Дальневосточный математический журнал. 2014. Том 14. № 2. С. 280–296

УДК 517.98
MSC2010 46A19, 46E30, 46G10

© В. И. Чилин, М. М. Юсупова[1]

Решеточно нормированные решетки с монотонно полной и порядково полунепрерывной нормой

Изучаются топологические и порядковые свойства решеточно нормированных решеток (РНР) с монотонно полной и порядково полунепрерывной нормой, принимающей значения в расширенных пространствах Канторовича – Пинскера. Устанавливается "векторный" вариант критерия Абрамовича (bo)-полноты РНР.

Ключевые слова: *решеточно нормированная решетка, условия* (B) *и* (C)*, дизъюнктно разложимая норма.*

Введение

Многие важные нормированные функциональные пространства, рассматриваемые в анализе, являются идеальными линейными подпространствами в расширенной порядково полной векторной решетке $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ всех измеримых действительных функций, заданных на измеримом пространстве (Ω, Σ, μ) с полной σ-конечной мерой (равные почти всюду функции отождествляются). Примерами таких идеальных пространств служат пространства L^p, Орлича, Лоренца, Марцинкевича, со смешанной нормой и т.п. [1, гл. VI, §3, гл. XI, §1]. Теория нормированных идеальных пространств (НИП) является ветвью общей теории нормированных векторных решеток. Наличие отделимой векторной топологии τ_μ сходимости локально по мере μ в $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ дает дополнительные возможности для детального изучения свойств НИП [1, гл. VI, §3].

Развитие теории векторных мер $m : \nabla \to E$, заданных на полной булевой алгебре ∇ со значениями в порядково полной векторной решетке E, позволяет строить новые содержательные примеры решеточно нормированных решеток (РНР) такие, как L^p-пространства [2, 6.1], [3, гл. VIII] и пространства Орлича [4]. Эти РНР являются идеальными линейными подпространствами в $L^0(\nabla) := C_\infty(Q)$, где Q — стоуновский компакт, соответствующий булевой алгебре ∇.

[1]Национальный университет Узбекистана, 100174, г. Ташкент, Вузгородок; Филиал РГУ нефти и газа имени И.М. Губкина в городе Ташкенте, ул. Дурмон йули, 34, 100125, г. Ташкент. Электронная почта: `vladimirchil@gmail.com, chilin@ucd.uz, yusupova_mariya@rambler.ru`

В случае, когда компакт Q является гиперстоуновским, булева алгебра ∇ имеет разделяющее семейство вполне аддитивных конечных мер, что позволяет определить в $L^0(\nabla)$ отделимую векторную топологию $t(\nabla)$, которая является аналогом топологии τ_μ и называется *R-топологией*. Известно, что топология $t(\nabla)$ мажорируется (o)-топологией, а сама пара $(L^0(\nabla), t(\nabla))$ есть полная топологическая алгебра [5, гл. V]. В связи с этим, возникает задача изучения порядковых и топологических свойств решеточно нормированных идеальных пространств (РНИП) в $L^0(\nabla)$ с помощью топологии $t(\nabla)$.

В настоящей работе рассматриваются РНИП $(X, \|\cdot\|_X)$ в $L^0(\nabla)$, в случае, когда ∇ — мультинормированная булева алгебра, а значения нормы $\|\cdot\|_X$ берутся из расширенного пространства Канторовича–Пинскера. Известно, что любое расширенное пространство Канторовича–Пинскера E отождествляется с векторной решеткой $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ для некоторого измеримого пространства (Ω, Σ, μ) с локально конечной мерой μ, обладающей свойством прямой суммы [2, 1.4.10]. Следовательно, можно считать, что $E = L^0(\mathcal{B})$, где $\mathcal{B}$ есть мультинормированная булева алгебра всех классов равных почти всюду множеств из Σ. В этом случае в $L^0(\mathcal{B})$ существует R-топология $t(\mathcal{B})$, что позволяет определить в X векторную топологию $\tau(X)$, порожденную нормой $\|\cdot\|_X$ и топологией $t(\mathcal{B})$.

С помощью топологии $t(\nabla)$ в работе выясняются условия, обеспечивающие монотонную полноту и порядковую полунепрерывность нормы $\|\cdot\|_X$. Доказывается "векторный" вариант известного критерия Ю.А. Абрамовича из [6], дающий необходимые и достаточные условия для $\tau(X)$-полноты РНИП $(X, \|\cdot\|_X)$ с использованием наборов попарно дизъюнктных положительных элементов из X.

Используются терминология и обозначения теории векторных решеток и решеточно нормированных пространств из [2] и [7].

Предварительные сведения

Пусть ∇ — полная булева алгебра с единицей $\mathbf{1}_\nabla$ и Q — стоуновский компакт, соответствующий ∇. Обозначим через $C_\infty(Q)$ расширенную порядково полную векторную решетку всех непрерывных функций $x : Q \to [-\infty, +\infty]$, принимающих значения $\pm\infty$ лишь на нигде не плотных множествах. Известно, что $C_\infty(Q)$ есть алгебра (f-алгебра) над полем действительных чисел [2, 1.4.2], при этом булева алгебра ∇ отождествляется с булевой алгеброй всех идемпотентов из $C_\infty(Q)$, и поэтому можно считать, что $\nabla \subset C_\infty(Q)$ (далее алгебра $C_\infty(Q)$ обозначается через $L^0(\nabla)$).

Пусть X — произвольная векторная решетка с конусом положительных элементов X_+. Для каждого $x \in X$ через $x_+ := x \vee 0$ (соответственно через $x_- := -(x \wedge 0)$) обозначается положительная (отрицательная) часть элемента x, а через $|x| := x_+ + x_-$ — его модуль.

Если X — векторная подрешетка в $L^0(\nabla)$, то с помощью равенства $s(x) = \mathbf{1}_\nabla - \sup\{e \in \nabla : ex = 0\}$ определяется *носитель* $s(x)$ *элемента* $x \in X$. Ясно, что $s(x) \in \nabla$ и $s(q) = q$ для любого $q \in \nabla$, при этом идемпотент $q \in \nabla$ является носителем для $x \in X$ тогда и только тогда, когда $qx = x$ и из равенства $ex = x, e \in$

∇, следует, что $q \leq e$. Обычным образом проверяется, что носители элементов обладают следующими свойствами.

Утверждение 1. *Для любых* $x, y \in L^0(\nabla)$, $\lambda \neq 0$ *верны равенства*

$$s(|x|) = s(x) = s(\lambda x),\ s(xy) = s(x)s(y),\ s(x+y) \leq s(x) \vee s(y),$$

при этом, если $xy = 0$, *то* $s(x+y) = s(x) + s(y)$, *и из неравенства* $|x| \leq |y|$ *следует, что* $s(x) \leq s(y)$.

Пусть ∇ — произвольная полная булева алгебра. Множество $E \subset L^0(\nabla)$ называется *идеальным*, если из $|y| \leq |x|$, $x \in E$, $y \in L^0(\nabla)$, следует, что $y \in E$. Линейное подпространство X в $L^0(\nabla)$, являющееся идеальным множеством, называется *идеальным пространством* (сокращенно *ИП*) *в* $L^0(\nabla)$. Ясно, что каждое ИП X в $L^0(\nabla)$ является порядково полной векторной подрешеткой в $L^0(\nabla)$ [2, 1.3.10]. Говорят, что ИП X *порядково плотно в* $L^0(\nabla)$, или что X есть *фундамент* в $L^0(\nabla)$, если $X^{\perp} := \{y \in L^0(\nabla) : (\forall x \in X)\ |x| \wedge |y| = 0\} = \{0\}$ [2, 1.3.6]. Известно, что любая порядково полная векторная решетка X реализуется как фундамент в $L^0(\nabla)$, где ∇ есть полная булева алгебра всех полос в X [2, 1.4.6].

Говорят, что векторная решетка X (соответственно булева алгебра ∇) *имеет счетный тип*, если любое множество ненулевых попарно дизъюнктных элементов из X (соответственно ∇) не более чем счетно. Ясно, что порядково полная векторная решетка X имеет счетный тип в том и только в том случае, когда полная булева алгебра ∇ всех полос в X имеет счетный тип.

Полная булева алгебра ∇ счетного типа называется *регулярной*, если в ней выполняется следующий принцип диагонали: *если* $\{e_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty} \subset \nabla$ *и* $e_{nk} \downarrow 0$ *при* $k \to \infty$ *для каждого фиксированого* n, *то существует диагональная последовательность* $\{e_{nk_n}\}_{n=1}^{\infty}$, *которая* (o)*-сходится к нулю* (см., например, [8, гл. VI, §1]). Известно, что любая полная булева алгебра, на которой существует строго положительная счетно аддитивная конечная мера, является регулярной [8, гл. VI, §1]

Подмножество E из векторной решетки X называется *порядково ограниченным в* X, если существует такое $x \in X_+$, что $|y| \leq x$ для всех $y \in E$. Нам понадобится следующее полезное свойство возрастающих сетей из $L^0(\nabla)$, которые порядково неограниченны в $L^0(\nabla)$. Доказательство этого свойства следует непосредственно из доказательства п. б) теоремы V.6.2. из [7].

Утверждение 2. *Если* ∇ — *регулярная булева алгебра и* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — *возрастающая порядково неограниченная сеть из* $L^0_+(\nabla)$, *то существуют такой ненулевой идемпотент* $q \in \nabla$ *и такая возрастающая последовательность индексов* $\alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_n \leq \ldots$, *что* $qx_{\alpha_n} \geq nq$ *для любого* n.

Полная булева алгебра ∇ называется *мультинормированной*, если на ∇ существует разделяющее семейство конечных вполне аддитивных мер [2, 1.2.10]. В этом случае на ∇ имеется строго положительная локально конечная вполне аддитивная мера $\mu : \nabla \to [0, +\infty]$ [2, 1.2.10], определяющая в $L^0(\nabla)$ отделимую векторную топологию τ_μ сходимости локально по мере μ, для которой сходимость $x_\alpha \xrightarrow{\tau_\mu} x$, $x_\alpha, x \in L^0(\nabla)$, равносильна сходимости $x_\alpha e \xrightarrow{\mu} xe$ по мере μ для всех

$e \in \nabla$ с $\mu(e) < \infty$. Топология τ_μ не зависит от выбора меры μ [5, гл. V]; в дальнейшем мы будем ее обозначать через $t(\nabla)$ и называть *R-топологией в $L^0(\nabla)$* (ср. [5, гл. V]). В [5, гл. V] установлены следующие свойства R-топологии $t(\nabla)$.

Теорема 1. (i) $(L^0(\nabla), t(\nabla))$ *— полная топологическая алгебра;*

(ii) *R-топология слабее (o)-топологии в $L^0(\nabla)$ и совпадает с ней тогда и только тогда, когда топология $t(\nabla)$ метризуема (последнее условие равносильно счетности типа булевой алгебры ∇).*

Пусть X — векторная решетка, $\mathcal{B}$ — полная булева алгебра и $\|\cdot\|_X$ — $L^0(\mathcal{B})$-значная норма на X [2, 2.1.1]. Пара $(X, \|\cdot\|_X)$ называется *решеточно нормированной решеткой* (сокращенно, *РНР*), если норма $\|\cdot\|_X$ обладает следующим свойством монотонности: $\|y\|_X \le \|x\|_X$ для $x, y \in X$ с $|y| \le |x|$.

Говорят, что сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ из РНР $(X, \|\cdot\|_X)$ *(bo)-сходится* к элементу $x \in X$, если сеть $\{\|x_\alpha - x\|_X\}_{\alpha\in A}$ является (o)-сходящейся к нулю в $L^0(\mathcal{B})$. Сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset X$ называется *(bo)-фундаментальной*, если $(\sup\limits_{\alpha,\beta\ge\gamma} \|x_\alpha - x_\beta\|_X) \downarrow 0$. Говорят, что РНР $(X, \|\cdot\|_X)$ — *(bo)-полна*, если любая (bo)-фундаментальная сеть из X (bo)-сходится к элементу из X.

Два элемента x, y из РНР $(X, \|\cdot\|_X)$ называются *$\|\cdot\|_X$-дизъюнктными*, если $\|x\|_X \wedge \|y\|_X = 0$. Ясно, что $\|\cdot\|_X$-дизъюнктность элементов $x, y \in X$ влечет их обычную дизъюнктность: $|x| \wedge |y| = 0$. Обратное, вообще говоря, неверно.

Говорят, что $L^0(\mathcal{B})$-значная норма $\|\cdot\|_X$ на векторном пространстве X *дизъюнктно разложима* или *d-разложима*, если для любого $x \in X$ и любого разложения $\|x\|_X = a_1 + a_2$ в сумму дизъюнктных положительных элементов $a_1, a_2 \in L^0(\mathcal{B})$ существуют такие $x_1, x_2 \in X$, что $x = x_1 + x_2$ и $\|x_k\|_X = a_k,\ k = 1, 2$ [2, 2.1.1]. РНР с d-разложимой нормой называется *d-разложимой РНР над $L^0(\mathcal{B})$*.

Пусть $\{x_i\}_{i\in I}$ — произвольное семейство элементов из РНР $(X, \|\cdot\|_X)$ и $D(I)$ — направление всех конечных подмножеств из I, упорядоченных по включению. Говорят, что семейство $\{x_i\}_{i\in I}$ — *(bo)-суммируемо*, если существует такое $x \in X$, что сеть $\{\|x - \sum\limits_{i\in\beta} x_i\|_X\}_{\beta\in D(I)}$ (o)-сходится к нулю в $L^0(\mathcal{B})$. РНР $(X, \|\cdot\|_X)$ называется *дизъюнктно полной* или *d-полной*, если любое семейство $\{x_i\}_{i\in I}$ попарно $\|\cdot\|_X$-дизъюнктных элементов из X является (bo)-суммируемым [2, 2.1.5].

Пусть $\mathcal{B}$ — мультинормированная булева алгебра, $(X, \|\cdot\|_X)$ — РНР с $L^0(\mathcal{B})$-значной нормой, $\mathcal{U}$ — базис окрестностей нуля в $(L^0(\mathcal{B}), t(\mathcal{B}))$. Для каждого $U \in \mathcal{U}$ положим $W(U) = \{x \in X :\ \|x\|_X \in U\}$. Согласно [1, гл. I, §1], в X существует топология $\tau(X)$, относительно которой X есть отделимое топологическое векторное пространство, при этом система множеств $\{x + W(U) :\ U \in \mathcal{U}\}$ образует базис окрестностей элемента $x \in X$ (в этом случае говорят, что *топология $\tau(X)$ порождена нормой $\|\cdot\|_X$ и R-топологией $t(\mathcal{B})$*). Если $t(\mathcal{B})$ — метризуемая топология, то $\tau(X)$ также является метризуемой топологией [9, гл. I, §6]. Сходимость сети $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset X$ к элементу $x \in X$ в топологии $\tau(X)$ означает, что $\|x_\alpha - x\|_X \xrightarrow{t(\mathcal{B})} 0$. Если каждая $\tau(X)$-фундаментальная сеть из X является $\tau(X)$-сходящейся в X, то РНР $(X, \|\cdot\|_X)$ называется *$\tau(X)$-полной.* В [10, теоремы 2, 3] установлено, что в случае, когда $\mathcal{B}$ — мультинормированная булева алгебра счетного типа либо когда РНР $(X, \|\cdot\|_X)$ — d-разложима, свойства (bo)-полноты и $\tau(X)$-полноты совпадают.

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — РНР с $L^0(\mathcal{B})$-значной нормой. Зафиксируем идемпотент $e \in \mathcal{B}$ и положим $\mathcal{B}_e = \{q \in \mathcal{B} : q \leq e\}$, $X_e = \{x \in X : (\mathbf{1}_{\mathcal{B}} - e)\|x\|_X = 0\}$, $\|x\|_{X_e} = \|x\|_X$ для $x \in X_e$, где $\mathbf{1}_{\mathcal{B}}$ — единица булевой алгебры $\mathcal{B}$. Ясно, что X_e есть векторная подрешетка в X, при этом верно равенство $e\|x\|_X = \|x\|_X$ для всех $x \in X_e$. Таким образом, $(X_e, \|\cdot\|_{X_e})$ является РНР с $L^0(\mathcal{B}_e)$-значной нормой и топология $\tau(X_e)$ совпадает с топологией, индуцируемой топологией $\tau(X)$ на X_e.

Если $L^0(\mathcal{B})$-значная норма $\|\cdot\|_X$ – d-разложима, то существует линейный положительный непрерывный проектор P_e из $(X, \tau(X))$ на $(X_e, \tau(X_e))$, для которого $e\|x\|_X = \|P_e(x)\|_X$ для всех $x \in X$, при этом $P_e(X) = X_e$ и $Ker\ P_e = \{x \in X : P_e(x) = 0\} = P_{\mathbf{1}_{\mathcal{B}}-e}(X)$ ([11]).

Нам понадобится следующий критерий для $\tau(X)$-сходимости сетей из РНР $(X, \|\cdot\|_X)$.

Утверждение 3. *[10] Пусть $\{e_i\}_{i\in I}$ — разбиение единицы мультинормированной булевой алгебры $\mathcal{B}$, $(X, \|\cdot\|_X)$ – d-разложимая РНР с $L^0(\mathcal{B})$-значной нормой и $x \in X$. Для сети $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ из X следующие условия эквивалентны:*

(i) $x_\alpha \xrightarrow{\tau(X)} x$;

(ii) $P_{e_i}(x_\alpha) \xrightarrow{\tau(X_{e_i})} P_{e_i}(x)$ для всех $i \in I$.

Если РНР X является ИП в $L^0(\nabla)$, то X называют *решеточно нормированным идеальным пространством* (сокращенно, *РНИП*) в $L^0(\nabla)$. Каждая порядково полная РНР X является порядково плотным РНИП в $L^0(\nabla)$ для булевой алгебры ∇ всех полос из X.

Нам понадобится следующая связь между топологиями $\tau(X)$ и $t(\nabla)$ в РНИП.

Теорема 2. *[12] Пусть ∇ и $\mathcal{B}$ — мультинормированные булевы алгебры и $(X, \|\cdot\|_X)$ – РНИП в $L^0(\nabla)$ с $L^0(\mathcal{B})$-значной нормой. Если $\mathcal{B}$ имеет счетный тип либо X – d-разложимо, то для любой $\tau(X)$-фундаментальной сети $\{x_\alpha\}$ из X существует такое $x \in L^0(\nabla)$, что $x_\alpha \xrightarrow{t(\nabla)} x$.*

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — d-разложимое РНИП в $L^0(\nabla)$ над $L^0(\mathcal{B})$ и $e \in \mathcal{B}$. Определим отображение $\varphi : \mathcal{B} \to \nabla$ по правилу $\varphi(e) = \sup\{s(x) : x \in X_e\}$. Ясно, что $\varphi(\mathbf{1}_{\mathcal{B}}) = s(X) := \sup\{s(x)\colon x \in X\}$, $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(e) \leq \varphi(p)$, если $e \leq p$. В [13] установлено следующее утверждение.

Утверждение 4. *Отображение $\varphi : \mathcal{B} \to \nabla$ обладает следующими свойствами:*

(i) $P_e(x) = \varphi(e)x$ для всех $x \in X$, $e \in \mathcal{B}$, в частности, $\varphi(e)X = X_e$;

(ii) Для любого непустого подмножества $A \subset \mathcal{B}$ верно равенство $\varphi(\sup\ A) = \sup\{\varphi(e) : e \in A\}$.

Решеточно нормированные решетки с монотонно полной нормой

Пусть $\mathcal{B}$ — произвольная полная булева алгебра. Говорят, что $L^0(\mathcal{B})$-значная норма $\|\cdot\|_X$ в РНР X *монотонно полна*, или что в X *выполнено условие* (B), если для любой возрастающей сети $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset X_+$ с $\sup\limits_{\alpha\in A}\|x_\alpha\|_X\in L^0(\mathcal{B})$ существует такое $x\in X$, что $x_\alpha\uparrow x$. Если это условие выполнено только для последовательностей, то говорят, что норма $\|\cdot\|_X$ в РНР X является *секвенциально монотонно полной*, или что в X *выполнено условие* (B_σ) (ср. [1, гл. IV, §3, гл. X, §4]).

Утверждение 5. *Пусть X — порядково полная векторная решетка, булева алгебра ∇ полос которой является регулярной. Если $\|\cdot\|_X$ есть $L^0(\mathcal{B})$-значная секвенциально монотонно полная норма на X, то в X выполнено условие (B).*

Доказательство. Поскольку X — порядково полная векторная решетка, то X отождествляется с порядково плотным ИП в $L^0(\nabla)$. Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — возрастающая сеть из X_+ и в $L^0(\mathcal{B})$ существует $\sup\limits_{\alpha\in A}\|x_\alpha\|_X$. Если сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ порядково неограниченна в $L^0(\nabla)$, то согласно утверждению 2, существуют такие $0\neq q\in\nabla$ и последовательность индексов $\alpha_1\le ...\le\alpha_n\le ...$, что $qx_{\alpha_n}\ge nq$. Поскольку $\sup\limits_{\alpha\in A}\|x_\alpha\|_X\ge\|x_{\alpha_n}\|_X\ge\|nq\|_X=n\|q\|_X$ для всех $n\in\mathbb{N}$, то $\|q\|_X=0$, т.е. $q=0$, что не так. Следовательно, сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — порядково ограничена в $L^0(\nabla)$, и поэтому в $L^0_+(\nabla)$ существует $x=\sup\limits_{\alpha\in A}x_\alpha$. Так как ∇ имеет счетный тип, то векторная решетка $L^0(\nabla)$ также имеет счетный тип, и поэтому найдется такая последовательность индексов $\beta_1\le ...\le\beta_n\le ...$, что $x_{\beta_n}\uparrow x$ [7, гл. VI, §3]. Осталось использовать условие (B_σ), в силу которого $x\in X$. □

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{B}$ — произвольная мультинормированная булева алгебра и $(X,\|\cdot\|_X)$ — РНР над $L^0(\mathcal{B})$. Если $\mathcal{B}$ имеет счетный тип и в X выполнено условие (B_σ), либо X — d-разложима и в X выполнено условие (B), то $(X,\|\cdot\|_X)$ — (bo)-полно.*

Доказательство. Предположим сначала, что $\mathcal{B}$ имеет счетный тип и в X выполнено условие (B_σ). Возьмем произвольную возрастающую $\tau(X)$-фундаментальную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ из X_+. Поскольку

$$|\|x_n\|_X-\|x_m\|_X|\le\|x_n-x_m\|_X\xrightarrow{t(\mathcal{B})}0,$$

то $\{\|x_n\|_X\}_{n=1}^\infty$ — $t(\mathcal{B})$-фундаментальная последовательность. Поскольку топологическая алгебра $(L^0(\mathcal{B}),t(\mathcal{B}))$ полна (теорема 1(i)), то существует такое $a\in L^0(\mathcal{B})$, что $\|x_n\|_X\xrightarrow{t(\mathcal{B})}a$. Из неравенств $\|x_n\|_X\le\|x_{n+1}\|_X$ следует, что $\|x_n\|_X\uparrow a$. Согласно условию (B_σ), найдется такое $x\in X_+$, что $x_n\uparrow x$. Используя теперь вариант теоремы Амемия для РНР в случае, когда $\mathcal{B}$ имеет счетный тип [10, теорема 5], получим, что $(X,\|\cdot\|_X)$ – $\tau(X)$-полно, поэтому $(X,\|\cdot\|_X)$ также (bo)-полно [10, теорема 2].

Пусть теперь $(X,\|\cdot\|_X)$ — d-разложимая РНР над $L^0(\mathcal{B})$, где $\mathcal{B}$ — произвольная мультинормированная булева алгебра, и в $(X,\|\cdot\|_X)$ выполнено условие (B). Возьмем возрастающую $\tau(X)$-фундаментальную сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ из X_+. Повторяя предыдущее доказательство и используя условие (B), получим, что существует такое $x\in X_+$, для которого $x_\alpha\uparrow x$.

Пусть $\{e_i\}_{i\in I}$ — такое разбиение единицы мультинормированной булевой алгебры $\mathcal{B}$, что булевы алгебры $\mathcal{B}_{e_i}$ имеют счетный тип для всех $i \in I$. Поскольку РНР $(X_{e_i}, \|\cdot\|_{X_{e_i}})$ с $L^0(\mathcal{B}_{e_i})$-значной нормой $\|\cdot\|_{X_{e_i}}$ обладает свойством (B), то, в силу доказанного выше, $\tau(X_{e_i})$-фундаментальная возрастающая сеть $\{\varphi(e_i)x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ является сходящейся в топологии $\tau(X_{e_i})$ к некоторому элементу $y_i \in X_{e_i}$, для которого $y_i = \sup\limits_{\alpha\in A}\varphi(e_i)x_\alpha$. Поэтому из сходимости $\varphi(e_i)x_\alpha \uparrow \varphi(e_i)x$ вытекает, что $y_i = \varphi(e_i)x = P_{e_i}(x)$ для каждого $i \in I$ (утверждение 4(i)). Следовательно, $P_{e_i}(x_\alpha) \xrightarrow{\tau(X_{e_i})} P_{e_i}(x)$ для всех $i \in I$, и, в силу утверждения 3, получим, что $x_\alpha \xrightarrow{\tau(X)} x$. Отсюда и из [10, теорема 6] вытекает, что $(X, \|\cdot\|_X)$ – $\tau(X)$-полно, и поэтому $(X, \|\cdot\|_X)$ — (bo)-полно [10, теорема 3]. $\square$

Рассмотрим теперь варианты условий (B) и (B_σ) для возрастающих вбок сетей и последовательностей. Возрастающая сеть положительных элементов $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ из векторной решетки называется *возрастающей вбок*, если для любых $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \le \beta$, верно равенство $(x_\beta - x_\alpha)\wedge x_\alpha = 0$ [6]. Говорят, что $L^0(\mathcal{B})$-значная норма $\|\cdot\|_X$ в РНР X *монотонно полна вбок* (*секвенциально монотонно полна вбок*), или что в X *выполнено условие* (B_d) (соответственно, $(B_{d\sigma})$), если для любой возрастающей вбок сети (последовательности) $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset X_+$ с $\sup\limits_{\alpha\in A}\|x_\alpha\|_X \in L^0(\mathcal{B})$ существует такое $x \in X$, что $x_\alpha \uparrow x$. Очевидно, что условие (B) (соответственно, (B_σ)) влечет условие (B_d) (соответственно, $(B_{d\sigma})$). Для установления обратной импликации нам понадобится следующее свойство монотонно полных вбок РНР (ср. [6]).

Утверждение 6. *Пусть ∇ и $\mathcal{B}$ — произвольные полные булевы алгебры и $(X, \|\cdot\|_X)$ — РНИП в $L^0(\nabla)$ с $L^0(\mathcal{B})$-значной монотонно полной вбок нормой, $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset X_+$, $x_\alpha \uparrow x \in L^0(\nabla)$ и в $L^0(\mathcal{B})$ существует $\sup\limits_{\alpha\in A}\|x_\alpha\|_X$. Тогда $x \in X$.*

Доказательство. Положим $e_\alpha = s((2x_\alpha - x)_+)$, $\alpha \in A$. Из неравенства $x_\alpha \le x_\beta$ при $\alpha \le \beta$ следует, что $e_\alpha \le e_\beta$ для $\alpha \le \beta$, при этом $e_\alpha \le s(x_\alpha) \vee s(x) = s(x)$ (утверждение 1). Покажем, что $e_\alpha \uparrow s(x)$. Пусть $q = s(x) - \sup\limits_{\alpha\in A} e_\alpha$. Поскольку $(\mathbf{1}_\nabla - e_\alpha)(2x_\alpha - x) \le 0$, то $2qx_\alpha \le qx$ при всех $\alpha \in A$, и поэтому $2qx = \sup\limits_{\alpha\in A}(2qx_\alpha) \le qx$, что влечет за собой равенство $q = 0$. Следовательно, $e_\alpha \uparrow s(x)$, и поэтому $z_\alpha = e_\alpha x \uparrow x$. Так как $0 \le e_\alpha x \le 2e_\alpha x_\alpha \le 2x_\alpha$, то $z_\alpha \in X$ и $\|z_\alpha\|_X \le 2\|x_\alpha\|_X$, т.е. в $L^0(\mathcal{B})$ существует $\sup\limits_{\alpha\in A}\|z_\alpha\|_X$. Поскольку $(z_\beta - z_\alpha) \wedge z_\alpha = 0$ при $\alpha \le \beta$, то из условия (B_d) вытекает, что существует такое $z \in X$, что $z_\alpha \uparrow z$. Следовательно, $x = z \in X$. $\square$

Замечание 1. *Утверждение 6 и его доказательство сохраняются и в случае, когда норма $\|\cdot\|_X$ — секвенциально монотонно полна вбок, а вместо сети $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ взята последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X_+$.*

Полную булеву алгебру ∇ будем называть *мультирегулярной*, если в ∇ существует такое разбиение $\{e_i\}_{i\in I}$ единицы $\mathbf{1}_\nabla$, что $\nabla_{e_i} = \{q \in \nabla : q \le e_i\}$ есть регулярная булева алгебра для всех $i \in I$. Примерами мультирегулярных булевых алгебр являются все мультинормированные булевы алгебры. Порядково полную векторную решетку X будем называть *мультирегулярной*, если булева алгебра ее полос является мультирегулярной.

Теорема 4. *Если $\mathcal{B}$ — произвольная полная булева алгебра и $(X, \|\cdot\|_X)$ — мультирегулярная РНР с $L^0(\mathcal{B})$-значной (секвенциально) монотонно полной вбок нормой, то норма $\|\cdot\|_X$ (секвенциально) монотонно полна.*

Доказательство. Реализуем порядково полную РНР $(X, \|\cdot\|_X)$ как порядково плотное РНИП в $L^0(\nabla)$, где ∇ — мультирегулярная булева алгебра всех полос в X. Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — возрастающая сеть из X_+ и в $L^0(\mathcal{B})$ существует $\sup\limits_{\alpha \in A} \|x_\alpha\|_X$. Выберем разбиение $\{e_i\}_{i \in I}$ единицы булевой алгебры ∇, для которого ∇_{e_i} есть регулярная булева алгебра при всех $i \in I$. Зафиксируем $i \in I$ и предположим, что сеть $\{e_i x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ является порядково неограниченной в $L^0(\nabla_{e_i})$. Согласно утверждению 2, существуют такие $0 \neq q \in \nabla_{e_i}$ и возрастающая последовательность индексов $\alpha_1 \leq ... \leq \alpha_n \leq ...$, что $q e_i x_{\alpha_n} \geq nq$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\sup_{\alpha \in A} \|x_\alpha\|_X \geq \sup_{n \geq 1} \|q e_i x_{\alpha_n}\|_X \geq n \|q\|_X$$

для всех $n \in \mathbb{N}$, что влечет за собой равенство $q = 0$, а это не так. Таким образом, в $L^0_+(\nabla_{e_i})$ существует $x_i = \sup\limits_{\alpha \in A} e_i x_\alpha,\ i \in I$. Выберем $x \in L^0(\nabla)$, для которого $e_i x = x_i$ при всех $i \in I$. Поскольку $e_i x_\alpha \uparrow x_i$ для всех $i \in I$ и $\sup\limits_{i \in I} e_i = \mathbf{1}_\nabla$, то $x_\alpha \uparrow x$. Осталось использовать утверждение 6, в силу которого $x \in X$.

Доказательство теоремы, в случае наличия условия $(B_{d\sigma})$, аналогично предыдущему доказательству с учетом замечания 1. □

Непосредственно из теорем 3 и 4 вытекает следующее следствие.

Следствие 1. *Пусть $\mathcal{B}$ — мультинормированная булева алгебра и $(X, \|\cdot\|_X)$ — мультирегулярная РНР с $L^0(\mathcal{B})$-значной нормой. Если $\mathcal{B}$ имеет счетный тип и в X выполнено условие $(B_{d\sigma})$, либо $(X, \|\cdot\|_X)$ – d-разложима и в X выполнено условие (B_d), то $(X, \|\cdot\|_X)$ — (bo)-полно.*

Решеточно нормированные решетки с порядково полунепрерывной нормой

Пусть $\mathcal{B}$ — полная булева алгебра. Говорят, что $L^0(\mathcal{B})$-значная норма $\|\cdot\|_X$ в РНР X *порядково полунепрерывна*, или что в X *выполнено условие* (C), если из $0 \leq x_\alpha \uparrow x \in X$ следует, что $\sup\limits_{\alpha \in A} \|x_\alpha\|_X = \|x\|_X$. Если это условие выполнено только для последовательностей, то говорят, что норма $\|\cdot\|_X$ в РНР X является *секвенциально порядково полунепрерывной*, или что в X *выполнено условие* (C_σ) (ср. [1, гл. IV, §3, гл. X, §4]).

Ясно, что из условия (C) следует условие (C_σ). Обратное, вообще говоря, не верно даже в случае нормированных векторных решеток [1, гл. X, §4]. В то же время если X — порядково полная векторная решетка счетного типа, то условие (C_σ) влечет за собой условие (C).

Для РНИП в $L^0(\nabla)$ с мультинормированной булевой алгеброй ∇ верен следующий критерий справедливости условия (C).

Утверждение 7. *Пусть ∇ — мультинормированная, а $\mathcal{B}$ — полная булевы алгебры и $(X, \|\cdot\|_X)$ — РНИП в $L^0(\nabla)$ с $L^0(\mathcal{B})$-значной нормой. Следующие условия эквивалентны:*

(i) в X выполнено условие (C);

(ii) если $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset X, x_\alpha \xrightarrow{t(\nabla)} x \in X$ и сеть $\{\|x_\alpha\|_X\}_{\alpha\in A}$ порядково ограничена в $L^0(\mathcal{B})$, то $\|x\|_X \leq \sup\limits_{\alpha\in A} \|x_\alpha\|_X$.

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$. Предположим сначала, что булева алгебра ∇ имеет счетный тип, и рассмотрим такую последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$, что $x_n \xrightarrow{t(\nabla)} x \in X$ и в $L^0(\mathcal{B})$ существует $\sup\limits_{n\geq 1} \|x_n\|_X$. Поскольку порядково полная векторная решетка X также имеет счетный тип, то существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, (o)-сходящаяся к x в $L^0(\nabla)$ [7, гл. VI, § 3]. Следовательно, $a_k = |x_{n_k}| \xrightarrow{(o)} |x|$ в $L^0(\nabla)$, в частности, $\sup\limits_{s\geq 1} \inf\limits_{k\geq s} a_k = |x|$. Если $b_s = \inf\limits_{k\geq s} a_k$, то $b_s \in X$ и $0 \leq b_s \uparrow |x|$. Из условия (C) следует, что $\|b_s\|_X \uparrow \|x\|_X$, и поскольку $\|b_s\|_X \leq \inf\limits_{k\geq s} \|a_k\|_X \leq \sup\limits_{n\geq 1} \|x_n\|_X$, то $\|x\|_X \leq \sup\limits_{n\geq 1} \|x_n\|_X$.

Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — произвольная сеть из X, $x_\alpha \xrightarrow{t(\nabla)} x \in X$ и $\{\|x_\alpha\|_X\}_{\alpha\in A}$ — порядково ограниченная сеть в $L^0(\mathcal{B})$. Так как булева алгебра ∇ имеет счетный тип, то топология $t(\nabla)$ — метризуема (теорема 1(ii)), и поэтому существует такая последовательность индексов $\alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_n \leq \ldots$, что $x_{\alpha_n} \xrightarrow{t(\nabla)} x$. Опираясь на доказанное выше, получим, что $\|x\|_X \leq \sup\limits_{\alpha\in A} \|x_{\alpha_n}\|_X \leq \sup\limits_{\alpha\in A} \|x_\alpha\|_X$.

Пусть теперь ∇ — произвольная мультинормированная булева алгебра, $x_\alpha, x \in X$, $x_\alpha \xrightarrow{t(\nabla)} x$ и в $L^0(\mathcal{B})$ существует $\sup\limits_{\alpha\in A} \|x_\alpha\|_X$. Выберем такое разбиение $\{q_i\}_{i\in I}$ единицы булевой алгебры ∇, что булева алгебра ∇_{q_i} имеет счетный тип для любого $i \in I$. Пусть $D(I)$ – направление всех конечных подмножеств из I, упорядоченных по включению. Для каждого $\beta \in D(I)$ положим $g_\beta = \sum\limits_{i\in\beta} q_i$ и $z_\alpha^\beta = g_\beta x_\alpha$. Ясно, что $z_\alpha^\beta \xrightarrow{t(\nabla_{g_\beta})} g_\beta x$ для любого фиксированного $\beta \in D(I)$. Так как булева алгебра ∇_{g_β} имеет счетный тип и $(X_{g_\beta}, \|\cdot\|_X)$ есть РНИП в $L^0(\nabla_{g_\beta})$ с $L^0(\mathcal{B})$-значной нормой, то из доказанного выше следует, что $\|g_\beta x\|_X \leq \sup\limits_{\alpha\in A} \|z_\alpha^\beta\|_X \leq \sup\limits_{\alpha\in A} \|x_\alpha\|_X$ для любого $\beta \in D(I)$. Поскольку $g_\beta|x| \uparrow |x|$, то, используя условие (C), получим, что $\|g_\beta x\|_X \uparrow \|x\|_X$, что влечет за собой неравенство $\|x\|_X \leq \sup\limits_{\alpha\in A} \|x_\alpha\|_X$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Если $x_\alpha \in X_+$ и $x_\alpha \uparrow x \in X$, то $\|x_\alpha\|_X \leq \|x\|_X$ для всех $\alpha \in A$ и $x_\alpha \xrightarrow{t(\nabla)} x$ (теорема 1(ii)). Согласно условию (ii), верно неравенство $\|x\|_X \leq \sup\limits_{\alpha\in A} \|x_\alpha\|_X$, и поэтому $\|x\|_X = \sup\limits_{\alpha\in A}\|x_\alpha\|_X$, т.е. в $(X,\|\cdot\|_X)$ выполнено условие (C). $\square$

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия для выполнения условий (B) и (C) в РНИП $L^0(\nabla)$ на языке R-топологии $t(\nabla)$ (ср. [1, гл. IV, §3]).

Теорема 5. *Пусть ∇ — мультинормированная, а $\mathcal{B}$ — полная булевы алгебры, $(X,\|\cdot\|_X)$ — РНИП в $L^0(\nabla)$ с $L^0(\mathcal{B})$-значной нормой. Следующие условия эквивалентны:*

(i) в X выполнены условия (B) и (C);

(ii) если $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset X$, $x\in L^0(\nabla)$, $\|x_\alpha\|_X\le a\in L^0_+(\mathcal{B})$ для всех $\alpha\in A$ и $x_\alpha\xrightarrow{t(\nabla)}x$, то $x\in X$ и $\|x\|_X\le a$.

Доказательство. $(i)\Rightarrow(ii)$. Пусть сначала ∇ имеет счетный тип, $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset X$, $x\in L^0(\nabla)$, $\|x_n\|_X\le a\in L^0_+(\mathcal{B})$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и $x_n\xrightarrow{t(\nabla)}x$. Так же, как и при доказательстве импликации $(i)\Rightarrow(ii)$ в утверждении 7, выберем подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, для которой $a_k=|x_{n_k}|\xrightarrow{(o)}|x|$. Если $b_s=\inf\limits_{k\ge s}a_k$, то $b_s\in X_+$ и $b_s\uparrow|x|$. Согласно условиям (B) и (C), $|x|\in X$ и $\|b_s\|_X\uparrow\|x\|_X$. Следовательно, $x\in X$ и $\|x\|_X=\sup\limits_{s\ge1}\|b_s\|_X\le\sup\limits_{k\ge1}\|a_k\|_X=\sup\limits_{k\ge1}\|x_{n_k}\|_X\le a$.

Рассмотрим теперь сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset X$ и элемент $x\in L^0(\nabla)$, для которых $\|x_\alpha\|_X\le a\in L^0_+(\mathcal{B})$ при всех $\alpha\in A$ и $x_\alpha\xrightarrow{t(\nabla)}x$. В силу теоремы $1(ii)$ топология $t(\nabla)$ является метризуемой, и поэтому найдется такая последовательность индексов $\alpha_1\le\ldots\le\alpha_n\le\ldots$ из A, что $x_{\alpha_n}\xrightarrow{t(\nabla)}x$. Согласно доказанному выше, $x\in X$ и $\|x\|_X\le a$.

Пусть ∇ — произвольная мультинормированная булева алгебра. Выберем такое разбиение $\{q_i\}_{i\in I}$ единицы булевой алгебры ∇, что ∇_{q_i} есть булева алгебра счетного типа для любого $i\in I$. Как и ранее, через $D(I)$ обозначается направление всех конечных подмножеств из I, упорядоченное по включению. Для каждого $\beta\in D(I)$ положим $g_\beta=\sum\limits_{i\in\beta}q_i$ и $z_\alpha^\beta=g_\beta x_\alpha$. Поскольку $z_\alpha^\beta\xrightarrow{t(g_\beta\nabla)}g_\beta x$, булева алгебра ∇_{g_β} имеет счетный тип и $(X_{g_\beta},\|\cdot\|_X)$ есть РНИП в $L^0(\nabla_{g_\beta})$ с $L^0(\mathcal{B})$-значной нормой, то из доказанного выше следует, что $g_\beta x\in X$ и $\|g_\beta|x|\|_X=\|g_\beta x\|_X\le a$. Так как $g_\beta|x|\uparrow|x|$, то, в силу условия (B), получим, что $|x|\in X$, и поэтому $x\in X$. Осталось использовать условие (C), согласно которому $\|g_\beta x\|_X\uparrow\|x\|_X$, что влечет за собой неравенство $\|x\|_X\le a$.

$(ii)\Rightarrow(i)$. Надо показать, что для любой возрастающей сети $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset X_+$ с $a:=\sup\limits_{\alpha\in A}\|x_\alpha\|_X\in L^0(\mathcal{B})$, существует такое $x\in X$, для которого $x_\alpha\uparrow x$ и $\sup\limits_{\alpha\in A}\|x_\alpha\|_X=\|x\|_X$. Как и выше, предположим сначала, что мультинормированная булева алгебра ∇ имеет счетный тип. Пусть сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — порядково неограниченна в $L^0(\nabla)$. Согласно утверждению 2, существуют такие $0\ne q\in\nabla$, $\alpha_1\le\ldots\le\alpha_n\ldots$, что $qx_{\alpha_n}\ge nq$ для любого $n\in\mathbb{N}$. Следовательно, $a\ge\|qx_{\alpha_n}\|_X\ge n\|q\|_X$ для всех $n\in\mathbb{N}$, что невозможно, поскольку $q\ne0$. Поэтому в $L^0(\nabla)$ существует $\sup\limits_{\alpha\in A}x_\alpha=x$, при этом, $x_\alpha \uparrow x$, в частности, $x_\alpha \xrightarrow{t(\nabla)} x$ (теорема 1(ii)). Осталось использовать условие (ii), согласно которому $x \in X$ и $\|x\|_X \leq a$, в частности, $\|x\|_X \leq \sup\limits_{\alpha\in A} \|x_\alpha\|_X$. Следовательно, в $(X, \|\cdot\|_X)$ выполнены условия (B) и (C).

Пусть теперь ∇ является произвольной мультинормированной булевой алгеброй. Выберем такое разбиение $\{q_i\}_{i\in I}$ единицы булевой алгебры ∇, что ∇_{q_i} есть мультинормированная булева алгебра счетного типа для всех $i \in I$. Из доказанного выше следует, что для РНИП $(X_{q_i}, \|\cdot\|_X)$ в $L^0(\nabla_{q_i})$ выполнены условия (B) и (C).

Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — возрастающая сеть из X_+ и $\sup\limits_{\alpha\in A} \|x_\alpha\|_X = a \in L^0(\mathcal{B})$. Поскольку $\{q_i x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — возрастающая сеть из X_{q_i}, для которой $\sup \|q_i x_\alpha\|_X \leq a$, то, согласно условиям (B) и (C) для $(X_{q_i}, \|\cdot\|_X)$, найдется такое $x_i \in (X_{q_i})_+$, что $q_i x_\alpha \uparrow x_i$ и $\sup\limits_{\alpha\in A} \|q_i x_\alpha\|_X = \|x_i\|_X$ для всех $i \in I$. Выберем $x \in L^0_+(\nabla)$, для которого $q_i x = x_i$, $i \in I$. Так как $\sup\limits_{i\in I} q_i = \mathbf{1}_\nabla$ и $q_i x_\alpha \uparrow q_i x$, то $x_\alpha \uparrow x$. В силу теоремы 1(ii), $x_\alpha \xrightarrow{t(\nabla)} x$, и поэтому из условия (ii) следует, что $x \in X$ и $\|x\|_X \leq a = \sup\limits_{\alpha\in A} \|x_\alpha\|_X$. $\square$

Критерии (bo)-полноты РНИП

Пусть $\mathcal{B}$ — произвольная мультинормированная булева алгебра. РНР $(X, \|\cdot\|_X)$ над $L^0(\mathcal{B})$ называется *интервально $\tau(X)$-полной*, если любой порядковый интервал $[x, y] = \{z \in X : x \leq z \leq y\}$ из X является $\tau(X)$-полным множеством. Нам понадобится следующий "векторный" вариант известного критерия А.И. Векслера из [14] об интервальной полноте порядково полных нормированных векторных решеток.

Теорема 6. *[13] Пусть $\mathcal{B}$ — мультинормированная булева алгебра, $(X, \|\cdot\|_X)$ — порядково полная РНР над $L^0(\mathcal{B})$. Если $\mathcal{B}$ имеет счетный тип, либо $(X, \|\cdot\|_X)$ — d-разложима, то следующие условия эквивалентны:*

(i) $(X, \|\cdot\|_X)$ — интервально $\tau(X)$-полна;

(ii) существует такое $\lambda \in L^0_+(\mathcal{B})$, что для любой $\tau(X)$-фундаментальной возрастающей вбок последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ из X_+ с $\sup\limits_{n\geq 1} x_n = x \in X$ верно неравенство $\|x\|_X \leq \lambda \sup\limits_{n\geq 1} \|x_n\|_X$.

Из теоремы 6, в частности, следует, что любая РНР $(X, \|\cdot\|_X)$, удовлетворяющая условиям этой теоремы и обладающая свойством (C_σ), обязательно является интервально $\tau(X)$-полной.

Далее нам понадобится также следующий критерий $\tau(X)$-полноты решеточно нормируемой решетки $(X, \|\cdot\|_X)$ над $L^0(\mathcal{B})$ из [10, теоремы 5, 7]: если $\mathcal{B}$ — мультинормированная булева алгебра и $(X, \|\cdot\|_X)$ — РНР над $L^0(\mathcal{B})$, причем $\mathcal{B}$ имеет счетный тип, либо X — d-разложима и d-полна, то $(X, \|\cdot\|_X)$ — $\tau(X)$-полна тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:

(I_σ) каждая $\tau(X)$-фундаментальная возрастающая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ из X_+ сходится в $(X, \tau(X))$.

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — интервально $\tau(X)$-полное РНИП в $L^0(\nabla)$ с $L^0(\mathcal{B})$-значной нормой. Рассмотрим множество $\widehat{K}$ всех тех $\widehat{x} \in L^0_+(\nabla)$, для которых найдется такая $\tau(X)$-фундаментальная последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ из X_+, что $x_n \uparrow \widehat{x}$. Поскольку $|\|x_n\|_X - \|x_m\|_X| \leq \|x_n - x_m\|_X \xrightarrow{t(\mathcal{B})} 0$ при $n, m \to \infty$, то $\{\|x_n\|_X\}_{n=1}^\infty$ — $t(\mathcal{B})$-фундаментальная последовательность в $(L^0(\mathcal{B}), t(\mathcal{B}))$, и поэтому существует такое $a \in L^0(\mathcal{B})$, что $\|x_n\|_X \xrightarrow{t(\mathcal{B})} a$ (теорема 1(i)). Используя сходимость $0 \leq x_n \uparrow \widehat{x}$ и теорему 1(ii), получим, что $\|x_n\|_X \uparrow a$. Положим $\|\widehat{x}\|_{\widehat{K}} = \sup\limits_{n\geq 1} \|x_n\|_X$. В работе [12] показано, что определение элемента $\|\widehat{x}\|_{\widehat{K}} \in L^0_+(\mathcal{B})$ не зависит от выбора $\tau(X)$-фундаментальной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ из X_+, для которой $x_n \uparrow \widehat{x}$.

Обозначим через $\widehat{X}$ множество всех тех $\widehat{x} \in L^0(\nabla)$, для которых $|\widehat{x}| \in \widehat{K}$, и для каждого $\widehat{x} \in \widehat{X}$ определим $\|\widehat{x}\|_{\widehat{X}} = \||\widehat{x}|\|_{\widehat{K}}$. В работе [12] доказано, что $(\widehat{X}, \|\cdot\|_{\widehat{X}})$ есть РНИП в $L^0(\nabla)$ с $L^0(\mathcal{B})$-значной нормой, для которого $X \subset \widehat{X}$ и $\|x\|_X = \|x\|_{\widehat{X}}$ для всех $x \in X$, при этом для любой $\tau(X)$-фундаментальной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ из X_+ с $x_n \uparrow \widehat{x} \in \widehat{X}$ имеет место сходимость $\|\widehat{x} - x_n\|_{\widehat{X}} \downarrow 0$.

Будем говорить, что РНР $(X, \|\cdot\|_X)$ *удовлетворяет условию* $(I_{d\sigma})$, если любая $\tau(X)$-фундаментальная возрастающая вбок последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ из X_+ сходится в $(X, \tau(X))$ (ср. [6]). Ясно, что $\tau(X)$-полнота РНР $(X, \|\cdot\|_X)$ влечет за собой справедливость условия $(I_{d\sigma})$ для X. Для РНИП верно и обратное.

Теорема 7. *Пусть ∇ и $\mathcal{B}$ — мультинормированные булевы алгебры и $(X, \|\cdot\|_X)$ — РНИП в $L^0(\nabla)$ с $L^0(\mathcal{B})$-значной нормой. Если X удовлетворяет условию $(I_{d\sigma})$, при этом $\mathcal{B}$ имеет счетный тип, либо X — d-разложимо и d-полно, то $(X, \|\cdot\|_X)$ — $\tau(X)$-полно.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — $\tau(X)$-фундаментальная возрастающая вбок последовательность из X_+ с $\sup\limits_{n\geq 1} x_n = x \in X$. Согласно условию $(I_{d\sigma})$, существует такое $y \in X_+$, что $\|x_n - y\|_X \xrightarrow{t(\mathcal{B})} 0$. Так как $x_n \uparrow x$, то $y = x$, при этом $\|x\|_X = t(\mathcal{B})$-$\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_X = \sup\limits_{n\geq 1} \|x_n\|_X$. Следовательно, в силу теоремы 6, РНИП $(X, \|\cdot\|_X)$ — интервально $\tau(X)$-полно, и поэтому в $L^0(\nabla)$ определено РНИП $(\widehat{X}, \|\cdot\|_{\widehat{X}})$.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что в РНИП $(X, \|\cdot\|_X)$ выполнено условие (I_σ). Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — $\tau(X)$-фундаментальная возрастающая последовательность из X_+. Согласно теореме 2, существует такое $x \in L^0(\nabla)$, что $x_n \uparrow x$. Более того, $x \in \widehat{X}$ и $\|x - x_n\|_{\widehat{X}} \xrightarrow{t(\mathcal{B})} 0$ при $n \to \infty$. Покажем, что $x \in X$ (в этом случае $\|x - x_n\|_X = \|x - x_n\|_{\widehat{X}} \xrightarrow{t(\mathcal{B})} 0$, т.е. в X выполнено условие (I_σ)).

Рассмотрим идемпотент $p_n = s((2x_n - x)_+)$, $n \in \mathbb{N}$, и положим $p_0 = 0$. Так как $x_n \leq x_{n+1}$, то $p_n \leq p_{n+1}$, при этом $p_n \leq s(x_n) \vee s(x) = s(x)$. Так же, как и при доказательстве утверждения 6, устанавливается, что $p_n \uparrow s(x)$. Положим

$$y_1 = p_1 x_1, ..., y_n = y_{n-1} + (p_n - p_{n-1}) x_n, \ n \geq 2.$$

Ясно, что $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ — возрастающая вбок последовательность, при этом, из неравенств $x_n \leq x_{n+1}$ следует, что $0 \leq y_n \leq x_n$, в частности, $y_n \in X$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Покажем, что последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной относительно топологии $\tau(X)$. Имеем, что

$$y_{n+m} - y_n = (p_{n+1} - p_n)x_{n+1} + ... + (p_{n+m} - p_{n+m-1})x_{n+m} \leq (\mathbf{1}_\nabla - p_n)x.$$

Так как

$$(\mathbf{1}_\nabla - p_n)x = (\mathbf{1}_\nabla - p_n)(2x - x) \leq (\mathbf{1}_\nabla - p_n)(2x - 2x_n) \leq 2(x - x_n),$$

то $0 \leq (\mathbf{1}_\nabla - p_n)x \leq 2(x - x_n)$, и поэтому $\|(\mathbf{1}_\nabla - p_n)x\|_{\widehat{X}} \leq 2\|x - x_n\|_{\widehat{X}} \xrightarrow{t(\mathcal{B})} 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $\|y_{n+m} - y_n\|_X \xrightarrow{t(\mathcal{B})} 0$ при $n \to \infty$, т.е. $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть возрастающая вбок фундаментальная последовательность из $(X, \tau(X))$. Согласно условию $(I_{d\sigma})$, существует $y \in X_+$, для которого $\sup\limits_{n\geq 1} y_n = y = \tau(X) - \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Поскольку

$$(p_n - p_{n-1})x \leq 2(p_n - p_{n-1})x_n = 2y_n,$$

то

$$x = \sup_{n\geq 1}(p_n - p_{n-1})x \leq 2\sup_{n\geq 1} y_n = 2y \in X.$$

Следовательно, $x \in X$. □

Из "векторного" варианта теоремы Амемия [10, теоремы 5, 7] и теоремы 7 вытекает следующий критерий полноты РНИП в $L^0(\nabla)$ с $L^0(\mathcal{B})$-значной нормой.

Теорема 8. *Пусть ∇ и $\mathcal{B}$ — мультинормированные булевы алгебры и $(X, \|\cdot\|_X)$ — РНИП в $L^0(\nabla)$ с $L^0(\mathcal{B})$-значной нормой. Если $\mathcal{B}$ — мультинормированная булева алгебра счетного типа, либо X — d - разложимо и d-полно, то следующие условия эквивалентны:*

(i) $(X, \|\cdot\|_X)$ — (bo)-секвенциально полно;

(ii) $(X, \|\cdot\|_X)$ — $\tau(X)$-секвенциально полно;

(iii) $(X, \|\cdot\|_X)$ — (bo)-полно;

(iv) $(X, \|\cdot\|_X)$ — $\tau(X)$-полно;

(v) $(X, \|\cdot\|_X)$ удовлетворяет условию (I_σ);

(vi) для любой $\tau(X)$-фундаментальной возрастающей последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ из X_+ в X существует $\sup\limits_{n\geq 1} x_n$;

(vii) $(X, \|\cdot\|_X)$ удовлетворяет условию $(I_{d\sigma})$;

$(viii)$ для любой $\tau(X)$-фундаментальной возрастающей вбок последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_+$ в X существует $\sup\limits_{n\geq 1} x_n$;

(ix) для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ попарно дизъюнктных элементов из X_+, у которой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X$ сходится в $(L^0(\mathcal{B}), t(\mathcal{B}))$, в X существует $\sup\limits_{n\geq 1} x_n$.

Доказательство. Импликации $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (vi) \Rightarrow (i)$ установлены в [10, теоремы 2,5,7].

Импликации $(ii) \Rightarrow (vii) \Rightarrow (viii)$ являются очевидными. Импликация $(vii) \Rightarrow (iv)$ установлена в теореме 7.

$(viii) \Rightarrow (vii)$. Предположим сначала, что булева алгебра $\mathcal{B}$ имеет счетный тип. Выберем базис идеальных окрестностей нуля $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ в топологии $t(\mathcal{B})$, для которых $U_{n+1}+U_{n+1} \subset U_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — возрастающая вбок фундаментальная последовательность положительных элементов из $(X, \tau(X))$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $n\|x_{n+1}-x_n\|_X \in U_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Для возрастающей последовательности $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k(x_{k+1}-x_k)$ из X_+ верны равенства

$$(y_{n+1}-y_n) \wedge y_n = ((n+1)(x_{n+2}-x_{n+1})) \wedge (\sum_{k=1}^{n} k(x_{k+1}-x_k)) = 0,$$

т.е. последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастает вбок. Кроме того,

$$\|y_m - y_n\|_X \leq \sum_{k=n+1}^{m} k\|x_{k+1}-x_k\|_X \in U_{n+1} + ... + U_m \subset U_n$$

для всех $m > n$. Следовательно, последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — $\tau(X)$ — фундаментальна и, в силу условия $(viii)$, в X существует $y = \sup\limits_{n\geq 1} y_n$. Кроме того, согласно условию $(viii)$, в X также существует $x = \sup\limits_{n\geq 1} x_n$, при этом

$$n(x-x_n) = n(\sup_{k\geq n}(x_{k+1}-x_k)) \leq y.$$

Следовательно, $\|x-x_n\|_X \leq \frac{1}{n}\|y\|_X \xrightarrow{t(\mathcal{B})} 0$. Это означает, что $(X, \|\cdot\|_X)$ удовлетворяет условию $(I_{d\sigma})$.

Пусть $\mathcal{B}$ — произвольная мультинормированная булева алгебра, а $(X, \|\cdot\|_X)$ — d-разложимое и d-полное РНИП в $L^0(\nabla)$ с $L^0(\mathcal{B})$-значной нормой. Пусть $\{e_i\}_{i\in I}$ такое разбиение единицы булевой алгебры $\mathcal{B}$, что $\mathcal{B}_{e_i}$ есть булева алгебра счетного типа для каждого $i \in I$. В этом случае $(X_{e_i}, \|\cdot\|_{X_{e_i}})$ с нормой $\|x\|_{X_{e_i}} = \|x\|_X$ является РНИП в $L^0(\nabla)$ с $L^0(\mathcal{B}_{e_i})$-значной нормой. Согласно доказанному выше, в случае булевой алгебры счетного типа, $(X_{e_i}, \|\cdot\|_{X_{e_i}})$ удовлетворяет условию $(I_{d\sigma})$. Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — $\tau(X)$-фундаментальная возрастающая вбок последовательность из X_+, то, согласно теореме 2, существует такое $x \in L^0_+(\nabla)$, что $x_n \uparrow x$. Взяв отображение $\varphi : \mathcal{B} \to \nabla$ из утверждения 4, получим, что $\varphi(e_i)x_n \uparrow \varphi(e_i)x$ для каждого $i \in I$, при этом $\{\varphi(e_i)x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — возрастающая вбок фундаментальная последовательность в $(X_{e_i}, \tau(X_{e_i}))$. Поскольку $(X_{e_i}, \tau(X_{e_i}))$ удовлетворяет условию $(I_{d\sigma})$, то $\varphi(e_i)x_n \xrightarrow{\tau(X_{e_i})} \varphi(e_i)x \in X_{e_i} = \varphi(e_i)X$ для всех $i \in I$. В силу d-полноты РНИП $(X, \|\cdot\|_X)$ существует такое $y \in X$, что $\varphi(e_i)y = \varphi(e_i)x$ для всех $i \in I$. Поскольку $\sup\limits_{i\in I} \varphi(e_i) = \varphi(\sup\limits_{i\in I} e_i) = \varphi(\mathbf{1}_{\mathcal{B}}) = s(X)$ (утверждение $4(ii)$) и $s(x) = \sup\limits_{n\geq 1} s(x_n) \leq s(X)$, то $x = y \in X$, при этом, в силу утверждения 3, $x_n \xrightarrow{\tau(X)} x$.

$(ii) \Rightarrow (ix)$. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — такая последовательность попарно дизъюнктных элементов из X_+, что последовательность $a_k = \{\sum\limits_{n=1}^{k} \|x_n\|_X\}_{k=1}^{\infty}$ сходится в

$(L^0(\mathcal{B}), t(\mathcal{B}))$. Положим $y_k = \sum\limits_{n=1}^{k} x_n$. Ясно, что $0 \le y_k \le y_{k+1} \in X_+$, при этом $\|y_{k+m} - y_k\|_X = \|\sum\limits_{n=k+1}^{k+m} x_n\|_X \le \sum\limits_{n=k+1}^{k+m} \|x_n\|_X = a_{k+m} - a_k \xrightarrow{t(\mathcal{B})} 0$ при $k \to \infty$. Следовательно, $\{y_k\}$ — фундаментальная последовательность из $(X, \tau(X))$, и в силу условия (ii), существует такое $y \in X$, что $y_k \uparrow y$. Поскольку $\{x_n\}$ — попарно дизъюнктные элементы из X_+, то $y_k = \sup\limits_{1\le n\le k} x_n$, и поэтому $\sup\limits_{n\ge1} x_n = \sup\limits_{k\ge1} y_k = y$.

$(ix) \Rightarrow (viii)$. Предположим сначала, что булева алгебра $\mathcal{B}$ имеет счетный тип и выберем счетный базис $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ окрестностей нуля в $(L^0(\mathcal{B}), t(\mathcal{B}))$, для которого $U_{n+1} + U_{n+1} \subset U_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — возрастающая вбок фундаментальная последовательность положительных элементов из $(X, \tau(X))$. Покажем, что в X существует $\sup\limits_{n\ge1} x_n$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\|x_{n+1} - x_n\|_X \in U_n$. В силу $t(\mathcal{B})$-полноты $L^0(\mathcal{B})$ (теорема $1(i)$) и выбора окрестностей U_n, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\|_X$ сходится в $(L^0(\mathcal{B}), t(\mathcal{B}))$. Поскольку элементы $(x_{n+1} - x_n)$ попарно дизъюнктны, то, согласно условию (ix), в X существует $y = \sup\limits_{n\ge1}(x_{n+1} - x_n)$. Следовательно, в X существует и $\sup\limits_{n\ge1} x_n = y + x_1 \in X$.

Если $\mathcal{B}$ — произвольная мультинормированная булева алгебра, а $(X, \|\cdot\|_X)$ — d-разложимое и d-полное РНИП в $L^0(\nabla)$, то, повторяя конец доказательства импликации $(viii) \Rightarrow (vii)$, получим, что условие $(viii)$ верно в РНИП X. $\square$

Следует отметить, что импликации $(iv) \Leftrightarrow (vii) \Leftrightarrow (ix)$ из теоремы 8 есть "векторный" вариант известного критерия Ю.А. Абрамовича для полноты нормированных порядково полных векторных решеток.

Приведем иллюстрацию к использованию теоремы 8 для решеточно нормированных пространств Орлича [4].

Пусть ∇ и $\mathcal{B}$ — мультинормированные булевы алгебры, $m : \nabla \to L^0(\mathcal{B})$ — строго положительная вполне аддитивная $L^0(\mathcal{B})$-значная мера, обладающая следующим свойством d-разложимости: если $e \in \nabla$ и $m(e) = a + b$, $ab = 0$, $a, b \in L^0_+(\mathcal{B})$, то существуют такие $p, q \in \nabla$, что $e = p \vee q$ и $m(p) = a$, $m(q) = b$.

Пусть M — произвольная N-функция, определенная на $(-\infty; +\infty)$, и M^* — дополнительная N-функция к M [15, гл. I, §1]. Положим

$$L^0_M(\nabla, m) = \{x \in L^0(\nabla) : M(x) \in L^1(\nabla, m)\},$$

$$L_M(\nabla, m) = \{x \in L^0(\nabla) : xy \in L^1(\nabla, m) \ \forall \ y \in L^0_{M^*}(\nabla, m)\}.$$

Ясно, что $L_M(\nabla, m)$ есть ИП в $L^0(\nabla)$. В [4] установлено, что равенство

$$\|x\|_M = \sup\{|\int xy \, dm| : y \in A(M^*)\}$$

определяет d-разложимую и d-полную $L^0(\mathcal{B})$-значную норму на $L_M(\nabla, m)$ со свойством монотонности, где $A(M^*) = \{y \in L^0_{M^*}(\nabla, m) : \int M^*(y) dm \le \mathbf{1}_{\mathcal{B}}\}$. В частности, пара $(L_M(\nabla, m), \|\cdot\|_M)$ есть РНИП в $L^0(\nabla)$.

Пусть $\{x_n\}$ — такая последовательность попарно дизъюнктных элементов из $L_M(\nabla, m)$, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_M$ сходится в $(L^0(\mathcal{B}), t(\mathcal{B}))$. Так как $x_n x_k = 0$ при $k \neq n$, то в $L^0(\nabla)$ существует $x = \sup\limits_{n \geq 1} x_n$. Если $0 \leq y \in A(M^*)$, то

$$0 \leq \int xy\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int x_n y\, dm \leq (\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_M) \in L^0_+(\mathcal{B}),$$

и поэтому $x \in L_M(\nabla, m)$. Следовательно, в силу теоремы 8, решеточно нормированное пространство Орлича $(L_M(\nabla, m), \|\cdot\|_M)$ является (bo)-полным.

Список литературы

[1] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М, 1977.

[2] А. Г. Кусраев, *Мажорируемые операторы*, Наука, М, 2003.

[3] Т. А. Сарымсаков, *Топологические полуполя и их приложения*, ФАН, Ташкент, 1989.

[4] Б. С. Закиров, “Решетки Орлича – Канторовича, ассоциированные с L^0-значной мерой”, *Узбекский мат. журн.*, **4** (2007), 18–34.

[5] Т. А. Сарымсаков, Ш. А. Аюпов, Дж. Хаджиев, В. И. Чилин, *Упорядоченные алгебры*, ФАН, Ташкент, 1983.

[6] Ю. А. Абрамович, “Некоторые теоремы о нормированных структурах”, *Вестник ЛГУ*, **13** (1971), 5–11.

[7] Б. З. Вулих, *Введение в теорию полуупорядоченных пространств*, Физматгиз, 1961.

[8] Д. А. Владимиров, *Булевы алгебры*, Наука, М, 1969.

[9] Х. Шефер, *Топологические векторные пространства*, Мир, М, 1971.

[10] В. И. Чилин, М. М. Юсупова, “Критерии полноты для решеточно нормированных пространств”, *Динамические системы*, **1-2.** (2012. Том 2(30)), 155–167.

[11] В. И. Чилин, М. М. Юсупова, “Решетки Банаха – Канторовича с порядково непрерывной нормой”, *Узбекский мат. журн.*, **4** (2012), 151–161.

[12] В. И. Чилин, М. М. Юсупова, “Топологическое пополнение в решеточно нормированных идеальных пространствах”, *Узбекский мат. журн.*, **3** (2013), 137–150.

[13] В. И. Чилин, М. М. Юсупова, “Топологическая полнота порядковых интервалов в решеточно нормированных идеальных пространствах”, *Узбекский мат. журн.*, **1** (2013), 145–155.

[14] А. Н. Векслер, “Признаки интервальной полноты и интервально-полной нормируемости KN-линеалов”, *Известия ВУЗов. Математика*, **4(95)** (1970), 36–46.

[15] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, *Выпуклые функции*, ГИФМЛ, М, 1958.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 2013 г.

Chilin V. I., Yusupova M. M Lattice normed lattices with monotonically complete and order semicontinuous norm. Far Eastern Mathematical Journal. 2014. V. 14. № 2. P. 280–296.

ABSTRACT

The topological and order properties of the lattice normed lattices (LNL) with monotonically complete and order semicontinuous norm, taking their values in extended Kantorovich – Pinsker spaces, are studied. It is proved the "vector" variant of Abramovich theorem, giving the criterion of (*bo*)-completeness of LNL.

Key words: *lattice normed lattice, conditions (B) and (C), disjoint decomposable norm*