Дальневосточный математический журнал. 2015. Том 15. № 1. С. 3–20

УДК 517.951
MSC2010 35K15

© Е. В. Амосова[1]

Карлемановская оценка решений задачи Неймана для параболического уравнения

Выводится новая карлемановская оценка решений задачи Неймана для параболического уравнения и для уравнения Лапласа.

Ключевые слова: *точная управляемость, оценки карлемановского типа.*

1. Оценки решений задачи Неймана

В последнее время интенсивно исследуется управляемость параболических уравнений с простейшими нелинейностями и управляемость уравнений, описывающих течение жидкости или газа [1]–[30].

Свойство управляемости для линейных параболических уравнений вытекает из априорных оценок карлемановского типа. Вывод этих оценок является центральным местом при доказательстве точной управляемости.

При помощи карлемановских оценок А. Каземи, М. Клибанов решили в [31] задачу наблюдаемости для волнового уравнения, а в работе [32] исследована управляемость системы гиперболических уравнений.

Карлемановские оценки для эллиптических и параболических уравнений с негладкими правыми частями получены в [33], [34]. Случай гиперболического уравнения рассмотрен в работе А. Руиза [35]. Наиболее общие результаты получены в работах Д. Татару [36].

Отметим, что получение карлемановских оценок связано с выбором соответствующих дифференциальному уравнению весовых функций, при этом важную роль в выборе весовой функции играют граничные условия. Обычно, если требуется получить оценку карлемановского типа для задачи Неймана, весовая функция выбирается с условием Дирихле на границе. В работе [37] получена карлемановская оценка для задачи Неймана с условием Дирихле на границе для многомерного параболического уравнения, в [38] такая оценка выведена для одномерного случая. При изучении задачи управляемости для двумерных уравнений Навье–Стокса, описывающих течение вязкого газа, возникла необходимость в получении

[1]Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8; Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: leb@iam.dvo.ru

карлемановской оценки для параболической задачи Неймана с весовой функцией, удовлетворяющей условию Неймана на границе.

Рассмотрим обратное параболическое уравнение с условием Неймана на границе:

$$\partial_t z + \Delta z = f(t,x), \quad (t,x) \in Q, \quad (\nabla z \cdot n) = 0, \quad x \in \Sigma, \quad \int\limits_{\Omega} z\, dx = 0, \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2)$, $Q = (0,T) \times \Omega$, $\Omega \in \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $T > 0$, $n = (n_1, n_2)$ — векторное поле внешних нормалей к $\partial\Omega$, $\Sigma = (0,T) \times \partial\Omega$ — боковая поверхность цилиндра Q, $(u \cdot n) = u_1 n_1 + u_2 n_2$; Δ — оператор Лапласа, $\partial_t = \partial/\partial t$.

Норму в пространстве $L^2(\Omega)$ обозначим через $\|\cdot\|$. Пространства функций, состоящие из l раз непрерывно дифференцируемых функций на $\bar\Omega$, обозначим $C^l(\bar\Omega)$, $H^s(\Omega)$ — пространство Соболева.

Целью данной работы является получение карлемановской оценки решений задачи (1). Следующая лемма является основным инструментом при выводе оценок карлемановского типа. Доказательство этой леммы можно найти в [17, с. 327].

Пусть ω — некоторая фиксированная подобласть, компактно вложенная в Ω, и ω' — подобласть ω такая, что $\omega' \subset\subset \omega \subset\subset \Omega$.

Лемма 1. *Существует функция $\beta(x) \in C^2(\bar\Omega)$, не имеющая критических точек в $\overline{\Omega \setminus \omega'}$ такая, что*

$$(\nabla\beta(x) \cdot n(x)) \le 0 \quad \forall x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

где $n(x)$ — векторное поле внешних нормалей к $\partial\Omega$.

Так как $\beta(x)$, $x \in \overline{\Omega \setminus \omega'}$, не имеет критических точек, получаем

$$\min_{x \in \overline{\Omega \setminus \omega'}} |\nabla\beta(x)| > 0. \tag{3}$$

Так же как и в [17], будем считать, что $\beta(x) \ge \ln 3$; $\min\limits_{x\in\overline\Omega} \beta(x) > \frac{3}{4} \max\limits_{x\in\overline\Omega} \beta(x)$.

Пусть $\gamma(t) \in C^\infty(0,T)$ — функция, удовлетворяющая условиям

$$0 < \gamma(t) \le 1, \qquad \gamma(t) = \begin{cases} t, & t \in (0, T_0), \\ T - t, & t \in (T - T_0, T), \end{cases} \qquad T_0 = \min\left\{\frac{T}{3}, \frac{1}{2}\right\}.$$

Функция $\gamma(t)$ монотонно растет при $t \in (0, T/2)$ и монотонно убывает при $t \in (T/2, T)$. Введем функции

$$\varphi(t,x) = \frac{e^{\lambda\beta(x)}}{\gamma(t)}; \qquad \alpha = \alpha_\lambda(t,x) = \frac{e^{\frac{4\lambda}{3}\|\beta\|_{C(\overline\Omega)}} - e^{\lambda\beta(x)}}{\gamma(t)}, \tag{4}$$

где $\lambda > 0$ — параметр.

Теорема 1. *Пусть z и f удовлетворяют соотношениям (1) и $s \geq -3$. Предположим, что при некотором $\lambda = \lambda_0$ левая часть неравенства (5) конечна. Тогда при $\lambda > \hat{\lambda}$, где $\hat{\lambda} \geq \lambda_0$ достаточно велико, справедлива карлемановская оценка*

$$\int_Q \varphi^{2s-1}(\lambda^{-1}|\partial_t z|^2 + \sum_{i,j=1}^{2} |\partial^2_{x_i x_j} z|^2 + \lambda\varphi^2|\nabla z|^2 + \lambda^4\varphi^4|z|^2)e^{-2\alpha_\lambda}\, dxdt \leq$$

$$\leq c\int_Q \varphi^{2s}|f|^2 e^{-2\alpha_\lambda}\, dxdt + c\int_{Q^{\omega'}} \lambda^4\varphi^{2s+3}|z|^2 e^{-2\alpha_\lambda}\, dxdt, \tag{5}$$

где $Q^{w'} = (0,T)\times\omega'$, $c > 0$ — константа, не зависящая от f, z и λ.

Доказательство. Следуя идеям получения карлемановских оценок для параболических уравнений изложенных в работе [17, глава 7], получим аналогичные оценки для задачи (1). Переходя в (1) от функции z к функции w, определяемой равенством

$$z(t,x) = \varphi^{-s}e^{\alpha_\lambda}w, \tag{6}$$

запишем задачу для определения w:

$$L_1 w + L_2 w = f_\lambda(t,x), \qquad (t,x)\in Q, \tag{7}$$

$$(\nabla w\cdot n) = \lambda(\varphi+s)w(\nabla\beta\cdot n), \qquad x\in\Sigma, \tag{8}$$

где

$$L_1 w = \Delta w + \lambda^2\varphi^2|\nabla\beta|^2 w + (s-\alpha)(\partial_t \ln\gamma)w, \tag{9}$$

$$L_2 w = \partial_t w - 2\lambda(\varphi+s)(\nabla\beta\cdot\nabla w), \tag{10}$$

$$f_\lambda = \varphi^s e^{-\alpha} f + [\lambda(\varphi+s)\Delta\beta + (\lambda^2\varphi(1-2s) - s^2\lambda^2)|\nabla\beta|^2]w. \tag{11}$$

Из (6), учитывая определение функции φ, следуют соотношения

$$w|_{t=0} = w|_{t=T} = 0. \tag{12}$$

Из (7) находим

$$\|L_1 w\|^2 + \|L_2 w\|^2 + 2(L_1 w\cdot L_2 w)_{L^2(Q)} = \|f_\lambda\|^2, \tag{13}$$

$$(L_1 w\cdot L_2 w)_{L^2(Q)} = I_1 + I_2 + I_3, \tag{14}$$

где

$$I_1 = \int_Q \left(\Delta w + \lambda^2\varphi^2|\nabla\beta|^2 w + (s-\alpha)(\partial_t\ln\gamma)w\right)\partial_t w\, dxdt, \tag{15}$$

$$I_2 = -2\int_Q \left(\lambda^2\varphi^2|\nabla\beta|^2 + (s-\alpha)(\partial_t\ln\gamma)\right) w\lambda(\varphi+s)(\nabla\beta\cdot\nabla w)\, dxdt, \tag{16}$$

$$I_3 = -\int_Q (\Delta w)2\lambda(\varphi+s)(\nabla\beta\cdot\nabla w)\, dxdt. \tag{17}$$

Из определения φ и α (4) следуют неравенства

$$|\partial_t\varphi| \le c\varphi^2, \qquad |(s-\alpha)(\partial_t \ln\gamma)| \le c\varphi^2, \qquad |\partial_t((s-\alpha)\ln\gamma)| \le c\varphi^3. \tag{18}$$

Преобразуем выражение I_1 с помощью формулы интегрирования по частям, учитывая граничное условие (8):

$$I_1 = \int\limits_Q \left(-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla w|^2 + \frac{1}{2}(\lambda^2\varphi^2|\nabla\beta|^2 + (s-\alpha)(\partial_t\ln\gamma))\partial_t(w)^2\right) dxdt+$$

$$+\int\limits_\Sigma \frac{1}{2}\lambda(\varphi+s)(\nabla\beta\cdot n)\partial_t(w)^2\, d\sigma dt =$$

$$= -\int\limits_Q\left(\lambda^2\varphi\partial_t\varphi|\nabla\beta|^2 + \frac{1}{2}\partial_t((s-\alpha)(\partial_t\ln\gamma))\right)|w|^2\, dxdt - \frac{1}{2}\int\limits_\Sigma\lambda\partial_t\varphi(\nabla\beta\cdot n)|w|^2\, d\sigma dt. \tag{19}$$

С помощью неравенств (18), из (19) найдем оценку

$$I_1 \ge -c\int\limits_Q \lambda^3\varphi^3|w|^2\, dxdt - c\int\limits_\Sigma \lambda\varphi^2|w|^2|(\nabla\beta\cdot n)|\, d\sigma dt. \tag{20}$$

Интегрируя по частям (16), получим

$$I_2 = -\int\limits_Q (\lambda^2\varphi^2|\nabla\beta|^2 + (s-\alpha)(\partial_t\ln\gamma))\lambda(\varphi+s)(\nabla\beta\cdot\nabla w^2)\, dxdt =$$

$$= \int\limits_Q ((3\lambda^4\varphi^3 + 2\lambda^3 s\varphi^2)|\nabla\beta|^4 + \lambda^3\varphi^2(\varphi+s)[(\nabla\beta\cdot\nabla|\nabla\beta|^2) + |\nabla\beta|^2\Delta\beta]+$$

$$+ (\partial_t\ln\gamma)[\lambda^2\varphi(\varphi-\alpha+2s)|\nabla\beta|^2 + \lambda(s-\alpha)(\varphi+s)\Delta\beta])|w|^2\, dxdt-$$

$$-\int\limits_\Sigma(\lambda^2\varphi^2|\nabla\beta|^2 + (s-\alpha)(\partial_t\ln\gamma))\lambda(\varphi+s)(\nabla\beta\cdot n)|w|^2\, d\sigma dt. \tag{21}$$

Применяя неравенства (18), из (21) найдем оценку

$$I_2 \ge 3\int\limits_Q \lambda^4\varphi^3|w|^2\, dxdt - c\int\limits_Q \lambda^3\varphi^3|w|^2\, dxdt-$$

$$-\int\limits_\Sigma \lambda^3\varphi^3(\nabla\beta\cdot n)|\nabla\beta|^2|w|^2\, d\sigma dt - c\int\limits_\Sigma \lambda^2\varphi^3|(\nabla\beta\cdot n)||w|^2\, d\sigma dt. \tag{22}$$

Чтобы найти оценку выражения I_3, рассмотрим следующую задачу:

$$\Delta r = \operatorname{div}\left((1+(\lambda\varphi)^{-4})\nabla w\right), \qquad (t,x)\in Q; \qquad r|_\Sigma = 0. \tag{23}$$

Введем функцию тока $\phi(t,x)$, связанную с векторным полем

$$u = \nabla r - (1+(\lambda\varphi)^{-4})\nabla w \tag{24}$$

соотношениями

$$\partial_{x_1}\phi = -u_2, \qquad \partial_{x_2}\phi = u_1.$$

Определим вектор $\mathrm{Rot}\,\phi = (\partial_{x_2}\phi, -\partial_{x_1}\phi)$, для которого согласно (24), справедливо равенство

$$\mathrm{Rot}\,\phi = \nabla r - (1+(\lambda\varphi)^{-4})\nabla w. \tag{25}$$

Перепишем (25) следующим образом:

$$\mathrm{Rot}\,\phi = \nabla(r - (1+(\lambda\varphi)^{-4})w) + w\nabla(\lambda\varphi)^{-4}. \tag{26}$$

Обозначим

$$v = \mathrm{Rot}\,\phi - w\nabla(\lambda\varphi)^{-4}. \tag{27}$$

Заметим, что из (26), (27), следуют равенства

$$\mathrm{rot}\,v = 0, \quad \mathrm{div}\,v = g, \quad \text{где} \quad g = -\mathrm{div}\,(w\nabla(\lambda\varphi)^{-4}). \tag{28}$$

Получим оценку выражения $\lambda\varphi^3\mathrm{div}\,v$ в пространстве $L^2(0,T;H^1(\Omega))$. Учитывая, $\nabla\varphi = \lambda\varphi\nabla\beta$, вычислим $F = \nabla(\lambda\varphi^3 g)$,

$$\begin{aligned} F = \nabla\left(\lambda\varphi^3\mathrm{div}\,(w\nabla(\lambda\varphi)^{-4})\right) = -4\lambda^{-2}\varphi^{-1}\nabla(\nabla w\cdot\nabla\beta)+ \\ +4\lambda^{-1}\varphi^{-1}(\nabla w\cdot\nabla\beta)\nabla\beta + \lambda^{-1}\varphi^{-1}(16|\nabla\beta|^2 - 4\lambda^{-1}\Delta\beta)\nabla w+ \\ +\varphi^{-1}\left(\lambda^{-1}\nabla(16|\nabla\beta|^2 - 4\lambda^{-1}\Delta\beta) - (16|\nabla\beta|^2 - 4\lambda^{-1}\Delta\beta)\nabla\beta\right)w. \end{aligned} \tag{29}$$

Из (28), в силу равенства (29), найдем

$$\begin{aligned} \int\limits_0^T \|\lambda\varphi^3\mathrm{div}\,v\|^2_{H^1(\Omega)}\,dt \le c\int\limits_Q |\lambda\varphi^3\mathrm{div}\,v|^2\,dxdt + c\int\limits_Q |\nabla(\lambda\varphi^3\mathrm{div}\,v)|^2\,dxdt \le \\ \le c\int\limits_Q \left|\lambda\varphi^3\mathrm{div}\,(w\nabla(\lambda\varphi)^{-4})\right|^2\,dxdt + c\int\limits_Q \left|\nabla\left(\lambda\varphi^3\mathrm{div}\,(w\nabla(\lambda\varphi)^{-4})\right)\right|^2\,dxdt \le \\ \le c\int\limits_Q \lambda^{-2}\varphi^{-2}\left(\sum_{i,j=1}^2 |\partial^2_{x_ix_j}w|^2 + |\nabla w|^2 + \lambda^2|w|^2\right)\,dxdt. \end{aligned} \tag{30}$$

Таким образом, для функции $(\lambda\varphi^3\mathrm{div}\,v) \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$ определен след $\gamma_{\mathrm{div}}v = (\lambda\varphi^3\mathrm{div}\,v)|_{\partial\Omega}\colon H^1(\Omega)\to H^{1/2}(\partial\Omega)$ на границе $\partial\Omega$ для почти всех $t\in(0,T)$, причем

$$\begin{aligned} \int\limits_0^T \|\lambda\varphi^3\mathrm{div}\,v\|^2_{H^{1/2}(\partial\Omega)}\,dt \le c\int\limits_0^T \|\lambda\varphi^3\mathrm{div}\,v\|^2_{H^1(\Omega)}\,dt \le \\ \le c\int\limits_Q \lambda^{-2}\varphi^{-2}\left(\sum_{i,j=1}^2 |\partial^2_{x_ix_j}w|^2 + |\nabla w|^2 + \lambda^2|w|^2\right)\,dxdt. \end{aligned} \tag{31}$$

Рассмотрим пространство

$$H^1_{\mathrm{div}} = \left\{v\in L^2(Q)\colon \lambda\varphi^3\mathrm{div}\,v \in L^2(0,T;H^1(\Omega)), \quad \mathrm{rot}\,v = 0\right\}. \tag{32}$$

Для функции $v \in H^1_{\mathrm{div}}$ определим оператор сужения на границу $\Sigma = (0,T) \times \partial\Omega$

$$\tilde{\gamma}_1 v = \lambda\varphi^3 (v \cdot n)|_{\partial\Omega} \colon H^1_{\mathrm{div}} \to H^{-1/2}(\partial\Omega) \tag{33}$$

для почти всех $t \in (0,T)$ по формуле

$$< \tilde{\gamma}_1 v, \mathrm{div}\,\xi >_{H^{-1/2}(\partial\Omega)\times H^{1/2}(\partial\Omega)} =$$
$$=< (\xi \cdot n), \gamma_{\mathrm{div}} v >_{H^{-1/2}(\partial\Omega)\times H^{1/2}(\partial\Omega)} - \int\limits_{\Omega} (v \cdot \nabla(\lambda\varphi^3 \mathrm{div}\,\xi))\,dx + \int\limits_{\Omega} (F \cdot \xi)\,dx \tag{34}$$

для почти всех $t \in (0,T)$. Здесь $< \cdot, \cdot >_{X\times X'}$ — соотношение двойственности между пространством X и ему сопряженным $H^{-1/2}(\partial\Omega) = (H^{1/2}(\partial\Omega))'$.

Равенство (34) получится, если уравнение $\nabla(\lambda\varphi^3 \mathrm{div}\, v) = F$, где F определена в (29), умножить на произвольную функцию $\xi \in H^1_{\mathrm{div}}$ скалярно в $L^2(\Omega)$, а затем применить формулу Грина. Из (34) в силу (30), (31), следует оценка

$$\int\limits_0^T \|\tilde{\gamma}_1 v\|^2_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \le c\int\limits_Q |v|^2 dxdt + c\int\limits_Q \lambda^{-2}\varphi^{-2}\left(\sum_{i,j=1}^{2} |\partial^2_{x_i x_j} w|^2 + |\nabla w|^2 + \lambda^2 |w|^2\right) dxdt. \tag{35}$$

Пусть $\hat{\varphi}(t) = \max\limits_{x\in\bar{\Omega}} \varphi(t,x)$, $t \in [0,T]$, где $\varphi(t,x)$ определена в (4). Нетрудно увидеть

$$\hat{\varphi}(t) \le T\varphi^{4/3}(t,x) \quad \forall (t,x) \in \bar{Q}. \tag{36}$$

Обозначим через

$$p = r - (1 + (\lambda\varphi)^{-4})w. \tag{37}$$

Учитывая краевое условие (23) $p|_\Sigma = ((1 + (\lambda\varphi)^{-4})w)|_\Sigma$, а из (27) найдем $\nabla p = v$. Заметим, что для любой функции r $\mathrm{div}\,\nabla r = \varphi^{-3}\mathrm{div}\,(\varphi^3 \nabla r) - 3\lambda(\nabla r \cdot \nabla\beta)$, следовательно,

$$\varphi^{-3}\mathrm{div}\,(\varphi^3 \nabla p) = 3\lambda(\nabla p \cdot \nabla\beta) + \mathrm{div}\, v. \tag{38}$$

Умножим (38) на $\lambda^2\hat{\varphi}^3 p$ скалярно в $L^2(\Omega)$ и применим формулу Грина. После простых преобразований получим

$$\int\limits_\Omega \lambda^2\hat{\varphi}^3 |\nabla p|^2\,dx = \lambda\hat{\varphi}^3 < \lambda\varphi^3(v\cdot n), \varphi^{-3}p >_{H^{-1/2}(\partial\Omega)\times H^{1/2}(\partial\Omega)} - \int\limits_\Omega \lambda^2\hat{\varphi}^3 p\,\mathrm{div}\, v\,dx \le$$
$$\le c\int\limits_\Omega \lambda^2\varphi^6 |\mathrm{div}\, v|^2\,dx + c\int\limits_\Omega \lambda^2\varphi^2 |p|^2\,dx + I_\Gamma, \tag{39}$$

где, в силу существования оператора сужения (33),

$$I_\Gamma = \lambda\hat{\varphi}^3 < \lambda\varphi^3(v\cdot n), \varphi^{-3}p >_{H^{-1/2}(\partial\Omega)\times H^{1/2}(\partial\Omega)} = < \tilde{\gamma}_1 v, \lambda\hat{\varphi}^3\varphi^{-3}p >_{H^{-1/2}(\partial\Omega)\times H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq$$
$$\leq c\|\tilde{\gamma}_1 v\|^2_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} + c\|\lambda\hat{\varphi}^3\varphi^{-3}p\|^2_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq c\|\tilde{\gamma}_1 v\|^2_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} + c\|\lambda\hat{\varphi}^3\varphi^{-3}p\|^2_{H^1(\Omega)} \leq$$
$$\leq c\|\tilde{\gamma}_1 v\|^2_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} + c\int\limits_\Omega \lambda^2\hat{\varphi}^6\left(\nabla(\varphi^{-3}p)\right)^2\,dx \leq$$
$$\leq c\|\tilde{\gamma}_1 v\|^2_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} + c\int\limits_\Omega \lambda^2\varphi^8\left(\varphi^{-6}|\nabla p|^2 + \lambda\varphi^{-6}|p|^2)\right)^2\,dx \leq$$
$$\leq c\|\tilde{\gamma}_1 v\|^2_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} + c\int\limits_\Omega \lambda^2\varphi^2|\nabla p|^2\,dx + c\int\limits_\Omega \lambda^4\varphi^2|p|^2\,dx \tag{40}$$

для почти всех $t\in(0,T)$. Подставляя (40) в (39) и учитывая (30), (36), $\varphi<\hat{\varphi}$, находим

$$\int\limits_Q \lambda^2\varphi^3|\nabla p|^2\,dxdt \leq c\int\limits_Q \lambda^4\varphi^2|p|^2\,dxdt + \int\limits_Q \lambda^2\varphi^2|\nabla p|^2\,dxdt$$
$$+c\int\limits_Q \lambda^{-2}\varphi^{-2}\left(\sum_{i,j=1}^2 |\partial^2_{x_ix_j}w|^2 + |\nabla w|^2 + \lambda^2|w|^2\right)\,dxdt, \tag{41}$$

или

$$\int\limits_Q \lambda^2\varphi^3|\nabla p|^2\,dxdt \leq c\int\limits_Q \lambda^4\varphi^2|p|^2\,dxdt +$$
$$+c\int\limits_Q \lambda^{-2}\varphi^{-2}\left(\sum_{i,j=1}^2 |\partial^2_{x_ix_j}w|^2 + |\nabla w|^2 + \lambda^2|w|^2\right)\,dxdt. \tag{42}$$

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_\Omega \lambda^2\varphi^3(\nabla p\cdot\nabla p)\,dx = -\frac{3}{2}\int\limits_\Omega \lambda^3\varphi^3(\nabla\beta\cdot\nabla p^2)\,dx -$$
$$-\int\limits_\Omega \lambda^2\varphi^3 p\,\mathrm{div}\,v\,dx + < \lambda\varphi^3(\nabla p\cdot n), \lambda p >_{H^{-1/2}(\partial\Omega)\times H^{1/2}(\partial\Omega)}. \tag{43}$$

Учитывая $\lambda\varphi^3(\nabla p\cdot n)|_{\partial\Omega} = \lambda\varphi^3(v\cdot n)|_{\partial\Omega} = \tilde{\gamma}_1 v$, применим формулу Грина к первому слагаемому правой части (43), найдем

$$\frac{9}{2}\int\limits_\Omega \lambda^4\varphi^3|\nabla\beta|^2|p|^2\,dx - \frac{3}{2}\int\limits_{\partial\Omega} \lambda^3\varphi^3(\nabla\beta\cdot n)|p|^2\,d\sigma =$$
$$= \int\limits_\Omega \lambda^2\varphi^3|\nabla p|^2\,dx - \frac{3}{2}\int\limits_\Omega \lambda^3\varphi^3\Delta\beta|p|^2\,dx + \int\limits_\Omega \lambda^2\varphi^3 p\,\mathrm{div}\,v\,dx -$$
$$- < \tilde{\gamma}_1 v, \lambda p >_{H^{-1/2}(\partial\Omega)\times H^{1/2}(\partial\Omega)}. \tag{44}$$

Из (44) получим оценку

$$\int\limits_Q \lambda^4\varphi^3|\nabla\beta|^2|p|^2\,dxdt \le c\int\limits_Q \lambda^2\varphi^3|\nabla p|^2\,dxdt + \int\limits_Q \lambda^3\varphi^3|p|^2\,dxdt +$$

$$+c\int\limits_Q \lambda^2\varphi^6|\mathrm{div}\,v|^2\,dxdt + c\int\limits_0^T \|\tilde{\gamma}_1 v\|^2_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}.$$

Отсюда, с помощью (42), (36), (30), $\lambda < \varphi$, находим

$$\int\limits_Q \lambda^4\varphi^3|\nabla\beta|^2|p|^2\,dxdt \le c\int\limits_Q \lambda^3\varphi^3|p|^2\,dxdt +$$

$$+c\int\limits_Q \lambda^{-2}\varphi^{-2}\left(\sum_{i,j=1}^{2}|\partial^2_{x_ix_j}w|^2 + |\nabla w|^2 + \lambda^2|w|^2\right)\,dxdt. \tag{45}$$

Используя свойство (3), получим неравенство

$$\int\limits_Q \lambda^4\varphi^3|p|^2\,dxdt \le c_1\int\limits_Q \lambda^4\varphi^3|\nabla\beta|^2|p|^2\,dxdt + \int\limits_{Q^{\omega'}} \lambda^4\varphi^3|p|^2\,dxdt, \tag{46}$$

где $\omega' \subset\subset \omega \subset\subset \Omega$.

Из (46), (45) следует оценка

$$\int\limits_Q \lambda^4\varphi^3|p|^2dxdt \le \int\limits_{Q^{\omega'}}\lambda^4\varphi^3|p|^2dxdt + c\int\limits_Q\lambda^{-2}\varphi^{-2}\left(\sum_{i,j=1}^{2}|\partial^2_{x_ix_j}w|^2 + |\nabla w|^2 + \lambda^2|w|^2\right)dxdt. \tag{47}$$

Учитывая $v = \nabla p$, $\hat{\varphi} = \max\limits_{x\in\bar{\Omega}}\varphi$, (27), найдем оценку

$$\int\limits_{Q^{\omega'}}\lambda^4\varphi^3|p|^2dxdt \le c\lambda^4\hat{\varphi}^3\int\limits_{Q^{\omega'}}|\nabla p|^2dxdt \le c\lambda^4\hat{\varphi}^3\int\limits_{Q^{\omega'}}|\nabla\phi|^2dxdt + c\lambda^4\hat{\varphi}^3\int\limits_Q\lambda^{-4}\varphi^{-4}|w|^2dxdt. \tag{48}$$

Принимая во внимание (27), (28), получим равенство $-\Delta\phi = \mathrm{rot}\,(w\nabla(\lambda\varphi)^{-4})$. Оценивая $\|\phi\|_{H^1(\omega')} \le c\|\phi\|_{H^2(\omega')} \le c\|\Delta\phi\|_{L^2(\omega')}$ и используя (36), из (48) находим

$$\int\limits_{Q^{\omega'}} \lambda^4\varphi^3|p|^2\,dxdt \le \int\limits_Q (\lambda|\nabla w|^2 + |w|^2)\,dxdt. \tag{49}$$

Из (42), (47), (49), следует оценка

$$\int\limits_Q \lambda^2\varphi^3|\nabla p|^2\,dxdt + \int\limits_Q \lambda^3\varphi^3|p|^2\,dxdt \le$$

$$\le c\int\limits_Q \lambda^{-2}\varphi^{-2}\sum_{i,j=1}^{2}|\partial^2_{x_ix_j}w|^2\,dxdt + c\int\limits_Q \lambda|\nabla w|^2\,dxdt + c\int\limits_Q |w|^2\,dxdt. \tag{50}$$

Из (50), используя обозначения (27), (37), находим

$$\int\limits_Q \lambda^2\varphi^3|\mathrm{Rot}\,\phi|^2\,dxdt + \int\limits_Q \lambda^3\varphi^3|r|^2\,dxdt \le$$

$$\le c\int\limits_Q \lambda^{-2}\varphi^{-2}\sum_{i,j=1}^{2}|\partial^2_{x_ix_j}w|^2\,dxdt + c\int\limits_Q \lambda|\nabla w|^2\,dxdt + c\int\limits_Q \lambda^3\varphi^3|w|^2\,dxdt. \qquad (51)$$

Учитывая (23), (25), перепишем (17) в следующем виде:

$$I_3 = -\int\limits_Q (\Delta w)2\lambda(\varphi+s)(\nabla\beta\cdot\nabla w)\,dxdt = I_{31}+I_{32}+I_{33}, \qquad (52)$$

где

$$I_{31} = -\int\limits_Q (\Delta r)2\lambda(\varphi+s)(\nabla\beta\cdot\nabla r)\,dxdt;$$

$$I_{32} = \int\limits_Q 2\lambda(\varphi+s)(\lambda\varphi)^{-4}(\Delta w+\Delta r)(\nabla\beta\cdot\nabla w)\,dxdt -$$

$$-\,8\int\limits_Q \lambda^{-2}\varphi^{-4}(\varphi+s)(\nabla\beta\cdot\nabla w)^2\,dxdt;$$

$$I_{33} = \int\limits_Q (\Delta r)2\lambda(\varphi+s)(\nabla\beta\cdot\mathrm{Rot}\,\phi)\,dxdt.$$

Применим формулу интегрирования по частям к выражению I_{31}:

$$I_{31} = -\int\limits_Q (\Delta r)2\lambda(\varphi+s)(\nabla\beta\cdot\nabla r)\,dxdt =$$

$$= 2\int\limits_Q \lambda^2\varphi(\nabla r\cdot\nabla\beta)^2\,dxdt + 2\int\limits_Q \partial_{x_ix_j}\beta\partial_{x_i}r\partial_{x_j}r\lambda(\varphi+s)\,dxdt +$$

$$+\int\limits_Q \lambda(\varphi+s)(\nabla\beta\cdot\nabla|\nabla r|^2)\,dxdt - 2\int\limits_\Sigma(\nabla r\cdot n)\lambda(\varphi+s)(\nabla\beta\cdot\nabla r)\,d\sigma dt =$$

$$=\int\limits_Q\bigl(2\lambda^2\varphi(\nabla r\cdot\nabla\beta)^2 + \lambda(\varphi+s)(2\partial_{x_ix_j}\beta\partial_{x_i}r\partial_{x_j}r - \Delta\beta|\nabla r|^2) - \lambda^2\varphi|\nabla\beta|^2|\nabla r|^2\bigr)\,dxdt -$$

$$-2\int\limits_\Sigma(\nabla r\cdot n)\lambda(\varphi+s)(\nabla\beta\cdot\nabla r)\,d\sigma dt + \int\limits_\Sigma \lambda(\varphi+s)|\nabla r|^2(\nabla\beta\cdot n)\,d\sigma dt. \qquad (53)$$

Учитывая граничное условие (23), найдем

$$-2\int\limits_\Sigma(\nabla r\cdot n)\lambda(\varphi+s)(\nabla\beta\cdot\nabla r)\,d\sigma dt + \int\limits_\Sigma \lambda(\varphi+s)|\nabla r|^2(\nabla\beta\cdot n)\,d\sigma dt =$$

$$= -\int\limits_{\Sigma} (\nabla r \cdot n)^2 \lambda(\varphi + s)(\nabla \beta \cdot n)\, d\sigma dt \geq 0. \tag{54}$$

Из (53), (54) вытекает оценка

$$I_{31} \geq -\int\limits_{Q} \lambda^2 \varphi |\nabla \beta|^2 |\nabla r|^2\, dxdt - c\int\limits_{Q} \lambda\varphi |\nabla r|^2\, dxdt - \int\limits_{Q} \lambda^2 \varphi^3 |r|^2\, dxdt. \tag{55}$$

Применяя неравенство Коши, найдем оценку I_{32}:

$$\begin{aligned} I_{32} = &\int\limits_{Q} 2\lambda(\varphi + s)(\lambda\varphi)^{-4}(\Delta w + \Delta r)(\nabla\beta \cdot \nabla w)\, dxdt- \\ &- 8\int\limits_{Q} \lambda^{-2}\varphi^{-4}(\varphi + s)(\nabla\beta \cdot \nabla w)^2\, dxdt \geq \\ &\geq -c\int\limits_{Q} \lambda^{-2}\varphi^{-2}(|\Delta w|^2 + |\Delta r|^2 + |\nabla w|^2)\, dxdt; \end{aligned} \tag{56}$$

Выражение I_{33} оценим, используя неравенство Коши и оценку (51):

$$\begin{aligned} I_{33} &= \int\limits_{Q} (\Delta r) 2\lambda(\varphi + s)(\nabla\beta \cdot \mathrm{Rot}\,\phi)\, dxdt \geq \\ &\geq -\frac{1}{4}\int\limits_{Q} \varphi^{-1}|\Delta r|^2\, dxdt - c\int\limits_{Q} \lambda^2\varphi^3 |\mathrm{Rot}\,\phi|^2\, dxdt \geq \\ &\geq -\frac{1}{4}\int\limits_{Q} \varphi^{-1}|\Delta r|^2\, dxdt - c\int\limits_{Q} \lambda^3\varphi^3 |w|^2\, dxdt - \\ &- c\int\limits_{Q} \lambda^{-2}\varphi^{-2}\sum_{i,j=1}^{2} |\partial^2_{x_i x_j} w|^2\, dxdt + c\int\limits_{Q} \lambda |\nabla w|^2\, dxdt. \end{aligned} \tag{57}$$

Избавимся от r в (55)–(57). Во-первых, из уравнения (23) следует оценка

$$\int\limits_{Q} \varphi^{-1}|\Delta r|^2\, dxdt \leq \int\limits_{Q} \varphi^{-1}|\Delta w|^2\, dxdt + c\int\limits_{Q} \lambda^{-2}\varphi^{-2}(|\Delta w|^2 + |\nabla w|^2)\, dxdt. \tag{58}$$

Во-вторых, из (25), используя (51), находим

$$\int\limits_{Q} \lambda\varphi|\nabla r|^2 dxdt \leq \int\limits_{Q} \lambda\varphi|\nabla w|^2 dxdt + c\int\limits_{Q} \lambda^{-2}\varphi^{-2}\sum_{i,j=1}^{2} |\partial^2_{x_i x_j} w|^2 dxdt + c\int\limits_{Q} \lambda^3\varphi^3 |w|^2 dxdt. \tag{59}$$

Наконец,

$$\int\limits_Q \lambda^2\varphi|\nabla\beta|^2|\nabla r|^2\,dxdt \le \int\limits_Q \lambda^2\varphi|\nabla\beta|^2|\nabla w|^2\,dxdt+$$
$$+c\int\limits_Q \lambda^{-2}\varphi^{-3}|\nabla w|^2\,dxdt + c\int\limits_Q \lambda^2\varphi|\mathrm{Rot}\,\phi|^2\,dxdt \le$$
$$\le \int\limits_Q \lambda^2\varphi|\nabla\beta|^2|\nabla w|^2\,dxdt + c\int\limits_Q \lambda^3\varphi^3|w|^2\,dxdt+$$
$$+c\int\limits_Q \lambda^{-2}\varphi^{-2}\sum_{i,j=1}^{2}|\partial^2_{x_ix_j}w|^2\,dxdt + c\int\limits_Q \lambda|\nabla w|^2\,dxdt. \tag{60}$$

Подставляя (55)–(57) в (52), учитывая (58)–(60), получим оценку I_3

$$I_3 \ge -\frac{1}{4}\int\limits_Q \varphi^{-1}|\Delta w|^2\,dxdt - c\int\limits_Q \lambda^{-2}\varphi^{-2}\sum_{i,j=1}^{2}|\partial^2_{x_ix_j}w|^2\,dxdt-$$
$$-\int\limits_Q \lambda^2\varphi|\nabla\beta|^2|\nabla w|^2\,dxdt - c\int\limits_Q \lambda\varphi|\nabla w|^2\,dxdt - c\int\limits_Q \lambda^3\varphi^3|w|^2\,dxdt. \tag{61}$$

При этом константа c в (61) не зависит от λ.

Наконец, опираясь на (18), оценим f_λ:

$$\|f_\lambda\|^2_{L^2(Q)} \le \int\limits_Q (2\varphi^{2s}e^{2\alpha}|f|^2 + c\lambda^3\varphi^2|w|^2)\,dxdt, \tag{62}$$

где c не зависит от λ.

Подставляя (14) в (13), а затем подставляя в полученное равенство оценки (20), (22), (61), (62) и пользуясь тем, что $\lambda < \varphi$, находим

$$\|L_1w\|^2 + \|L_2w\|^2 + 2\int\limits_Q (3\lambda^4\varphi^3|\nabla\beta|^2|w|^2 - \lambda^2\varphi|\nabla\beta|^2|\nabla w|^2)\,dxdt-$$
$$-2\int\limits_\Sigma \lambda^3\varphi^3|\nabla\beta|^2|w|^2(\nabla\beta\cdot n)\,d\sigma dt \le$$
$$\le \frac{1}{2}\int\limits_Q \varphi^{-1}|\Delta w|^2\,dxdt + c\int\limits_Q \lambda^{-2}\varphi^{-2}\sum_{i,j=1}^{2}|\partial^2_{x_ix_j}w|^2\,dxdt+$$
$$+\int\limits_Q (2\varphi^{2s}e^{-2\alpha}|f|^2 + c\lambda^3\varphi^3|w|^2\,dxdt + c\lambda\varphi|\nabla w|^2)\,dxdt. \tag{63}$$

Умножим (7) скалярно в $L^2(Q)$ на $\lambda^2\varphi|\nabla\beta|^2 w$, проинтегрируем по частям, учитывая (8)

$$\int\limits_Q f_\lambda \lambda^2\varphi|\nabla\beta|^2 w\,dxdt =$$

$$= \int\limits_Q (L_2 w)\lambda^2\varphi|\nabla\beta|^2 w\,dxdt + \int\limits_Q \lambda^2\varphi(s-\alpha)(\partial_t \ln\gamma)|\nabla\beta|^2|w|^2\,dxdt +$$

$$+ \int\limits_Q \lambda^4\varphi^3|\nabla\beta|^4|w|^2\,dxdt - \int\limits_Q \lambda^2\varphi|\nabla\beta|^2|\nabla w|^2\,dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_Q \Delta(\lambda^2\varphi|\nabla\beta|^2)w^2\,dxdt -$$

$$- \int\limits_\Sigma |w|^2(\nabla(\lambda^2\varphi|\nabla\beta|^2)\cdot n)\,d\sigma dt + \int\limits_\Sigma \lambda^3\varphi(\varphi+s)|\nabla\beta|^2|w|^2(\nabla\beta\cdot n)\,d\sigma dt. \tag{64}$$

Выразим члены $\int\limits_Q (\lambda^2\varphi|\nabla\beta|^2|\nabla w|^2 - \lambda^4\varphi^3|\nabla\beta|^4 w^2)\,dxdt$ через остальные члены равенства (64) и оценим последнее, используя (18), (62):

$$\int\limits_Q (\lambda^2\varphi|\nabla\beta|^2|\nabla w|^2 - \lambda^4\varphi^3|\nabla\beta|^4 w^2)\,dxdt \leq$$

$$\leq \int\limits_Q \left(\frac{1}{6}|L_2 w|^2 + \varphi^{2s}e^{2\alpha}f_z^2 + \lambda^3\varphi^3|w|^2\right)dxdt + c\int\limits_\Sigma \lambda^3\varphi^2|\nabla\beta|^2|w|^2|(\nabla\beta\cdot n)|d\sigma dt. \tag{65}$$

Подставим (65) в (63), вспоминая, что $\lambda < \varphi$, получим

$$\|L_1 w\|^2 + \frac{2}{3}\|L_2 w\|^2 + 4\int\limits_Q \lambda^4\varphi^3|\nabla\beta|^4|w|^2\,dxdt - 2\int\limits_\Sigma (\lambda^3 - c\lambda^2)\varphi^3|\nabla\beta|^2|w|^2(\nabla\beta\cdot n)\,d\sigma dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int\limits_Q \varphi^{-1}|\Delta w|^2\,dxdt + c\int\limits_Q \lambda^{-2}\varphi^{-2}\sum_{i,j=1}^{2}|\partial^2_{x_i x_j} w|^2\,dxdt +$$

$$+ c\int\limits_Q (\varphi^{2s}e^{-2\alpha}|f|^2 + \lambda^3\varphi^3|w|^2\,dxdt + \lambda\varphi|\nabla w|^2)\,dxdt. \tag{66}$$

Умножим скалярно в $L^2(Q)$ (7) на $\lambda\varphi w$ и, проводя выкладки, аналогичные (64), (66), получим оценку

$$\int\limits_Q \lambda\varphi|\nabla w|^2\,dxdt - \int\limits_\Sigma \lambda^2\varphi^2|w|^2(\nabla\beta\cdot n)d\sigma dt \leq$$

$$\leq c\int\limits_Q \lambda^3\varphi^3|w|^2\,dxdt + c\int\limits_Q \varphi^{2s}e^{-2\alpha}|f|^2\,dxdt + \frac{1}{3c}\|L_2 w\|^2. \tag{67}$$

Подставим (67) в правую часть (66), получим оценку

$$\|L_1 w\|^2 + \frac{1}{3}\|L_2 w\|^2 + 4\int\limits_Q \lambda^4\varphi^3|\nabla\beta|^4|w|^2\,dxdt \le$$
$$\le \frac{1}{2}\int\limits_Q \varphi^{-1}|\Delta w|^2\,dxdt + c\int\limits_Q \lambda^{-2}\varphi^{-2}\sum_{i,j=1}^{2}|\partial^2_{x_ix_j}w|^2\,dxdt +$$
$$+c\int\limits_Q (\varphi^{2s}e^{-2\alpha}|f|^2 + \lambda^3\varphi^3|w|^2)\,dxdt. \qquad (68)$$

Умножим (9) на $\varphi^{-1/2}$, возведем в квадрат и проинтегрируем по Q. Получим оценку

$$\int\limits_Q \varphi^{-1}|\Delta w|^2\,dxdt \le$$
$$\le \int\limits_Q \lambda^4\varphi^3|\nabla\beta|^4|w|^2\,dxdt + \int\limits_Q |L_1 w|^2\,dxdt + c\int\limits_Q \lambda^3\varphi^3|w|^2\,dxdt. \qquad (69)$$

Подставим (69) в правую часть (68), найдем

$$\|L_1 w\|^2 + \frac{1}{3}\|L_2 w\|^2 + \int\limits_Q \lambda^4\varphi^3|\nabla\beta|^4|w|^2\,dxdt \le$$
$$\le \frac{1}{2}\int\limits_Q \lambda^4\varphi^3|\nabla\beta|^4|w|^2\,dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_Q |L_1 w|^2\,dxdt + c\int\limits_Q \lambda^{-2}\varphi^{-2}\sum_{i,j=1}^{2}|\partial^2_{x_ix_j}w|^2\,dxdt +$$
$$+c\int\limits_Q (\varphi^{2s}e^{-2\alpha}|f|^2 + \lambda^3\varphi^3|w|^2)\,dxdt. \qquad (70)$$

Перенося слагаемые $(1/2)(\int\limits_Q \lambda^4\varphi^3|\nabla\beta|^4|w|^2\,dxdt + \int\limits_Q |L_1 w|^2\,dxdt)$ правой части (70) влево, получаем

$$\|L_1 w\|^2 + \|L_2 w\|^2 + \int\limits_Q \lambda^4\varphi^3|\nabla\beta|^4|w|^2\,dxdt \le c\int\limits_Q \lambda^{-2}\varphi^{-2}\sum_{i,j=1}^{2}|\partial^2_{x_ix_j}w|^2\,dxdt +$$
$$+c\int\limits_Q (\varphi^{2s}e^{-2\alpha}|f|^2 + \lambda^3\varphi^3|w|^2)\,dxdt. \qquad (71)$$

Заметим, что в силу (3) справедливо неравенство

$$\int\limits_Q \lambda^4\varphi^3|w|^2\,dxdt \le c_1\int\limits_Q \lambda^4\varphi^3|\nabla\beta|^4|w|^2\,dxdt + \int\limits_{Q^{\omega'}} \lambda^4\varphi^3|w|^2\,dxdt.$$

Отсюда и из (71) следует оценка

$$\|L_1w\|^2 + \|L_2w\|^2 + \int\limits_Q \lambda^4\varphi^3|w|^2\,dxdt \le c\int\limits_Q \lambda^{-2}\varphi^{-2}\sum_{i,j=1}^{2}|\partial^2_{x_ix_j}w|^2\,dxdt +$$

$$+c\int\limits_Q \varphi^{2s}e^{-2\alpha}|f|^2\,dxdt + c\int\limits_{Q^{\omega'}} \lambda^4\varphi^3|w|^2\,dxdt. \qquad (72)$$

С помощью (72) из (67), (69), найдем

$$\int\limits_Q \lambda\varphi|\nabla w|^2\,dxdt + \int\limits_Q \varphi^{-1}|\Delta w|^2\,dxdt \le c\int\limits_Q \lambda^{-2}\varphi^{-2}\sum_{i,j=1}^{2}|\partial^2_{x_ix_j}w|^2\,dxdt +$$

$$+c\int\limits_Q \varphi^{2s}e^{-2\alpha}|f|^2\,dxdt + \int\limits_{Q^{\omega'}} \lambda^4\varphi^3|w|^2\,dxdt. \qquad (73)$$

Умножим (10) на $(\lambda\varphi)^{-1/2}$ и, оценивая с помощью (64), (73), получим

$$\int\limits_Q \lambda^{-1}\varphi^{-1}|\partial_t w|^2\,dxdt \le c\int\limits_Q \lambda^{-2}\varphi^{-2}\sum_{i,j=1}^{2}|\partial^2_{x_ix_j}w|^2\,dxdt +$$

$$+c\int\limits_Q \varphi^{2s}e^{-2\alpha}|f|^2\,dxdt + c\int\limits_{Q^{\omega'}} \lambda^4\varphi^3|w|^2\,dxdt. \qquad (74)$$

Обозначим

$$g(t,x) = \lambda^{1/2}(\varphi^{1/2} + (s-1/2)\varphi^{-1/2})w\nabla\beta. \qquad (75)$$

Получим оценку g в пространстве $L^2(0,T;H^1(\Omega))$, учитывая (72), (73),

$$\int\limits_Q |\nabla g|^2\,dxdt \le c\int\limits_Q \lambda\varphi|\nabla w|^2\,dxdt + c\int\limits_Q \lambda^3\varphi^3|w|^2\,dxdt \le$$

$$\le c\int\limits_Q \lambda^{-2}\varphi^{-2}\sum_{i,j=1}^{2}|\partial^2_{x_ix_j}w|^2\,dxdt + c\int\limits_Q \varphi^{2s}e^{-2\alpha}|f|^2\,dxdt + c\int\limits_{Q^{\omega'}} \lambda^4\varphi^3|w|^2\,dxdt. \qquad (76)$$

По теореме о следах [39] для функции g определен оператор следа $g_n \equiv (g\cdot n)|_{\partial\Omega}\colon H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\partial\Omega)$, где

$$(g\cdot n)|_{\partial\Omega} = \lambda^{1/2}\left((\varphi^{1/2} + (s-1/2)\varphi^{-1/2})w(\nabla\beta\cdot n)\right)|_{\partial\Omega} \qquad (77)$$

для почти всех $t \in (0,T)$, и справедлива оценка

$$\|g_n\|^2_{L^2(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega))} \le \|g\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \le$$

$$\le c\int\limits_Q \lambda^{-2}\varphi^{-2}\sum_{i,j=1}^{2}|\partial^2_{x_ix_j}w|^2\,dxdt + c\int\limits_Q \varphi^{2s}e^{-2\alpha}|f|^2\,dxdt + c\int\limits_{Q^{\omega'}} \lambda^4\varphi^3|w|^2\,dxdt. \qquad (78)$$

Используя определение (4) функции φ и граничное условие (8), получим соотношения

$$\Delta(\lambda^{-1/2}\varphi^{-1/2}w) = \varphi^{-1/2}\left(\Delta w - \lambda(\nabla\beta\cdot\nabla w) + \left(\frac{\lambda^2}{4}|\nabla\beta|^2 - \frac{\lambda}{2}\Delta\beta\right)w\right),$$
$$(\nabla(\lambda^{-1/2}\varphi^{-1/2}w)\cdot n)|_{\partial\Omega} = \lambda^{1/2}\left((\varphi^{1/2} + (s-1/2)\varphi^{1/2})w(\nabla\beta\cdot n)\right)|_{\partial\Omega}. \qquad (79)$$

Заметим, что $\int\limits_\Omega \varphi^{-s}e^{\alpha_\lambda}w\,dx = 0$. Применяя к (79) известные оценки для эллиптических задач и учитывая (72), (73), (77), (78), получим неравенство

$$\int\limits_Q \sum_{i,j=1}^2 |\partial^2_{x_ix_j}(\lambda^{-1/2}\varphi^{-1/2}w)|^2\,dxdt \le c\int\limits_Q \lambda^{-2}\varphi^{-2}\sum_{i,j=1}^2|\partial^2_{x_ix_j}w|^2\,dxdt +$$
$$+c\int\limits_Q \varphi^{2s}e^{-2\alpha}|f|^2\,dxdt + c\int\limits_{Q^{\omega'}}\lambda^4\varphi^3|w|^2\,dxdt,$$

из которого следует оценка

$$\int\limits_Q \lambda^{-1}\varphi^{-1}\sum_{i,j=1}^2|\partial^2_{x_ix_j}w|^2\,dxdt \le c\int\limits_Q \varphi^{2s}e^{-2\alpha}|f|^2\,dxdt + \int\limits_{Q^{\omega'}}\lambda^4\varphi^3|w|^2\,dxdt. \qquad (80)$$

Подставляя в оценки (72)–(74), (80) $w = e^{-\alpha_\lambda}\varphi^s z$, получим (5). □

2. Случай уравнения Лапласа

Рассмотрим задачу Неймана для оператора Лапласа

$$\Delta\theta = f(t,x),\quad (t,x)\in Q,\quad (\nabla\theta\cdot n) = 0,\quad (t,x)\in\Sigma,\quad \int\limits_\Omega \theta\,dx = 0, \qquad (81)$$

где $Q = (0,T)\times\Omega$, $\Omega\in\mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞.

Теорема 2. *Существует $\hat\lambda > 1$ такое, что при любом $\lambda > \hat\lambda$ и $s \ge q-3$ решение θ задачи (81) удовлетворяет оценке*

$$\int\limits_Q \varphi^{2s-1}(\lambda^{-1}\sum_{i,j=1}^2|\partial^2_{x_ix_j}\theta|^2 + \lambda\varphi^2|\nabla\theta|^2 + \lambda^4\varphi^4|\theta|^2)e^{-2\alpha_\lambda}\,dxdt \le$$
$$\le c\int\limits_Q \varphi^{2s}|f|^2e^{-2\alpha_\lambda}\,dxdt + c\int\limits_{Q^{\omega'}}\lambda^4\varphi^{2s+3}|\theta|^2e^{-2\alpha_\lambda}\,dxdt, \qquad (82)$$

где $Q^{w'} = (0,T)\times\omega'$, $c>0$ — константа, не зависящая от θ, f и λ.

Доказательство. Сделаем замену неизвестной функции $\theta = \varphi^{-s}e^{-\alpha_\lambda}w_\theta$, получим равенство (7), где

$$L_1 w_\theta = \Delta w_\theta + \lambda^2\varphi^2|\nabla\beta|^2 w_\theta, \quad L_2 w_\theta = -2\lambda(\varphi+s)(\nabla\beta\cdot\nabla w_\theta) \tag{83}$$

и краевое условие

$$(\nabla w_\theta\cdot n) = \lambda(\varphi+s)(\nabla\beta\cdot n)w_\theta, \quad (t,x)\in\Sigma. \tag{84}$$

Функция f_λ определена в (11), в которой w надо заменить на w_θ. Если для уравнения (7), записанного для функции w_θ, провести оценки/ аналогичные приведенным при доказательстве теоремы 1, то получим оценку (82). □

Список литературы

[1] J.-L. Lions, "Are the connections between turbulence and controllability?", *Lecture Notes in Control Inform. Sci.*, **V** (1990), 144.

[2] J.-L. Lions, "Remarques sur la controllabilite approchee", *Control of Distributed Systems*, **3** (1990), 77–87.

[3] А. В. Фурсиков, О. Ю. Эмануилов, "Точная локальная управляемость двумерных уравнений Навье-Стокса", *Матем. сб.*, **187**:9 (1996), 102–138.

[4] А. В. Фурсиков, О. Ю. Эмануилов, "Локальная точная управляемость уравнений Буссинеска", *Вестн. РУДН, сер. Матем.*, **3**:1 (1996), 177–194.

[5] А. В. Фурсиков, О. Ю. Эмануилов, "Точная управляемость уравнений Навье-Стокса и Буссинеска", *Успехи математических наук*, **54**:3(327) (1999), 93–142.

[6] A. V. Fursikov, O. Yu. Imanuvilov, "Local exact controllability of the Navier-Stokes equations", *C. R. Acad. Sci., Paris, Serie I.*, **323** (1996), 275–280.

[7] A. V. Fursikov, O. Yu. Imanuvilov, "Local Exact Boundary Controllability of the Boussinesque Equations", *SIAM J. Control Optim.*, **36**:2 (1998), 391–421.

[8] A. V. Fursikov, O. Yu. Imanuvilov, "On controllability of certain systems simulating a fluid flow", *IMA Vol.Math.Appl.*, **68** (1995), 149–184.

[9] O. Yu. Imanuvilov, "Local exact controllability for the 2-D Navier-Stokes equations with the Navier slip boundary conditions", *Turbulence Modeling and Vortex Dynamics. Lecture Notes in Physics.*, **491** (1997), 148–168.

[10] A. V. Fursikov, O. Yu. Imanuvilov, "On exact boundary zero-controllability of two-dimensional Navier-Stokes equations", *Acta Appl. Math.*, **37** (1994), 67–76.

[11] J. I Diaz, A. V. Fursikov, "Approximate controllability of the Stokes system on cylinders by external unidirectional forces", *J. Math. Pures Appl.*, **76** (1997), 353–375.

[12] C. Fabre, J.-P. Puel, E Zuazua, "Approximate controllability of the semilinear heat equation", *Proc. Roy.Edinburgh. Sect.A.*, **125** (1995), 31–61.

[13] L. A Fernandez, E. Zuazua, "Approximate controllability of the semilinear heat equation involving gradient terms", *J. Optim. Theory Appl.*, 1999.

[14] О. Ю. Эмануилов, "Точная управляемость полулинейного параболического уравнения", *Вестник Рос. Унив. Дружбы Нар. Сер. матем.*, **1** (1994), 109–116.

[15] О. Ю. Эмануилов, "Граничное управление полулинейными эволюционными уравнениями", *Успехи математических наук*, **44**:6 (1988), 183–184.

[16] O. Yu. Imanuvilov, "Local exact controllability for the 2-D Navier-Stokes equations with the Navier slip boundary conditions", *Lecture Notes in Phys.*, **491** (1997), 148–168.

[17] А. В. Фурсиков, *Оптимальное управление распределительными системами. Теория и приложения*, Научная книга, Н., 1999.

[18] S. Ervedoza, O. Glass O., S. Guerrero, "Local exact controllability for the 1-D compressible Navier-Stokes equation", *Seminaire Laurent Schwarts - EDP et applications*, **XXXIX** (2011), 14.

[19] E. V. Amosova, "Exact Local Controllability for the Equations of Viscous Gas Dynamics", *Differential Equations*, **47**:12 (2011), 1776–1795.

[20] J.-M. Coron, "On the controllability of 2-D incompressible perfect fluids", *J. Math. Pures et Appl.*, **75** (1996), 155–188.

[21] J.-M. Coron, "Controlabilite exacte frontiere de l'equation d'Euler des fluides parfaits incompressibles bidimensionnels", *C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I.*, **317** (1993), 271–276.

[22] J.-M. Coron, A. V. Fursikov, "Global exact controllability of the 2D Navier-Stokes equations on manifold without boundary", *Russian Journal of Math. Physics.*, **4**:3 (1996), 1–20.

[23] V. Barbu, "Exact controllability of superlinear heat equation", *Applied Mathematics and Optimization*, **42** (2000), 73–89.

[24] V. Barbu, "Controllability of parabolic and Navier-Stokes equations", *Scientiae Mathematicae Japonicae*, **56** (2002), 143-211.

[25] C. Bardos, G. Lebeau, J. Rauch, "Controle et stabilisation de l'equation des ondes", *SIAM Journal on Control and Optimization*, **30** (1992), 1024–1065.

[26] E. Fernandez-Cara, "Null controllability of the semilinear heat equation", *ESAIM: Control Optimization and Calculus of Variations*, **2** (1997), 87–103.

[27] G. Aniculaesei, S. Anita, "Null controllability of a nonlinear heat equation", *Abstract and Applied Analysis*, **7** (2002), 375–383.

[28] J. Klamka, "Constrained controllability of semilinear systems with multiple delays in control", *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences*, **52** (2004), 25–30.

[29] K. Sakthivel, K. Balachandran, B. R. Nagaraj, "On a class of nonlinear parabolic control systems with memory effects", *International Journal of Control*, **81** (2008), 764–777.

[30] K. Sakthivel, K. Balachandran, S. S. Sritharan, "Exact controllability of nonlinear diffusion equations arising in reactor dynamics", *Nonlinear Analysis:Real World Applications*, **9** (2008), 2029–2054.

[31] A. Kazemi, M. Klibanov, "Stability estimates for ill-posed Cauchy problems involving hyperbolic equations and inequalities", *Appl. Anal.*, **50** (1993), 93–102.

[32] I. Lasiecka I, R. Triggiani, "Carleman estimates and exact boundary controllability for a system of coupled, nonconservative second-order hyperbolic equations", *Lecture Notes in Pure Appl. Math.*, **188** (1997), 215–243.

[33] C. Fabre, "Uniqueness results for Stokes equations and theirconsequences in linear and nonlinear control problems", *ESAIM, Control Optim. Caic. Var.*, **1** (1996), 267–302.

[34] O. Yu. Imanuvilov, M. Yamamoto, "On Carleman inequalities for parabolic equations in Sobolev spaces of negative order and exact controllability for semilinear parabolic equations", *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **39** (2003), 227–274.

[35] A. Ruiz, "Unique continuation for weak solutions of the wave equation plus a potential", *J. Math. Pures Appl.*, **71** (1992), 455–467.

[36] D. Tatary, "A prior estimates of Carleman's type in domains with boundary", *J. Math. Pures Appl.*, **73** (1994), 355–387.

[37] D. Chae, O. Yu. Imanuvilov, S. M. Kim, "Exact controllability for semilinear parabolic equations with Neumann boundary conditions", *J. of Dynamical and Control Systems*, **2** (1996), 449–483.

[38] K. Sakthivel, G. Devipriya, K. Balachandran, J.-H. Kim, "Exact null controllability of a semilinear parabolic equation arising in finance", *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, **3** (2009), 565–577.

[39] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Мир, М., 1971.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 25 апреля 2014 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00079).

Amosova E. V. Carleman estimates of solutions of the Neumann problem for a parabolic equation. Far Eastern Mathematical Journal. 2015. V. 15. № 1. P. 3–20.

ABSTRACT

We derive a new Carleman estimates for the Neumann problem for a parabolic equation and Laplace equation

Key words: *exact controllability, estimates of Carleman type.*