*Дальневосточный математический журнал.* 2014. Том 14. № 2. С. 270–279

УДК 519.7+519.8
MSC2010 30A10, 30C10, 30C15

© В. О. Филиппова[1]

# Минимизация интервальной квадратичной функции в гильбертовом пространстве

Рассматривается задача поиска минимума квадратичной функции с интервальным коэффициентом. Предлагается понятие $p$-универсального решения данной задачи. Доказано существование и единственность $p$-универсальных решений интервальной задачи минимизации квадратичной функции, представлен алгоритм их нахождения и проведено их сравнение. В качестве примера изучена интервальная краевая задача для уравнения Пуассона.

Ключевые слова: *Интервальные задачи, квадратичная функция, принцип Лагранжа.*

## Введение

Задачи с интервальными параметрами представляют интерес с практической точки зрения в связи с неопределенностью данных, на основе которых строятся математические модели. С другой стороны, рассмотрение интервальных задач интересно с теоретической точки зрения, поскольку возникающие экстремальные задачи являются нелинейными, даже тогда, когда условия оптимальности линейны.

В настоящей работе рассмотрена постановка задачи минимизации интервальной квадратичной функции в гильбертовом пространстве. Предлагается понятие $p$-универсального решения данной задачи, основанное на понятии универсального решения. Основной результат работы состоит в доказательстве существования $p$-универсальных решений задачи минимизации интервальной квадратичной функции и обосновании алгоритма их нахождения. Указанная задача является абстрактным вариантом интервальной краевой задачи для дифференциальных уравнений. В качестве примера изучена интервальная краевая задача для уравнения

[1]Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8; Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: ovioy@list.ru

Пуассона. Понятие универсального решения для различных интервальных задач рассмотрено в [1], [2]. Указанное понятие близко к различным вариантам определения решений некорректных задач [3]. Отметим также работы [4]–[8], где изучены конечномерные интервальные задачи на экстремум.

# 1. Постановка интервальной задачи на экстремум

Пусть $V$ — вещественное гильбертово пространство. Рассмотрим линейный оператор $A : V \to V$ такой, что $(Au, v) = (u, Av)$ и $(Au, u) \geq \gamma\|u\|^2$, $\gamma > 0$. Из указанных свойств линейного оператора следует, что существует ограниченный обратный оператор $A^{-1} : V \to V$. Рассмотрим задачу минимизации квадратичной функции:

$$J(a, u) = \frac{a}{2}(Au, u) - (b, u) \to \inf, \qquad u \in V, \tag{1}$$

с неопределенным коэффициентом $a$ из замкнутого интервала

$$0 < a_1 \leq a \leq a_2. \tag{2}$$

Здесь $b \in V$ — заданный элемент.

Требуется определить для функции (1) с коэффициентом $a$ из неопределенного интервала (2) понятия минимума, точки минимума и указать процедуры их нахождения.

Число $a$ из интервала (2) будем называть *допустимым*. Заметим, что для каждого допустимого $a$ минимум функционала $J$ достигается в точке

$$\widehat{u} = \frac{1}{a}A^{-1}b, \tag{3}$$

при этом соответствующее значение функционала

$$J(\widehat{u}) = -\frac{1}{2a}(A^{-1}b, b). \tag{4}$$

Главная идея подхода, используемого в данной работе, состоит в следующем. Пусть требуется решить интервальную задачу на экстремум

$$J(a, u) \to \min, \qquad u \in V, \tag{5}$$

где $a \in [a_1, a_2]$. Обозначим через $J_*$ функцию $a \in [a_1, a_2] \to J_*(a) = \inf\limits_{u \in V} J(a, u)$ и предположим, что $J_* \in L^p(a_1, a_2)$, $p \geq 1$. В пространстве Лебега $L^p(a_1, a_2)$ рассмотрим множество функций

$$M = \big\{a \in [a_1, a_2] \to J(a, u) : \quad u \in V\big\}.$$

Задачу интервальной оптимизации можно теперь рассматривать как задачу нахождения проекции функции $J_*$ в пространстве $L^p(a_1, a_2)$ на множество $M$, то есть будем искать элемент $u \in V$ такой, что

$$\|J(\cdot, u) - J_*\|_{L^p(a_1,a_2)} \to \inf, \qquad u \in V.$$

Отметим, что выбор различных показателей $p \geq 1$ и различных метрик в $L^p(a_1, a_2)$ будет приводить к различным алгоритмам решения интервальной задачи (5).

Применение данного подхода к интервальной задаче (1), (2) приводит к следующему понятию *p-универсального* решения.

**Определение.** *Элемент $u \in V$, минимизирующий функционал*

$$\left(\int\limits_{a_1}^{a_2} \rho(a) \left(\frac{a}{2}(Au, u) - (b, u) + \frac{1}{2a}(A^{-1}b, b)\right)^p da\right)^{\frac{1}{p}} \to \inf, \quad u \in V, \tag{6}$$

*называется p-универсальным решением задачи* (1), (2), *$p > 1$. Здесь функция $\rho$ : $[a_1, a_2] \to (0, +\infty)$ — заданный вес.*

**Замечание.** Наиболее употребляемой нормой при решении интервальных задач является равномерная норма, или норма Чебышева. В случае $p = +\infty$ задача (6) сводится к минимизации чебышевской нормы.

# 2. Нахождение *p-универсального* решения интервальной задачи на экстремум

## 2.1. Универсальное решение при $p = +\infty$

Задача (6) при $p = +\infty$ принимает вид

$$\max_{a_1 \leq a \leq a_2} \left(\frac{a}{2}(Au, u) - (b, u) + \frac{1}{2a}(A^{-1}b, b)\right) \to \inf, \qquad u \in V. \tag{7}$$

Назовем решение задачи (7) универсальным решением задачи 1, (2).

**Замечание.** Пусть $\varepsilon > 0$. Назовем *$\varepsilon$-решением* задачи (1), (2) элемент $u \in V$ такой, что

$$J(u) - J(\widehat{u}) \leq \varepsilon$$

для всех допустимых $a$. Универсальное решение задачи (1)), (2) дает *$\varepsilon$-решение* с минимально возможным значением параметра $\varepsilon > 0$.

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Для каждого $b \in V$ существует единственное универсальное решение задачи (1), (2), определяемое выражением*

$$u_* = \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} A^{-1} b.$$

*Доказательство.* Для фиксированного элемента $u \in V$ рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(a) = \frac{a}{2}(Au, u) + \frac{1}{2a}(A^{-1}b, b), \qquad a > 0.$$

Функция $\varphi(a)$ убывает на интервале $(0, a_0)$, где

$$a_0 = \sqrt{(A^{-1}b, b)/(Au, u)},$$

и возрастает на $(a_0, +\infty)$. Следовательно, максимум функции $\varphi$ на отрезке $[a_1, a_2]$ достигается либо в точке $a_1$, либо в точке $a_2$ :

$$\max_{a_1 \le a \le a_2} \varphi(a) = \max\{\varphi(a_1), \varphi(a_2)\}. \tag{8}$$

Таким образом, задача (7) эквивалентна следующей задаче на экстремум:

$$\max\left(\frac{a_1}{2}(Au, u) - (b, u) + \frac{1}{2a_1}(A^{-1}b, b), \frac{a_2}{2}(Au, u) - (b, u) + \frac{1}{2a_2}(A^{-1}b, b)\right) \to \inf, \tag{9}$$

где $u \in V$.

Отметим, что задача (9) является задачей минимизации строго выпуклой непрерывной коэрцитивной функции. Следовательно решение $u_*$ задачи (9) существует и является единственным.

Покажем далее, что элемент $u_*$ удовлетворяет равенству

$$(Au_*, u_*) = \frac{1}{a_1 a_2}(A^{-1}b, b). \tag{10}$$

Рассмотрим квадратичные функции

$$\Psi(u, a_i) = \frac{a_i}{2}(Au, u) - (b, u) + \frac{1}{2a_i}(A^{-1}b, b), \qquad i = 1, 2;\ u \in V.$$

Так как $u_*$ — решение задачи (9), отсюда следует, что

$$\max(\Psi(u_*, a_1), \Psi(u_*, a_2)) \le \max(\Psi(u, a_1), \Psi(u, a_2)), \qquad \forall u \in V. \tag{11}$$

Допустим, $u_*$ не удовлетворяет условию (10). Тогда $\Psi(u_*, a_1) \ne \Psi(u_*, a_2)$. Пусть, например, $\Psi(u_*, a_1) < \Psi(u_*, a_2)$. Обозначим $w = u_* - \delta g$, где $g = a_2 A u_* - b$ и $\delta > 0$. Заметим, что $g \ne 0$. Действительно, если $g = 0$, то есть $u_* = \frac{1}{a_2}A^{-1}b$, значение $\Psi(u_*, a_2) = 0$. Поэтому $\Psi(u_*, a_1) = \frac{(a_2 - a_1)^2}{2a_1 a_2^2}(A^{-1}b, b) < 0$, что неверно.

Покажем, что при малых $\delta$

$$\Psi(u_*, a_2) > \Psi(w, a_2). \tag{12}$$

Поскольку

$$\Psi(u_*, a_2) - \Psi(w, a_2) = \delta \parallel g \parallel^2 - \frac{a_2}{2}\delta^2 (Ag, g),$$

то условие (12) выполняется, если $0 < \delta < \frac{2\|g\|^2}{a_2 (Ag, g)}$. Кроме того, так как

$$\Psi(w, a_2) - \Psi(w, a_1) = \Psi(u_*, a_2) - \Psi(u_*, a_1) - \delta(a_2 - a_1)(Au_*, g) + \frac{\delta^2}{2}(a_2 - a_1)(Ag, g),$$

то при достаточно малых $\delta$, заключаем, что

$$\max(\Psi(w,a_1),\Psi(w,a_2)) = \Psi(w,a_2).$$

Теперь, учитывая условие (11), получаем

$$\Psi(w,a_2) < \Psi(u_*,a_2) \le \max(\Psi(w,a_1),\Psi(w,a_2)) = \Psi(w,a_2)$$

Полученное противоречие означает выполнение равенства

$$\Psi(u_*,a_1) = \Psi(u_*,a_2),$$

из которого следует утверждение (10).

Таким образом, каждое решение задачи (9) является решением следующей задачи условной минимизации:

$$\Psi(u,a_1) \to \min, \quad u \in V, \quad (Au,u) = \frac{1}{a_1 a_2}(A^{-1}b,b). \tag{13}$$

Если $u_* \in V, u_* \neq 0$, — решение задачи (13), то, в соответствии с принципом Лагранжа [9],

$$(L'_u(u_*,\lambda),v) = 0 \quad \forall v \in V.$$

Здесь $L(u,\lambda) = \Psi(u,a_1) + \lambda((Au,u) - \frac{1}{a_1a_2}(A^{-1}b,b)), u \in V, \lambda \in \mathrm{R}$ — функция Лагранжа. Следовательно,

$$((a_1+2\lambda)Au_* - b, v) = 0, \quad v \in V.$$

Из условия (10) и равенства $(a_1+2\lambda)Au_* = b$ получаем значение универсального решения $u_* = \frac{1}{\sqrt{a_1a_2}}A^{-1}b$. □

## 2.2. Существование *p-универсального* решения, $1 < p < +\infty$

Корректность введенного понятия *p-универсального* решения задачи (1), (2) вытекает из следующей теоремы.

**Теорема 2.** *Пусть $1 < p < +\infty$. Тогда существует единственное $p$-*универсальное *решение интервальной задачи (1), (2).*

*Доказательство.* Нахождение *p-универсального* решения сводится к задаче минимизации функционала

$$F(u) = \int\limits_{a_1}^{a_2} \rho(a) \left(\frac{a}{2}(Au,u) - (b,u) + \frac{1}{2a}(A^{-1}b,b)\right)^p da, \qquad u \in V. \tag{14}$$

Вычислим дифференциал Гато функционала $F$:

$$F'(u,\varphi) = p\int\limits_{a_1}^{a_2} \rho(a) \left(\frac{a}{2}(Au,u) - (b,u) + \frac{1}{2a}(A^{-1}b,b)\right)^{p-1} (aAu - b,\varphi)da.$$

Заметим, что отображение $F'(u,\varphi)$ является линейным и непрерывным по $\varphi \in V$, так как
$$|F'(u,\varphi)| \le C\|\varphi\|,$$
где $C = p\int_{a_1}^{a_2} \rho(a)\left(\frac{a}{2}(Au,u)-(b,u)+\frac{1}{2a}(A^{-1}b,b)\right)^{p-1}\|aAu-b\|da$ не зависит от $\varphi$.

Для доказательства строгой выпуклости функционала $F$ вычислим второй дифференциал Гато:
$$F''(u,\varphi,\varphi) = p\int\limits_{a_1}^{a_2}\rho(a)\Bigg((p-1)\left(\frac{a}{2}\right)^{2p-4}(Aw,w)^{2p-4}(aAu-b,\varphi)^2 + \\ + \left(\frac{a}{2}\right)^{2p-2}(Aw,w)^{2p-2}(aA\varphi,\varphi)\Bigg)da \ge 0, \quad (15)$$
здесь $w = u - \frac{1}{a}A^{-1}b$.

Предположим, что существуют $u_0 \in V$, $\varphi \in V$, $\varphi \ne 0$, такие, что $F''(u_0,\varphi,\varphi)=0$. Тогда $w_0 = 0$, то есть $u_0 - \frac{1}{a}A^{-1}b = 0$, что неверно для любых $a$ из допустимого интервала. Поэтому $F-$ строго выпуклый функционал.

Функционал $F-$ полунепрерывный снизу, так как является выпуклым и дифференцируемым по Гато.

Покажем, что функционал $F$ является коэрцитивным. Заметим, что
$$F(u) \ge \left(\frac{\gamma a_1}{2}\|u\|^2 - (b,u)\right)^p \int\limits_{a_1}^{a_2}\rho(a)da.$$
Следовательно, $F(u)\to+\infty$ при $\|u\|\to+\infty$.

Из указанных свойств $F$ следует, что *p-универсальное* решение интервальной задачи (1), (2) существует и является единственным. □

## 2.3. *1-универсальное* решение

Найдем *p-универсальное* решение для $p=1$ с различными весовыми функциями. Сначала выберем $\rho \equiv 1$. Тогда задача (6) сводится к следующей:
$$\int\limits_{a_1}^{a_2}\left(\frac{a}{2}(Au,u)-(b,u)+\frac{1}{2a}(A^{-1}b,b)\right)da \to \inf, \qquad u\in V. \quad (16)$$

Вычислив интеграл, легко проверить, что единственное решение задачи (16) определяется выражением
$$u_1 = \frac{2}{a_1+a_2}A^{-1}b. \quad (17)$$

**Замечание.** Интересно заметить, что такое же решение получается, если использовать следующий подход.

Для фиксированного значения параметра $a$ задача минимизации функционала $J(u) = \frac{a}{2}(Au, u) - (b, u)$ равносильна решению операторного уравнения

$$aAu = b. \tag{18}$$

Рассмотрим задачу нахождения решения операторного уравнения (18) с интервальным коэффициентом $a \in [a_1, a_2]$. Элемент $u_\varepsilon \in V$ такой, что

$$\|aAu_\varepsilon - b\| \le \varepsilon, \quad \forall a \in [a_1, a_2],$$

назовем *$\varepsilon$-решением* задачи (18).

В качестве решения задачи минимизации (1), (2) выберем *$\varepsilon$-решение* уравнения (18) с минимально возможным $\varepsilon$. Таким образом, задача нахождения решения сводится к следующей экстремальной задаче:

$$\max\{\|a_1Au - b\|^2, \|a_2Au - b\|^2\} \to \inf, \quad u \in V. \tag{19}$$

Решение задачи (19) находим аналогично тому, как находили решение задачи (7). Единственное решение имеет вид

$$u_1 = \frac{2}{a_1 + a_2} A^{-1}b,$$

которое совпадает с (17).

Рассмотрим теперь нахождение *1-универсального* решения для весовой функции $\rho(a) = \frac{1}{a^3}$, $a \in [a_1, a_2]$.

Тогда задача (6) сводится к следующей:

$$\frac{1}{2}\int_{a_1}^{a_2} \left(\frac{1}{2a^2}(Au, u) - \frac{1}{a^3}(b, u) + \frac{1}{2a^4}(A^{-1}b, b)\right) da \to \inf, \qquad u \in V. \tag{20}$$

В этом случае простые вычисления показывают, что единственное решение задачи (20) определяется выражением

$$u_{-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) A^{-1}b. \tag{21}$$

**Замечание.** Заметим, что решение (22) получается, если использовать следующий подход.

Рассмотрим функционал (4). Как видно, минимум $J(\widehat{u})$ зависит от неопределенного параметра $a$ и при $a_1 \le a \le a_2$ принимает значения $J_1 \le J(\widehat{u}) \le J_2$, где

$$J_i(\widehat{u}) = -\frac{1}{2a_i}(A^{-1}b, b), \qquad i = 1, 2. \tag{22}$$

Будем искать число $a_{<-1>}$, соответствующее минимуму функционала $J$, который определяется выражением (4), при $J(\widehat{u}) = \widehat{J}$, совпадающему с серединой отрезка

$$\widehat{J} = \frac{1}{2}(J_1 + J_2).$$

Так как $J(\widehat{u})$ монотонно возрастет по $a$, то при любой допустимой реализации неопределенного параметра $a$ отклонение минимума $J(\widehat{u})$ от $\widehat{J}$ будет наименьшим:

$$\min_{J_1 \le \widehat{J} \le J_2} \max_{a \in [a_1, a_2]} |J(\widehat{u}) - \widehat{J}| = \frac{1}{2}(J_2 - J_1).$$

Таким образом, искомое $a_{<-1>}$ является единственным корнем уравнения

$$J(\widehat{u}) = -\frac{1}{2a}(A^{-1}b, b) = \widehat{J}.$$

Отсюда находим представление

$$a_{<-1>} = \frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2}, \qquad u_{-1} = \frac{a_1 + a_2}{2a_1a_2}A^{-1}b, \tag{23}$$

которое совпадает с (22).

Интересно сравнить значение функционала $J$ на найденных *p-универсальных* решениях, то есть при различных показателях $p \ge 1$ и различных метриках в $L^p(a_1, a_2)$. Подставив соответствующие значения $a_* = \sqrt{a_1a_2}$, $a_{<1>} = \frac{a_1+a_2}{2}$ и $a_{<-1>} = \frac{2a_1a_2}{(a_1+a_2)}$ в (4) получаем

$$J(u_*) = -\frac{B}{2\sqrt{a_1a_2}}, \qquad J(u_1) = -\frac{B}{a_1 + a_2}, \qquad J(u_{-1}) = -\frac{B}{4}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right),$$

где $B = (A^{-1}b, b)$. Заметим, что формулы для нахождения $a$ являются частными случаями степенных средних. В силу неравенства о средних, $J(u_{-1}) < J(u_*) < J(u_1)$.

## 3. Интервальная краевая задача для уравнения Пуассона

Рассмотрим интервальную краевую задачу для уравнения Пуассона

$$-a\Delta u(x) = f(x), \qquad x \in \Omega, \qquad u\,|_\Gamma = 0, \tag{24}$$

которая описывает стационарное распределение температуры в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. $\Gamma = \partial\Omega$, $a \in [a_1, a_2]$ — неопределенный коэффициент температуропроводности, $f \in L^2(\Omega)$ — известная функция.

Задача нахождения слабого решения (24) эквивалентна следующей задаче на экстремум:

$$J(u) = \frac{a}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega fu\,dx \to inf, \qquad u \in V. \tag{25}$$

Здесь $V = H_0^1(\Omega)$ — пространство Соболева;

$$H_0^1(\Omega) = \left\{v \in L^2(\Omega) : \nabla v \in L^2(\Omega), v\,|_\Gamma = 0\right\}.$$

Скалярное произведение и норма в пространстве $V$ определяются следующим образом:

$$(u,v) = \int\limits_\Omega \nabla u \nabla v\,dx, \qquad \|v\| = \int_\Omega |\nabla v|^2\,dx, \qquad u,v \in V.$$

В силу действия теоремы Рисса существует единственный элемент $b \in V$ такой, что

$$(b,v) = \int\limits_\Omega \nabla b \nabla v\,dx = \int\limits_\Omega fv\,dx, \qquad \forall v \in V. \tag{26}$$

Таким образом, интервальная краевая задача сводится к интервальной задаче на экстремум

$$J(u) = \frac{a}{2}(u,u) - (b,u) \to inf, \qquad u \in V, \tag{27}$$

с неопределенным коэффициентом $a \in [a_1, a_2]$.

*P-универсальным* решением интервальной краевой задачи (25) назовем *p-универсальное* решение, соответствующей задачи (1), (2), где в качестве пространства $V$ выберем $H_0^1(\Omega)$, $A$ — тождественный оператор, а элемент $b$ определяем формулой (26).

**Теорема 3.** *Для любой функции $f \in L^2(\Omega)$ существует единственное p-универсальное решение краевой задачи (24).*

Указанное утверждение следует из теоремы 1 при $p = \infty$ и из теоремы 2 при $1 < p < +\infty$.

Отметим, что функция $b \in H_0^1(\Omega)$ является слабым решением краевой задачи (26) с коэффициентом температуропроводности, равным 1, то есть

$$-\triangle b(x) = f(x), \qquad x \in \Omega, \qquad b\,|_\Gamma = 0.$$

В соответствии с результатами, полученными в §2, *p-универсальное* решение интервальной краевой задачи (24) находится путем умножения функции $b$ на величину $\frac{1}{<a>}$, где $< a >$ – одно из средних значений чисел $a_1$ и $a_2$, в частности:

$$< a > = \begin{cases} \sqrt{a_1 a_2}, & \text{если} \quad p = +\infty, \\ \frac{a_1+a_2}{2}, & \text{если} \quad p = 1, \rho = 1, \\ \frac{2a_1a_2}{a_1+a_2}, & \text{если} \quad p = 1, \rho = \frac{1}{a^3}. \end{cases} \tag{28}$$

# Список литературы


[1] Л. Т. Ащепков, Д. В. Давыдов, *Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления.* Т. 151, Наука, М, 2006.

[2] L. T. Aschepkov, D. V. Dolgy, “The universal solution of interval systems of linear algebraical equations”, *Intern. J. Software Eng. and Knowledge Eng.*, 1993, 477–485.

[3] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М, 1979.

[4] Л. Т. Ащепков, И. Б. Косогорова, “Минимизация квадратичной функции с интервальными коэффициентами”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **42**:5 (2002), 653–664.

[5] Л. Т. Ащепков, Д. В. Давыдов, “Стабилизация наблюдаемой линейной системы управления с постоянными интервальными коэффициентами”, *Математика, Изв. ВУЗов*, **477**:2 (2002), 11–17.

[6] А. В. Захаров, Ю. И. Шокин, “Синтез систем управления приинтервальной неопределенности параметров и их математических моделей”, *Докл. АН СССР*, **299**:2 (1988).

[7] А. В. Лакеев, С. И. Носков, “О множестве решений линейного уравнения с интервально заданным оператором и правой частью”, *Сиб. мат. журн.*, **35**:5 (1994), 1074–1084.

[8] В. Н. Шашихин, “Оптимизация интервальных систем”, *Автоматика и телемеханика*, **11** (2000), 94–103.

[9] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, ФИЗМАТЛИТ, М, 2005, 384 с.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 7 марта 2014 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 14-04-00037).

*Filippova V. O.* Minimization of an interval quadratic function in a Hilbert space. Far Eastern Mathematical Journal. 2014. V. 14. № 2. P. 270–279.

ABSTRACT

The problem of finding the minimum of a quadratic function with interval coefficients is considered. The concept of a $p$-universal solution to this problem is offered. The existence and uniqueness of $p$-universal solutions to the interval problem of minimization of a quadratic function is proved, an algorithm for finding them and their comparison are presented. As an application of the results the interval boundary value problem for the Poisson equation is examined.

Key words: *interval problems, quadratic function, Lagrange principle.*