Дальневосточный математический журнал. 2015. Том 15. № 1. С. 38–40

УДК 517.588+ 511.334
MSC2010 33C05+11F03

© В. А. Быковский, Д. А. Фроленков[1]

Некоторые интегральные представления для гипергеометрической функции

Получены два интегральных представления для гипергеометрической функции ${}_2F_1(k+it, k-it, 2k-x)$.

Ключевые слова: *спектральная теория автоморфных функций, формула свертки, гипергеометрическая функция.*

Введение

При использовании в аналитической теории чисел спектральных разложений для сверток функции числа делителей и её обобщений (см. [1]–[3]) возникает необходимость в оценках гипергеометрической функции $F(a, b, c; z)$, равномерных по всем параметрам a, b, c и по переменной z. В частности, в компоненте разложения для свёртки, ассоциированной с голоморфными параболическими формами, участвует функция

$$G_k(t; y) = \frac{\Gamma(k+it)\Gamma(k-it)}{\Gamma(2k)} {}_2F_1(k+it, k-it; 2k; y)$$

с натуральным k, а также вещественными y и t. Наибольшие трудности при оценках приходится преодолевать при отрицательных значениях переменной y.

В настоящей работе доказываются два интегральных представления, которые удобно использовать для получения оценок остаточных членов в асимптотических формулах.

Теорема 1. *Для любого $x > 0$*

$$\frac{1}{2}x^k \operatorname{ch}\pi t \cdot G_k(t; -x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\cos\left(2t\log(y+\sqrt{y^2+1})\right)}{\sqrt{1-y^2x^{-1}}\sqrt{1+y^2}} \cos\left((2k-1)\arcsin\frac{y}{\sqrt{x}}\right)dy +$$

$$+(-1)^k \int_{\sqrt{x}}^{\infty} \frac{\cos\left(2t\log(y+\sqrt{y^2+1})\right)}{\sqrt{y^2x^{-1}-1}\sqrt{1+y^2}} \frac{dy}{\left(yx^{-1/2}+\sqrt{y^2x^{-1}-1}\right)^{2k-1}}.$$

[1]Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, 680000, г. Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: vab@iam.khv.ru, frolenkov_adv@mail.ru

Теорема 2. *Для любого* $x > 0$

$$\frac{1}{2}x^k \operatorname{ch}\pi t \cdot G_k(t;-x) =$$
$$= \operatorname{cth}\pi t \cdot \int\limits_0^{\sqrt{x}} \frac{\sin\left(2t\log(y+\sqrt{y^2+1})\right)}{\sqrt{1-y^2x^{-1}}\sqrt{1+y^2}} \sin\left((2k-1)\arcsin\frac{y}{\sqrt{x}}\right) dy.$$

Доказательство теорем

Воспользуемся табличными интегралами Вебера – Шафхейтлина (см. [4])

$$\frac{1}{2}x^k \operatorname{ch}\pi t \cdot G_k(t;-x) = \operatorname{ch}\pi t \int\limits_0^\infty K_{2it}\left(yx^{-1/2}\right) J_{2k-1}(y)\, dy,$$

$$\int\limits_0^\infty J_{2k-1}(y)\cos(uy)\, dy = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cos\left((2k-1)\arcsin u\right) & \text{при} \quad 0 \le u < 1 \\ \frac{(-1)^k}{\sqrt{u^2-1}}\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)^{-2k+1} & \text{при} \quad u > 1 \end{cases}$$

и интегральным представлением

$$\operatorname{ch}\pi t \cdot K_{2it}(x) =$$
$$= \int\limits_0^\infty \cos(x\operatorname{sh}u)\cos(2tu)\, du = \int\limits_0^\infty \frac{\cos(xy)}{\sqrt{1+y^2}}\cos(2t\operatorname{Arsh}y)\, dy. \tag{1}$$

Действуя формально, с их помощью получим

$$\frac{1}{2}\operatorname{ch}\pi t \cdot x^k \cdot G_k(t;x) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \cos(yx^{-1/2}\operatorname{sh}u) J_{2k-1}(y)\cos(2tu)\, du\, dy = \tag{2}$$
$$= \int\limits_0^{\operatorname{sh}u\le\sqrt{x}} \frac{\cos\left((2k-1)\arcsin(x^{-1/2}\operatorname{sh}u)\right)}{\sqrt{1-x^{-1}\operatorname{sh}^2 u}}\cos(2tu)\, du +$$
$$+(-1)^k \int\limits_{\operatorname{sh}u\ge\sqrt{x}}^\infty \frac{\left(x^{-1/2}\operatorname{sh}u+\sqrt{x^{-1}\operatorname{sh}^2 u-1}\right)^{-2k+1}}{\sqrt{x^{-1}\operatorname{sh}^2 u-1}}\cos(2tu)\, du.$$

Выполнив замену $y = \operatorname{sh}u$, получим интегральное представление теоремы 1.

Так как интегралы по u и по y сходятся условно, то перестановка местами переменных интегрирования некорректна. Этот пробел в доказательстве можно устранить с помощью двух абсолютно сходящихся интегралов

$$\operatorname{ch}\pi t \cdot K_{2it}(x) = -\int\limits_0^\infty \frac{\sin(x\operatorname{sh}u)}{x}\frac{d}{du}\left(\frac{\cos 2tu}{\operatorname{ch}u}\right) du$$

(получается из интегрального представления (1) с помощью интегрирования по частям),

$$\int_0^\infty J_{2k-1}(y)\frac{\sin ry}{y}\,dy = \begin{cases} \frac{1}{2k-1}\sin\left((2k-1)\arcsin r\right) & \text{при} \quad 0 \le r \le 1 \\ \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\left(r+\sqrt{r^2-1}\right)^{-2k+1} & \text{при} \quad r \ge 1. \end{cases}$$

После интегрирования в двойном интеграле типа (2) по u и интегрирования по частям по y, получим интегральное представление теоремы 1.

Теорема 2 доказывается точно так же с помощью двух абсолютно сходящихся интегралов (см. [4])

$$J_{2k-1}(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin\left((2k-1)\theta\right)\sin(y\sin\theta)\,d\theta,$$

$$\int_0^\infty K_{2it}\left(ux^{-1/2}\right)\sin(u\sin\theta))\,du = \frac{\pi}{2}\,\frac{\sin\left(2t\log\left(\sqrt{x}\left(\sin\theta+\sqrt{\sin^2\theta+x^{-1}}\right)\right)\right)}{\operatorname{sh}\pi t\cdot\sqrt{\sin^2\theta+x^{-1}}}$$

и замены $\sin\theta = ux^{-1/2}$.

Список литературы

[1] Н. В. Кузнецов, “Свёртка коэффициентов Фурье рядов Эйзенштейна–Маасса”, *Зап. научн. семинар ЛОМИ*, **129** (1983), 43–84.

[2] V. Bykovskii, N. Kuznetsov, A. Vinogradov, “Generalized summation formula for inhomogeneous convolution”, In Automorphic functions and their applications, Acad. Sci. USSR Inst. Appl. Math., Khabarovsk, 1990, 18–63.

[3] В. А. Быковский, Д. А. Фроленков, “О втором моменте L-рядов голоморфных параболических форм на критической прямой”, *Доклады Академии наук*, **463**:2 (2015), 1–4.

[4] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции II*, "Наука", М., 1974.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 27 апреля 2015 г.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00335.

Bykovskii V. A., Frolenkov D. A. Some integral representations of hypergeometric function. Far Eastern Mathematical Journal. 2015. V. 15. № 1. P. 38–40.

ABSTRACT

In this article we prove two integral representations of hypergeometric function.

Key words: *spectral theory of automorphic functions, convolution identity, hyperheometric function.*