $p = n$ изучались в работах [8], [9] и при $p \neq n$ в [10]–[12].

Развиваемая в работе теория кольцевых Q-отображений относительно p-модуля применима, в частности, к отображениям квазиконформным в среднем (см. [5], [13]) и к так называемым (p, q)-квазиконформным отображениям (см. [14]), которые использовались при изучении проблемы Ю. Решетняка о суперпозиции функций пространств Соболева (см. напр., [15]–[17]). Также теория кольцевых Q-отображений применима к отображениям с конечным искажением класса Орлича – Соболева $W^{1,\varphi}_{loc}$ при наличии условия Кальдерона и, в частности, к классам Соболева $W^{1,p}_{loc}$ при $p > n - 1$ (см. [18]–[21]). В работах [22], [23] приводятся приложения кольцевых Q-гомеоморфизмов к исследованию локального и граничного поведения гомеоморфных решений с обобщенными производными и к задаче Дирихле для уравнений Бельтрами с вырождением.

В дальнейшем, мы придерживаемся следующих стандартных соглашений: $a/\infty = 0$ для $a \neq \infty$ и $a/0 = \infty$ для $a > 0$ и $0 \cdot \infty = 0$ (см., напр., [24, с. 6]). Ниже приведен критерий принадлежности классу кольцевых Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля, который ранее был установлен в работе [11] (см. теорему 1).

Теорема 1. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и пусть $Q : D \to [0, \infty]$ — локально интегрируемая функция. Гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{R}^n$ является кольцевым Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля в точке $x_0 \in D$ тогда и только тогда, когда для любых $0 < r_1 < r_2 < d_0 = dist(x_0, \partial D)$*

$$M_p\left(\Delta\left(fS_1, fS_2, fD\right)\right) \leqslant \frac{\omega_{n-1}}{I^{p-1}}, \tag{9}$$

где S_1 и S_2 — сферы $S(x_0, r_1)$ и $S(x_0, r_2)$, ω_{n-1} — площадь единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, $I = I(x_0, r_1, r_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}$, $q_{x_0}(r)$ — среднее значение функции $Q(x)$ над сферой $S(x_0, r)$. Отметим также, что инфимум в выражении справа в (7) достигается для функции

$$\eta_0(r) = \begin{cases} \frac{1}{I r^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(r)}, & \textit{если} \quad r \in (r_1, r_2), \\ 0, & \textit{если} \quad r \in \mathbb{R} \setminus (r_1, r_2). \end{cases} \tag{10}$$

1. Предварительные замечания

Напомним, что семейство кривых Γ_1 *минорируется* семейством Γ_2, если для каждой кривой $\gamma \in \Gamma_1$ существует подкривая, которая принадлежит семейству Γ_2. В этом случае мы будем писать: $\Gamma_1 > \Gamma_2$. Известно, что если $\Gamma_1 > \Gamma_2$, то $M_p(\Gamma_1) \leqslant M_p(\Gamma_2)$ (см. теорему 6.4 в [25]).

Следующие важные определения можно найти в [26] (см. раздел 3 гл. II). Пусть $f : D \to \mathbb{R}^n$, $\beta : [a, b) \to \mathbb{R}^n$ — некоторая кривая и пусть $x \in f^{-1}(\beta(a))$. Кривая

$\alpha : [a,\, c) \to D$ называется *максимальным поднятием* кривой β при отображении f с началом в точке x, если (i) $\alpha(a) = x$; (ii) $f \circ \alpha = \beta|_{[a,\, c)}$; (iii) если $c < c' \leqslant b$, то не существует кривой $\alpha' : [a, c') \to D$ такой, что $\alpha = \alpha'|_{[a,c)}$ и $f \circ \alpha' = \beta|_{[a,c')}$. Пусть f — открытое дискретное отображение и $x \in f^{-1}(\beta(a))$. Тогда кривая $\beta : [a, b) \to \mathbb{R}^n$ имеет максимальное поднятие при отображении f с началом в точке x, (см. следствие 3.3 главы II в [26]).

В дальнейшем нам понадобятся понятия конденсатора и ёмкости конденсатора,(см., напр., § 5 в [27] или раздел 10 главы 2 в [26]). Пару $\mathcal{E} = (A, C)$, где $A \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество и C – непустое компактное множество, содержащееся в A, называем *конденсатором.* Конденсатор $\mathcal{E}$ называется *кольцевым конденсатором*, если $B = A \setminus C$ — кольцо, т. е. если B — область, дополнение которой $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B$ состоит в точности из двух компонент. Конденсатор $\mathcal{E}$ называется *ограниченным конденсатором*, если множество A является ограниченным. Говорят также, что конденсатор $\mathcal{E} = (A, C)$ лежит в области D, если $A \subset D$. Очевидно, что если $f : D \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное, открытое отображение и $\mathcal{E} = (A, C)$ — конденсатор в D, то (fA, fC) также конденсатор в fD. Далее $f\mathcal{E} = (fA, fC)$.

Пусть $\mathcal{E} = (A, C)$ — конденсатор. Обозначим через $C_0(A)$ множество непрерывных функций $u : A \to \mathbb{R}^1$ с компактным носителем. $W_0(E) = W_0(A, C)$ — семейство неотрицательных функций $u : A \to \mathbb{R}^1$ таких, что 1) $u \in C_0(A)$, 2) $u(x) \geqslant 1$ для $x \in C$ и 3) u принадлежит классу ACL и пусть

$$|\nabla u| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2}. \tag{11}$$

При $p \geqslant 1$ величину

$$\operatorname{cap}_p \mathcal{E} = \operatorname{cap}_p (A, C) = \inf_{u \in W_0(\mathcal{E})} \int\limits_A |\nabla u|^p \, dm(x) \tag{12}$$

называют *p-ёмкостью* конденсатора $\mathcal{E}$. Емкости в контексте теории отображений хорошо представлены в монографии [28].

Предложение 1. *Пусть $\mathcal{E} = (A, C)$ — произвольный конденсатор в $\mathbb{R}^n$ и пусть $\Gamma_{\mathcal{E}}$ — семейство всех кривых вида $\gamma : [a, b) \to A$ с $\gamma(a) \in C$ и $|\gamma| \cap (A \setminus F) \neq \varnothing$ для произвольного компакта $F \subset A$. Тогда $\operatorname{cap_p}\mathcal{E} = M_p(\Gamma_{\mathcal{E}})$ (см. предложение 10.2 главы II в [26]).*

Известно, что при $1 < p < n$

$$\operatorname{cap}_p \mathcal{E} \geqslant n \Omega_n^{\frac{p}{n}} \left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1} [m(C)]^{\frac{n-p}{n}}, \tag{13}$$

где Ω_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$ (см., напр., п. 1.4. в [29]).

Если множество C связно, то при $n - 1 < p \leqslant n$ имеет место оценка

$$(\operatorname{cap_p} \mathcal{E})^{n-1} \geqslant \gamma \, \frac{d(C)^p}{m(A)^{1-n+p}}, \tag{14}$$

где $d(C)$ — диаметр множества C, γ — положительная константа, зависящая только от размерности n и p (см. предложение 6 в [13]).

2. Об оценке искажения p-емкости, меры и расстояния

Ниже приведена лемма об оценке искажения p-емкости сферического конденсатора при кольцевых Q-отображениях относительно p-модуля.

Лемма 1. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $f : D \to D'$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение относительно p-модуля и*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \frac{Q(x)\,dm(x)}{|x-x_0|^p} \leqslant C_{x_0} \cdot \ln^{\kappa}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right), \qquad 0 \leqslant \kappa < p, \tag{15}$$

для любых $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. Тогда при $1 < p < n$ имеем

$$\operatorname{cap}_p\ \left(fB(x_0,\varepsilon_2)\,, f\overline{B(x_0,\varepsilon_1)}\right) \leqslant C_{x_0} \cdot \ln^{\kappa-p}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right). \tag{16}$$

Доказательство. Рассмотрим сферическое кольцо $\mathbb{A} = \mathbb{A}(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \{x : \varepsilon_1 < |x_0 - x| < \varepsilon_2\}$, $x_0 \in D$, с произвольными ε_1 и ε_2 такими, что $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \delta_0$, $B(x_0,\delta_0) \subset D$. Тогда $\mathcal{E} = \left(B\left(x_0,\varepsilon_2\right), \overline{B\left(x_0,\varepsilon_1\right)}\right)$ — конденсатор в D, а $f\mathcal{E} = \left(fB\left(x_0,\varepsilon_2\right), f\overline{B\left(x_0,\varepsilon_1\right)}\right)$ — конденсатор в D'. Пусть $\Gamma_{\mathcal{E}}$ — семейство кривых из предложения 1 и $\Gamma_{f\mathcal{E}}$ — аналогичное семейство в образе. По этому предложению

$$\operatorname{cap}_p\ \left(fB(x_0,\varepsilon_2)\,, f\overline{B(x_0,\varepsilon_1)}\right) = M_p\left(\Gamma_{f\mathcal{E}}\right). \tag{17}$$

Пусть Γ^* — семейство максимальных поднятий $\Gamma_{f\mathcal{E}}$ с началом в $\overline{B\left(x_0,\varepsilon_1\right)}$. Покажем, что $\Gamma^* \subset \Gamma_{\mathcal{E}}$. Предположим противное, т. е. что существует кривая $\beta : [a,b) \to \mathbb{R}^n$ семейства $\Gamma_{f\mathcal{E}}$, для которой соответствующее максимальное поднятие $\alpha : [a,c) \to B(x_0,\varepsilon_2)$ лежит в некотором компакте $\mathcal{K}$ внутри $B(x_0,\varepsilon_2)$. Следовательно, его замыкание $\overline{\alpha}$ — компакт в $B(x_0,\varepsilon_2)$. Заметим, что $c \neq b$, поскольку в противном случае $\overline{\beta}$ — компакт в $fB(x_0,\varepsilon_2)$, что противоречит условию $\beta \in \Gamma_{f\mathcal{E}}$. Рассмотрим множество

$$G = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x = \lim_{k\to\infty} \alpha(t_k)\right\}, \qquad t_k \in [a,\, c),\ \lim_{k\to\infty} t_k = c.$$

Отметим, что переходя к подпоследовательностям, здесь можно ограничиться монотонными последовательностями t_k. Для $x \in G$, в силу непрерывности отображения f, получаем, что $f\left(\alpha(t_k)\right) \to f(x)$ при $k \to \infty$, где $t_k \in [a,c), t_k \to c$ при $k \to \infty$. Однако, $f\left(\alpha(t_k)\right) = \beta(t_k) \to \beta(c)$ при $k \to \infty$. Отсюда заключаем, что f постоянна на G в $B(x_0,\varepsilon_2)$. С другой стороны, по условию Кантора в компакте $\overline{\alpha}$ (см. 3.6 гл. I в [30]),

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\alpha\left([t_k,\, c)\right)} = \limsup_{k\to\infty} \alpha\left([t_k,\, c)\right) = \liminf_{k\to\infty} \alpha\left([t_k,\, c)\right) \neq \varnothing$$

в силу монотонности относительно последовательности связных множеств $\alpha\left([t_k,\, c)\right)$ и, таким образом, G является связным по I (9.12) в [30]. Далее, в силу дискретности отображения f, множество G не может состоять более чем из одной точки и кривая $\alpha : [a,c) \to B(x_0,\varepsilon_2)$ продолжается до замкнутой кривой $\alpha : [a,c] \to \mathcal{K} \subset B(x_0,\varepsilon_2)$, причем $f\left(\alpha(c)\right) = \beta(c)$. Снова, по следствию 3.3 главы II в [26], можно построить максимальное поднятие α' кривой $\beta|_{[c,b)}$ с началом в точке $\alpha(c)$. Объединяя поднятия α и α', получаем новое поднятие α'' кривой β, которое определено на $[a,c')$, $c' \in (c,b)$, что противоречит максимальности поднятия α. Таким образом, $\Gamma^* \subset \Gamma_{\mathcal{E}}$. Заметим, что $\Gamma_{f\mathcal{E}} > f\Gamma^*$, и, следовательно,

$$M_p\left(\Gamma_{f\mathcal{E}}\right) \leqslant M_p\left(f\Gamma^*\right) \leqslant M_p\left(f\Gamma_{\mathcal{E}}\right).$$

Рассмотрим произвольную последовательность чисел $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\varepsilon_1 < r_i < \varepsilon_2$, такую, что $r_i \to \varepsilon_2 - 0$. Обозначим через Γ_i семейство кривых, соединяющих сферы $S(x_0,\varepsilon_1)$ и $S(x_0,r_i)$ в кольце $\mathbb{A}(x_0,\varepsilon_1,r_i)$. В таком случае для любого $i \in \mathbb{N}$ заключаем, что

$$\Gamma_{\mathcal{E}} > \Gamma_i. \tag{18}$$

Рассмотрим параметрическое семейство вещественнозначных функций

$$\eta_{i,\varepsilon_1}(t) = \begin{cases} \frac{1}{t\ln\left(\frac{r_i}{\varepsilon_1}\right)}, & \text{если} \quad t \in (\varepsilon_1, r_i), \\ 0, & \text{если} \quad t \in \mathbb{R} \setminus (\varepsilon_1, r_i). \end{cases}$$

По определению кольцевого Q-отображения относительно p-модуля и в силу (18), имеем оценку

$$M_p(f\Gamma_{\mathcal{E}}) \leqslant M_p(f\Gamma_i) \leqslant \int\limits_{\mathbb{A}(x_0,\varepsilon_1,r_i)} \frac{Q(x)\,dm(x)}{|x-x_0|^p \ln^p\left(\frac{r_i}{\varepsilon_1}\right)}. \tag{19}$$

Из условия (15) вытекает оценка

$$M_p(f\Gamma_{\mathcal{E}}) \leqslant C_{x_0} \cdot \ln^{\kappa - p}\left(\frac{r_i}{\varepsilon_1}\right). \tag{20}$$

Переходя в неравенстве (20) к пределу при $i \to \infty$, получим

$$M_p(f\Gamma_{\mathcal{E}}) \leqslant C_{x_0} \cdot \ln^{\kappa - p}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right). \tag{21}$$

Наконец, комбинируя (17) и (21), получаем оценку (16). □

Теорема 2. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $f : D \to D'$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение относительно p-модуля и*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \frac{Q(x)\,dm(x)}{|x-x_0|^p} \leqslant C_{x_0} \cdot \ln^{\kappa}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right), \qquad 0 \leqslant \kappa < p, \tag{22}$$

для любых $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<\mathrm{dist}(x_0,\partial D)$. *Тогда при* $1<p<n$ *имеем*

$$m(fB(x_0,\varepsilon))\leqslant\lambda_0\,C_{x_0}^{\frac{n}{n-p}}\ln^{-\frac{(p-\kappa)n}{n-p}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),\qquad(23)$$

для всех $\varepsilon<\delta_0\leqslant\min\{1,\mathrm{dist}^2(x_0,\partial D)\}$, *где* $\lambda_0=\lambda(n,p,\kappa)$ *— положительная постоянная, зависящая только от* n, p *и* κ.

Доказательство. Рассмотрим конденсатор $\mathcal{E}_\varepsilon=(B(x_0,\sqrt{\varepsilon})\,,\overline{B(x_0,\varepsilon)})$. В силу леммы 1, имеем оценку:

$$\mathrm{cap}_p\,f\mathcal{E}_\varepsilon\leqslant 2^{p-\kappa}C_{x_0}\cdot\ln^{\kappa-p}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).\qquad(24)$$

Используя соотношение (13), получаем

$$\mathrm{cap}_p\,f\mathcal{E}_\varepsilon\geqslant C'_{n,p}\left[m(fB(x_0,\varepsilon))\right]^{\frac{n-p}{n}},\qquad(25)$$

где $C'_{n,p}$ — константа, зависящая только от размерности пространства n и p.

Комбинируя (24) и (25), заключаем, что

$$m(fB(x_0,\varepsilon))\leqslant\lambda_0\,C_{x_0}^{\frac{n}{n-p}}\ln^{-\frac{(p-\kappa)n}{n-p}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),\qquad(26)$$

где $\lambda_0=\lambda(n,p,\kappa)=2^{\frac{n(p-\kappa)}{n-p}}c_{n,p}$ — положительная постоянная, зависящая только от n, p и κ. □

Теорема 3. *Пусть* D *и* D' *— области в* $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, *и* $f:D\to D'$ *— открытое дискретное кольцевое* Q*-отображение относительно* p*-модуля и*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)}\frac{Q(x)\,dm(x)}{|x-x_0|^p}\leqslant C_{x_0}\cdot\ln^{\kappa}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right),\qquad 0\leqslant\kappa<p,\qquad(27)$$

для любых $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<\mathrm{dist}(x_0,\partial D)$. *Тогда при* $n-1<p<n$ *имеем*

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant\lambda_0\,C_{x_0}^{\frac{1}{n-p}}\ln^{-\frac{p-\kappa}{n-p}}\frac{1}{|x-x_0|},\qquad(28)$$

для всех $x\in B(x_0,\delta_0)$, *где* $\delta_0\leqslant\min\{1,\mathrm{dist}^4(x_0,\partial D)\}$ *и* $\lambda_0=\lambda(n,p,\kappa)$ *— положительная постоянная, зависящая только от* n, p *и* κ.

Доказательство. Полагаем $\varepsilon=|x-x_0|<\delta_0$. Рассмотрим конденсатор

$$\mathcal{E}_\varepsilon=\left(B(x_0,\sqrt{\varepsilon})\,,\overline{B(x_0,\varepsilon)}\right).$$

Из леммы 1 следует оценка

$$\mathrm{cap}_p\,f\mathcal{E}_\varepsilon\leqslant 2^{p-\kappa}C_{x_0}\cdot\ln^{\kappa-p}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).\qquad(29)$$

С другой стороны, согласно неравенству (14), получаем

$$\operatorname{cap}_p f\mathcal{E}_\varepsilon \geqslant \left(C_{n,p}\frac{d^p(fB(x_0,\varepsilon))}{m^{1-n+p}(fB(x_0,\sqrt{\varepsilon}))}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \qquad (30)$$

где $C_{n,p}$ — положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p.

Из (29) и (30) следует, что

$$d(fB(x_0,\varepsilon)) \leqslant \lambda_{n,p,\kappa}\cdot C_{x_0}^{\frac{n-1}{p}}\cdot \ln^{-\frac{(n-1)(p-\kappa)}{p}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) m^{1-n+p}(fB(x_0,\sqrt{\varepsilon})). \qquad (31)$$

Из теоремы 2 вытекает оценка для меры образа шара $B(x_0,\sqrt{\varepsilon})$

$$m(fB(x_0,\sqrt{\varepsilon})) \leqslant 2^{\frac{n(p-\kappa)}{n-p}}\lambda_0 C_{x_0}^{\frac{n}{n-p}}\ln^{-\frac{(p-\kappa)n}{n-p}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \qquad (32)$$

Наконец, комбинируя (31) и (32), получаем

$$d(fB(x_0,\varepsilon)) \leqslant \lambda_0 C_{x_0}^{\frac{1}{n-p}}\ \ln^{-\frac{p-\kappa}{n-p}}\frac{1}{\varepsilon}.$$

Оценка искажения расстояний вытекает из очевидного неравенства $d(fB(x_0,\varepsilon)) \geqslant |f(x)-f(x_0)|$. □

Следствие 1. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение относительно p-модуля при $n-1<p<n$ с $Q(x) \in L_{\frac{n}{n-p}}(B(x_0,\delta_0))$. Тогда*

$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant \lambda_0 \|Q\|_{\frac{n}{n-p}}^{\frac{1}{n-p}} \ln^{-\frac{p(n-1)}{n(n-p)}}\frac{1}{|x-x_0|} \qquad (33)$$

для всех $x \in B(x_0,\delta_0)$, где $\delta_0 \leqslant \min\{1, \mathrm{dist}^4(x_0,\partial D)\}$,

$$\|Q\|_{\frac{n}{n-p}} = \left(\int\limits_{B(x_0,\delta_0)} Q^{\frac{n}{n-p}}(x)\,dm(x)\right)^{\frac{n-p}{n}}$$

— норма в пространстве $L_{\frac{n}{n-p}}(B(x_0,\delta_0))$ и $\lambda_0 = \lambda(n,p)$ — положительная постоянная, зависящая только от n и p.

Доказательство. Действительно, применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \frac{Q(x)\,dm(x)}{|x-x_0|^p} \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} Q^{\frac{n}{n-p}}(x)\,dm(x)\right)^{\frac{n-p}{n}} \left(\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \frac{dm(x)}{|x-x_0|^n}\right)^{\frac{p}{n}}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \frac{Q(x)\,dm(x)}{|x-x_0|^p} \leqslant \left(\int\limits_{B(x_0,\delta_0)} Q^{\frac{n}{n-p}}(x)\,dm(x)\right)^{\frac{n-p}{n}} \left(\omega_{n-1}\ln\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\right)^{\frac{p}{n}}.$$

Применяя теорему 3 с $\kappa = \frac{p}{n}$ и $C_{x_0} = \omega_{n-1}^{\frac{p}{n}}\|Q\|_{\frac{n}{n-p}}$, получаем оценку (33). □

Теорема 4. *Пусть D и D' — области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $f : D \to D'$ — открытое дискретное кольцевое Q-отображение относительно p-модуля и*

$$q_{x_0}(t) \leqslant K_{x_0} \cdot t^{p-n} \tag{34}$$

для почти всех $0 < t < \delta_0 \leqslant \min\{1, \mathrm{dist}^4(\mathrm{x}_0, \partial\mathrm{D})$. Тогда при $n-1 < p < n$ имеем

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \lambda_0 \cdot K_{x_0}^{\frac{1}{n-p}} \ln^{-\frac{p-1}{n-p}} \frac{1}{|x-x_0|}, \tag{35}$$

для всех $x \in B(x_0, \delta_0)$, где $\delta_0 \leqslant \min\{1, \mathrm{dist}^4\,(x_0, \partial D)\}$ и $\lambda_0 = \lambda(n,p)$ — положительная постоянная, зависящая только от n и p.

Доказательство. Действительно, используя условие (34) и теорему Фубини, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{A}(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \frac{Q(x)\,dm(x)}{|x-x_0|^p} = \omega_{n-1}\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} q_{x_0}(t)t^{n-p-1}\,dt \leqslant \omega_{n-1}K_{x_0}\int\limits_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\frac{dt}{t} = \omega_{n-1}K_{x_0}\ln\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right).$$

Применяя теорему 3 с $\kappa = 1$ и $C_{x_0} = \omega_{n-1}K_{x_0}$, получаем оценку (35). □

3. Асимптотическое поведение в точке гомеоморфных отображений

Теорема 2, приведенная в предыдущей секции, позволяет нам также описать асимптотическое поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля в нуле.

Теорема 5. *Пусть $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ — кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля, $n \geqslant 2$ и $f(0) = 0$. Если*

$$\int\limits_{\mathbb{A}(0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)} \frac{Q(x)}{|x|^p}\,dm(x) \leqslant C_0 \cdot \ln^{\kappa}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right), \qquad 0 \leqslant \kappa < p, \tag{36}$$

для любых $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 1$. Тогда при $1 < p < n$ справедлива оценка

$$\liminf_{x\to 0} |f(x)| \cdot \ln^{\frac{p-\kappa}{n-p}} \frac{1}{|x|} \leqslant \beta \cdot C_0^{\frac{1}{n-p}}, \tag{37}$$

где β — положительная постоянная, зависящая только от n, p и κ.

Доказательство. Положим $l_f(\varepsilon)=\min\limits_{|x|=\varepsilon}|f(x)|$. Тогда, учитывая, что $f(0)=0$, получаем $\Omega_n\, l_f^n(\varepsilon)\leqslant m(fB(0,\varepsilon))$ и, следовательно,

$$l_f(\varepsilon)\leqslant\left(\frac{m(fB(0,\varepsilon))}{\Omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}. \tag{38}$$

В силу неравенства (38) и теоремы 2, имеем оценку

$$l_f(\varepsilon)\leqslant\left(\frac{\lambda_0}{\Omega_n}\right)^{\frac{1}{n}} C_0^{\frac{1}{n-p}}\ln^{-\frac{p-\kappa}{n-p}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \tag{39}$$

Таким образом, заключаем

$$\liminf_{x\to0}|f(x)|\cdot\ln^{\frac{p-\kappa}{n-p}}\frac{1}{|x|}=\liminf_{\varepsilon\to0}l_f(\varepsilon)\cdot\ln^{\frac{p-\kappa}{n-p}}\frac{1}{\varepsilon}\leqslant\left(\frac{\lambda_0}{\Omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}C_0^{\frac{1}{n-p}},$$

Теорема доказана. □

Следствие 2. *Пусть $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$ — кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля, $n\geqslant2$ и $f(0)=0$, $Q(x)\in L_{\frac{n}{n-p}}(\mathbb{B}^n)$. Тогда*

$$\liminf_{x\to0}|f(x)|\cdot\ln^{\frac{p-\kappa}{n-p}}\frac{1}{|x|}\leqslant\lambda_0\,\|Q\|_{\frac{n}{n-p}}^{\frac{1}{n-p}}, \tag{40}$$

где $\|Q\|_{\frac{n}{n-p}}=\left(\int\limits_{\mathbb{B}^n}Q^{\frac{n}{n-p}}(x)\right)^{\frac{n-p}{n}}$ *— норма в пространстве $L_{\frac{n}{n-p}}(\mathbb{B}^n)$ и $\lambda_0=\lambda(n,p,\kappa)$ — положительная постоянная, зависящая только от n, p и κ.*

Следствие 3. *Пусть $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$ — кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля, $n\geqslant2$ с $f(0)=0$ и*

$$q(t)\leqslant K\cdot t^{p-n} \tag{41}$$

для почти всех $0<t<1$. Тогда имеем

$$\liminf_{x\to0}|f(x)|\cdot\ln^{\frac{p-1}{n-p}}\frac{1}{|x|}\leqslant\lambda_0K^{\frac{1}{n-p}}, \tag{42}$$

где $\lambda_0=\lambda(n,p)$ — положительная постоянная, зависящая только от n и p.

Приведем пример такого кольцевого Q-гомеоморфизма относительно p-модуля, который покажет, что оценка (42) является точной.

Пример. Предположим, что $1<p<n$. Пусть $f:\mathbb{B}^n\to\mathbb{B}^n$, где

$$f(x)=\frac{x}{|x|}\left(1+\frac{n-p}{p-1}\ln\frac{1}{|x|}\right)^{-\frac{p-1}{n-p}}$$

при $x\neq0$ и $f(0)=0$. Покажем, что отображение, определенное таким образом, является кольцевым Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля с $Q(x)=|x|^{p-n}$ в точке $x_0 = 0$. Очевидно, что $q_{x_0}(t) = t^{p-n}$. Рассмотрим кольцо $\mathbb{A} = \mathbb{A}(0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < 1$. Заметим, что отображение f преобразует кольцо $\mathbb{A}(0, r_1, r_2)$ в кольцо $\widetilde{\mathbb{A}} = \widetilde{\mathbb{A}}\,(0, \widetilde{r}_1, \widetilde{r}_2)$, где

$$\widetilde{r}_i = \left(1 + \frac{n-p}{p-1}\int\limits_{r_i}^{1} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{-\frac{p-1}{n-p}}, \qquad i = 1, 2.$$

Обозначим через Γ семейство всех кривых, соединяющих сферы $S(0, r_1)$ и $S(0, r_2)$ в кольце $\mathbb{A}$. Тогда p-модуль семейства кривых $f\Gamma$ вычисляется в явном виде (см., напр., соотношение (2) в [1, с. 177]):

$$M_p(f\Gamma) = \omega_{n-1}\left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{\frac{1}{p-1}}\left((\widetilde{r}_1)^{\frac{p-n}{p-1}} - (\widetilde{r}_2)^{\frac{p-n}{p-1}}\right)^{1-p}. \tag{43}$$

Подставляя в (43) значения $\widetilde{r}_1$ и $\widetilde{r}_2$, определенные выше, получаем, что

$$M_p(f\Gamma) = \frac{\omega_{n-1}}{\left(\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} q_{x_0}^{\frac{1}{p-1}}(t)}\right)^{p-1}}.$$

Следовательно, в силу теоремы 1, гомеоморфизм f является кольцевым Q-гомеоморфизмом относительно p-модуля в точке $x_0 = 0$ с $Q(x) = |x|^{p-n}$. Заметим, что $Q(x) \notin L_{\frac{n}{n-p}}(\mathbb{B}^n)$. Тем не менее, легко проверить, что

$$\lim_{x\to 0} |f(x)| \cdot \ln^{\frac{p-1}{n-p}} \frac{1}{|x|} = \left(\frac{p-1}{n-p}\right)^{\frac{p-1}{n-p}}.$$

Список литературы

[1] F.W. Gehring, “Lipschitz mappings and the p-capacity of ring in n-space”, *Advances in the theory of Riemann surfaces (Proc. Conf. Stonybrook, N.Y., 1969), Ann. of Math. Studies.*, **66** (1971), 175—193.

[2] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro and E. Yakubov, *Moduli in Modern Mapping Theory*, Springer Monographs in Mathematies: – Springer, New York, 2009.

[3] Р.Р. Салимов, “Абсолютная непрерывность на линиях и дифференцируемость одного обобщения квазиконформных отображений”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:5 (2008), 141—148.

[4] A. Golberg, “Differential properties of (α, Q)-homeomorphisms”, *Further Progress in Analysis, World Scientific Publ.*, 2009, 218–228.

[5] A. Golberg, “Integrally quasiconformal mappings in space”, *Збiрник праць Iн-ту математики НАН України*, **7**:2 (2010), 53–64.

[6] C.J. Bishop, V.Ya. Gutlyanskii, O. Martio, M. Vuorinen, “On conformal dilatation in space”, *Intern. Journ. Math. and Math. Scie.*, **22** (2003), 1397–1420.

[7] Ю.Ф. Стругов, “Компактность классов отображений, квазиконформных в среднем”, *ДАН СССР*, **243**:4 (1978), 859–861.

[8] Р.Р. Салимов, Е.А. Севостьянов, “Теория кольцевых Q–отображений в геометрической теории функций”, *Матем. сборник*, **201**:6 (2010), 131—158.

[9] Р.Р. Салимов, Е.А. Севостьянов, “О внутренних дилатациях Q–отображений с неограниченной характеристикой”, *Укр. матем. вестник*, **8**:1 (2011), 129–143.

[10] R.R. Salimov, “On finitely Lipschitz space mappings”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **8** (2011), 284–295.

[11] Р.Р. Салимов, “Об оценке меры образа шара”, *Сиб. матем. журн.*, **53**:4 (2012), 920—930.

[12] Р.Р. Салимов, “О липшицевости одного класса отображений”, *Матем. заметки*, **94**:4 (2013), 591–599.

[13] В.И. Кругликов, “Ёмкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем”, *Матем. сборник.*, **130**:2 (1986), 185–206.

[14] С.К. Водопьянов, А.Д. Ухлов, “Операторы суперпозиции в пространствах Соболева”, *Изв. вузов. Матем.*, 2002, № 10, 11—33.

[15] С.К. Водопьянов, А.Д. Ухлов, “Операторы суперпозиции в пространствах Лебега и дифференцируемость квазиаддитивных функций множества”, *Владикавк. матем. журн.*, **4**:1 (2002), 11—33.

[16] S.K. Vodop’yanov, “Description of composition operators of Sobolev spaces”, *Doklady Mathematics*, **71**:1 (2005), 5—9.

[17] S.K. Vodopyanov, “Composition operators on Sobolev spaces”, *Complex Analysis and Dynamical Systems II, Contemporary Mathematics Series,*, **382** (2005), 401—415.

[18] D.A. Kovtonyuk, V.I. Ryazanov, R.R. Salimov, E.A. Sevost’yanov, “On mappings in the Orlicz-Sobolev classes”, *Ann. Univ.Bucharest, Ser. Math*, **3**:1 (2012), 67—78.

[19] Д.А. Ковтонюк, В.И. Рязанов, Р.Р. Салимов, Е.А. Севостьянов, “К теории классов Орлича-Соболева”, *Алгебра и анализ*, **25**:6 (2013), 50–102.

[20] Д.А. Ковтонюк, В.И. Рязанов, Р.Р. Салимов, Е.А. Севостьянов, “Граничное поведение классов Орлича-Соболева”, *Матем. заметки*, **95**:4 (2014), 564–576.

[21] Е.С. Афанасьева, В.И. Рязанов, Р.Р. Салимов, “Об отображениях в классах Орлича–Соболева на римановых многообразиях”, *Укр. мат. вестник*, **8**:3 (2011), 319—342.

[22] T. Lomako, R. Salimov, E. Sevost’yanov, “On equicontinuity of solutions to the Beltrami equations”, *Ann. Univ. Bucharest, Math. Ser*, **LIX**:2 (2010), 263–274.

[23] Д.А. Ковтонюк, И.В. Петков, В.И. Рязанов, Р.Р. Салимов, “Граничное поведение и задача Дирихле для уравнений Бельтрами”, *Алгебра и анализ*, **25**:4 (2013), 101—124.

[24] С. Сакс, *Теория интеграла*, ИЛ, М., 1949.

[25] J. Väisälä, *Conformal Geometry and Quasiregular mappings, Lecture Notes in Math.* Т. 229, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[26] S. Rickman, *Quasiregular mappings, Results in Mathematic and Related Areas (3).* Т. 26, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[27] O. Martio, S. Rickman and J. Väisälä, “Definitions for quasiregular mappings”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1*, **448** (1969), 1–40.

[28] В.М. Гольдштейн, Ю.Г. Решетняк, *Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения*, Наука, М., 1983.

[29] В.Г. Мазья, “Классы областей, мер и емкостей в теории пространств дифференцируемых функций”, *Анализ – 3, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, ВИНИТИ, М.*, **26** (1988), 159—228.

[30] G.T.Whyburn, *Analytic topology*, American Mathematical Society, Rhode Island, 1942.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 20 марта 2014 г.

Salimov R. R. On ring Q-mappings with respect to non-conformal modulus. Far Eastern Mathematical Journal. 2014. V. 14. № 2. P. 257–269.

ABSTRACT

The paper is devoted to the development of the theory of open discrete ring Q-mappings with respect to p-modulus in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. For such mappings, it is established a distance distortion estimate of the logarithmic type. It is also established a measure estimate for the ball image. Finally, it is investigated the asymptotic behavior for homeomorphic mappings.
Key words: *p-modulus, p-capacity, Q-mappings, Q-homeomorphisms.*