Дальневосточный математический журнал. 2015. Том 15. № 1. С. 41–52

УДК 539.3 514
MSC2010 74A05 53B50

© Гудименко А. И., Гузев М. А.[1]

О ковариантной форме записи уравнения Эйлера движения идеальной жидкости

Аппарат дифференциальной геометрии используется для представления уравнения Эйлера движения идеальной жидкости в форме, сохраняющей свой вид относительно координатных преобразований, зависящих от времени. Движение жидкости описывается в рамках четырехмерного формализма, когда пространство – время представляется как расслоение над осью времени $\mathbb{R}$. Указаны приложения полученной формы записи.

Ключевые слова: *механика сплошных сред, закон сохранения импульса, теория расслоенных пространств, ковариантная форма записи.*

Введение

Одной из концептуальных задач механики сплошных сред является представление ее уравнений в ковариантной форме, то есть в такой форме записи, которая сохраняет свой вид относительно координатных преобразований на пространстве – времени. Эта задача возникает при конструировании новых моделей и теорий и связана с использованием фундаментального физического принципа независимости физических процессов в материальной среде от выбора способа описания (material frame-indifference) [1, 2]. В качестве примера укажем на классическую монографию [3], где предлагается формулировка законов сохранения массы и импульса в произвольных координатах, связанных с евклидовыми координатами инерциальной системы отсчета преобразованиями вида

$$t' = t, \quad x'^i = x'^i(t, x^j), \quad i, j = 1, 2, 3. \tag{1}$$

При этом уравнения, соответствующие законам сохранения, записаны в [3] на основе подходов классического тензорного исчисления. Однако в последние десятилетия в механике сплошных сред стали активно использовать методы теории

[1]Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7; Дальневосточный федеральный университет, 690091, Владивосток, ул. Суханова, 8. Электронная почта: algud@poi.dvo.ru; guzev@iam.dvo.ru

гладких многообразий и дифференциальной геометрии [4, 5]. В настоящее время интерес к новым подходам связан с попытками описания сплошной среды в рамках четырехмерного формализма, когда траектория среды представляется вложенной в пространство – время, рассматриваемое как расслоение с базой — осью времени $\mathbb{R}$ и слоями — пространствами одновременных событий [6–8].

При четырехмерной геометрической трактовке уравнений механики исследователь сталкивается с проблемой, состоящей в том, что время входит в эти уравнения неравноправно с пространственными координатами. Такое неравноправие проявляется уже в том, что метрика в классическом (нерелятивистском) пространстве – времени определена только для пространственной его части. Поэтому мы не можем «поднимать» или «опускать» индексы в тензорах, как это делается в релятивистской механике. Данные операции либо не определены, либо приводят к геометрическим объектам, которые не являются тензорами на пространстве – времени. Поэтому использование аппарата дифференциального исчисления на многообразиях в этом случае становится проблематичным.

В рамках представления о пространстве – времени как расслоении над $\mathbb{R}$ общая идея решения этой проблемы состоит в рассмотрении полевых характеристик сплошной среды в качестве вертикальных тензорных полей — стандартных объектов дифференциальной геометрии (подробности см. в следующем разделе), правила работы с которыми известны [9–11]. Например, для работы с вертикальными формами следует заменить эти формы на обычные, используя либо каноническую форму времени dt, либо «компенсирующие» векторные поля, ассоциированные со связностями на этом расслоении.

Указанный подход ранее использовался авторами для представления закона сохранения массы сплошной среды в ковариантном виде относительно координатных преобразований (1) [7, 8]. В данной работе предлагаемый подход применяется к аналогичной задаче для уравнения баланса импульса идеальной жидкости.

Напомним, что уравнение баланса импульса идеальной жидкости в инерциальной системе отсчета в евклидовых координатах имеет вид [12]

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v^j \frac{\partial v_i}{\partial x^j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x^i}, \tag{2}$$

где $v^i = v_i$ — компоненты поля относительных скоростей жидкости, ρ и p — плотность и давление жидкости соответственно. В гидродинамике оно называется *уравнением Эйлера движения идеальной жидкости.* При получении ковариантной формы записи мы руководствуемся известной интерпретацией движения идеальной жидкости как движения материальных частиц в силовом поле [13]. В этом случае существует аналогия между механикой жидкости и неавтономной гамильтоновой механикой, развитой в монографиях [10, 11]. Уравнения, полученные в настоящей статье, по форме совпадают с приведенными в указанных монографиях.

Отметим, что термин «ковариантная форма записи» (относительно некоторого класса координатных преобразований) используется в статье в качестве синонима для выражений «инвариантная форма записи» или «форма записи, сохраняющая свой вид».

1. Геометрическая модель движения жидкости

Сформулируем основные положения геометрического формализма, используемого для описания движения жидкости в рамках представления о пространстве–времени как расслоении [9–11].

Пространство–время будем рассматривать как расслоение $\mathrm{pr}_1\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, в котором база $\mathbb{R}$ представляет ось времени, а слой над $t \in \mathbb{R}$ — пространство одновременных событий в момент времени t. Послойные координаты (t, x^i) на пространстве–времени, где t — стандартная декартова координата на базе $\mathbb{R}$, будем называть *адаптированными координатами*. Ясно, что переход от одной адаптированной системы координат к другой осуществляется в точности преобразованиями вида (1).

Подчеркнем, что координаты (t, x^i) в работе представляют собой *произвольные* адаптированные координаты, а не обязательно стандартные декартовы. Способ обозначения стандартных декартовых координат приходится оговаривать отдельно — как правило, они помечаются штрихами.

Снабдим пространство–время *вертикальной метрикой* g, которую определим как ограничение канонической метрики на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ на *вертикальное касательное расслоение* $V(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$ — подрасслоение касательного к $\mathrm{pr}_1\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ расслоения, составленное из касательных к слоям векторов. В адаптированных координатах

$$g = g_{ij}\bar{d}x^i \otimes \bar{d}x^j, \tag{3}$$

где $\bar{d}x^i$ — координатный базис расслоения $V^*(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$, дуального к вертикальному касательному расслоению. Если штрихами обозначить стандартные декартовы координаты, то

$$g_{ij} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}\frac{\partial x'^l}{\partial x^j}\delta_{kl},$$

где δ_{kl} — символ Кронекера.

Под *системой отсчета* [10,11] на пространстве–времени будем понимать произвольную связность на расслоении $\mathrm{pr}_1\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. В [10,11] показано, что такая связность может быть определена как векторное поле на пространстве–времени вида

$$h = \frac{\partial}{\partial t} + h^i\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Будем называть такое векторное поле *полем скоростей системы отсчета*, или *отсчетным полем скоростей*. Каноническое векторное поле на пространстве–времени, имеющее в стандартных декартовых координатах (t', x'^i) вид $\partial/\partial t'$, будем ассоциировать с инерциальной системой отсчета. В произвольных адаптированных координатах (t, x^i) каноническое векторное поле имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x^i}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{4}$$

Будем предполагать, что движение жидкости также задается некоторой связностью на пространстве – времени. Соответствующее ей векторное поле

$$u = \frac{\partial}{\partial t} + u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

называется *полем абсолютных скоростей* жидкости. Обозначим $\circ$ операцию композиции функций. Интегральные сечения этой связности, то есть такие отображения $s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, для которых $\mathrm{pr}_1 \circ s = \mathrm{id}$ и $\partial s^i / \partial t = u^i \circ s$, определяют *траектории или мировые линии жидких частиц* в пространстве – времени. Заметим, что при таком описании движения предполагается, что траектории жидких частиц занимают все пространство – время. Это оправдано при локальном рассмотрении движения, как в настоящей работе. Общий случай, когда траектория жидкости является подрасслоением пространства – времени, обсуждается в [6]. Отметим, что поля 4-скоростей для описания движения сплошной среды использовались ранее, например, в [3].

Разность $v = u - h$ представляет собой *вертикальное векторное поле* — сечение вертикального касательного расслоения $V(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$. Оно называется *полем относительных скоростей* жидкости и отождествляется с реальным физическим полем скоростей. В адаптированных координатах произвольное вертикальное векторное поле v записывается в виде

$$v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{5}$$

то есть коэффициент при $\partial/\partial t$ у такого поля равен нулю.

Наличие на пространстве – времени вертикальной метрики (3) позволяет переходить от вертикальных векторных полей к метрически двойственным к ним. Так, полю относительных скоростей (5) соответствует вертикальная 1-форма

$$\bar{v} = v_i \bar{d} x^i, \quad v_i = g_{ij} v^j.$$

Вообще под *вертикальными формами* на пространстве – времени понимают сечения внешних степеней расслоения $V^*(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$ [9]. Например, вертикальная 2-форма $\bar{d}\bar{v} = \bar{d}v_i \wedge \bar{d}x^i$ известна в гидродинамике как *форма вихря* [14]. Вертикальные формы не являются формами на пространстве – времени [9]. Это видно из того, что формы, полученные из координатных 1-форм dx^i зависящими от времени координатными преобразованиями, содержат слагаемые с dt. Как следствие, вертикальные формы не могут напрямую использоваться в ковариантной формулировке уравнений движения.

В рамках данной геометрической модели движения жидкости величины, входящие в уравнение Эйлера (2), интерпретируются следующим образом. Координаты (t, x^i) представляют собой стандартные декартовы координаты на пространстве – времени, в качестве отсчетного поля скоростей выступает каноническое векторное поле $h = \partial/\partial t$, величины v^i являются компонентами поля относительных скоростей жидкости, величины v_i представляют собой компоненты вертикальной формы, метрически двойственной к полю относительных скоростей.

Для корректного восприятия материала статьи в разделе Приложение приведены используемые в работе операции над дифференциальными формами: внешнее умножение $\wedge$, внешнее дифференцирование d, внутреннее умножение $\rfloor$ и производная Ли $\mathcal{L}$. Всюду ниже (исключая Приложение) латинские индексы $i, j, k = 1, 2, 3$ относятся к слоям расслоения.

2. Переход к ковариантной форме записи уравнения Эйлера

Зафиксируем систему отсчета h и введем 3-форму

$$\Omega = dv_i \wedge dx^i \wedge dt = d(v_i dx^i \wedge dt). \tag{6}$$

Эта форма представляет собой упомянутую выше форму вихря поля относительных скоростей движения жидкости, умноженную внешне на каноническую форму времени dt. Подчеркнем, что определение формы Ω корректно, то есть не зависит от выбора адаптированных координат (см. лемму 1). Руководствуясь интерпретацией движения идеальной жидкости как движения материальных частиц в силовом поле [13] и известными результатами решения задачи о формулировке гамильтоновой неавтономной механики [10,11], можно предположить, что уравнение Эйлера допускает «гамильтонову» формулировку

$$u \rfloor \Omega = dH \tag{7}$$

для «гамильтониана»

$$H = v_i(dx^i - h^i dt) - \mathcal{H} dt, \tag{8}$$

где $\mathcal{H}$ — функция на пространстве-времени, подлежащая определению. Форма H также сохраняет свой вид в любых адаптированных координатах.

Лемма 1. *Формы Ω и H ковариантны относительно преобразований* (1).

Доказательство. Справедливы цепочки равенств

$$v_i dx^i \wedge dt = v'_j \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\Big(\frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k + \frac{\partial x^i}{\partial t'} dt'\Big) \wedge dt' = v'_i dx'^i \wedge dt',$$

$$v_i(dx^i - h^i dt) - \mathcal{H} dt = v'_j \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\Big(\frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k + \frac{\partial x^i}{\partial t'} dt' - \Big[h'^k \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} + \frac{\partial x^i}{\partial t'}\Big] dt'\Big) - \mathcal{H} dt' =$$
$$= v'_i(dx'^i - h'^i dt') - \mathcal{H} dt',$$

которые и обосновывают утверждение леммы. □

Покажем, что сделанное предположение о представлении уравнения Эйлера в виде (7) справедливо в случае баротропного или изэнтропического движения жидкости [15], то есть такого термодинамического процесса, при котором энтропия постоянна и, в силу действия известного [16] соотношения $dW = T ds + \rho^{-1} dp$, где W — энтальпия процесса, правая часть уравнения Эйлера является полным дифференциалом.

Утверждение 1. *В инерциальной системе отсчета для баротропного движения уравнение Эйлера для идеальной жидкости записывается в виде* (7), (8) *при*

$$\mathcal{H} = W + \tfrac{1}{2} v_i v^i. \tag{9}$$

Доказательство. Требуется показать, что уравнение Эйлера (2), будучи записанным в произвольных адаптированных координатах, представляется в форме (7) вместе с выражениями (6), (8) и (9), где в качестве h выступает поле скоростей инерциальной системы отсчета. В силу ковариантности указанных выражений (см. лемму) и операций внешнего дифференциального исчисления, достаточно убедиться в справедливости представления (6)–(9) в стандартных декартовых координатах.

Вычисления, проведенные в *произвольных* адаптированных координатах, показывают, что

$$u\rfloor\Omega = (u\rfloor dv_i)dx^i \wedge dt - u^i dv_i \wedge dt + dv_i \wedge dx^i, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} dH &= d[v_i(dx^i - u^i dt) + v_i v^i dt - \mathcal{H} dt] = \\ &= dv_i \wedge (dx^i - u^i dt) - v_i du^i \wedge dt + d(v_i v^i) \wedge dt - d\mathcal{H} \wedge dt = \\ &= dv_i \wedge (dx^i - u^i dt) - v_i dh^i \wedge dt - \tfrac{1}{2}(v_i dv^i - v^i dv_i) \wedge dt - dW \wedge dt. \end{aligned} \tag{11}$$

Требуя равенства выражений (10) и (11), получаем соотношение

$$(u\rfloor dv_i)dx^i \wedge dt = -v_i dh^i \wedge dt - \tfrac{1}{2}(v_i dv^i - v^i dv_i) \wedge dt - dW \wedge dt,$$

которое эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + u^j \frac{\partial v_i}{\partial x^j} = -v_j \frac{\partial h^j}{\partial x^i} - \frac{1}{2}\Big(v_j \frac{\partial v^j}{\partial x^i} - v^j \frac{\partial v_j}{\partial x^i}\Big) - \frac{\partial W}{\partial x^i}. \tag{12}$$

В стандартных декартовых координатах для инерциальной системы отсчета $v_i = v^i$ и $h^i = 0$, следовательно, уравнение (12) совпадает с уравнением Эйлера (2) для баротропного случая. □

Таким образом, в силу того, что выражения (6), (8) и (9) сохраняют свой вид в любой адаптированной системе координат, уравнение (7) вместе с этими выражениями составляет ковариантную формулировку уравнения Эйлера (2). В координатной форме уравнение (7) записывается в виде (12).

При выводе уравнения (12) мы избежали преобразования уравнения (2) к произвольным координатам. Тем не менее представляется полезным для контроля полученного результата провести это вычисление. Исходные стандартные декартовы координаты отметим штрихами. Тогда, выполняя в дифференциальных операциях уравнения (2) преобразование к координатам (t, x^i), получаем

$$\begin{gathered} \frac{\partial v'_k}{\partial t'} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\Big(\frac{\partial v_i}{\partial t} + h^j \frac{\partial v_i}{\partial x^j} + v_j \frac{\partial h^j}{\partial x^i}\Big), \qquad \frac{\partial p}{\partial x'^k} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial p}{\partial x^i}, \\ v'_k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} v_i, \qquad h^j = \frac{\partial x^j}{\partial t'}. \end{gathered} \tag{13}$$

При таком преобразовании классические производные по пространственным переменным можно заменить на ковариантные производные ∇_i, и для объектов с индексами справедливы тензорные правила записи [17]:

$$v'^j \frac{\partial v'_k}{\partial x'^j} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} v^j \nabla_j v_i, \tag{14}$$

$$\nabla_j v_i = \frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ij} v_k, \qquad \Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \Big(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \Big), \tag{15}$$

где последнее равенство выражает условие ковариантного постоянства метрики $\nabla_k g_{ij} = 0$. Это условие позволяет записать свертку $v^j \Gamma^k_{ij} v_k$ в следующем виде:

$$v^j \Gamma^k_{ij} v_k = \frac{1}{2} v^j v^l \Big(\Gamma^k_{ji} g_{kl} + \Gamma^k_{li} g_{kj} \Big) = \frac{1}{2} v^j v^l \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} = \frac{1}{2} \Big(v^j \frac{\partial v_j}{\partial x^i} - v_j \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \Big). \tag{16}$$

Подставляя выражения (13) и (14) в исходное уравнение Эйлера и используя (16), несложно убедиться — при условии изэнтропичности движения — в справедливости уравнения (12).

Заметим, что в общем случае, то есть когда движение необязательно баротропно, правая часть уравнения (7) уже не является точной формой, и уравнение следует заменить на

$$u \rfloor \Omega = d\Pi - \rho^{-1} dp \wedge dt,$$

где

$$\Pi = v_i (dx^i - h^i dt) - \tfrac{1}{2} v_i v^i dt.$$

В этом случае вихрь не сохраняется, однако, как показывают простые вычисления, сохраняется потенциальный вихрь $\Omega \wedge d\rho$, если жидкость несжимаема ($u \rfloor d\rho = 0$), и инвариант Эртеля $\Omega \wedge ds$, если энтропия является лагранжевым инвариантом ($u \rfloor ds = 0$) [14, 15].

Рассмотрим некоторые примеры использования полученной ковариантной формулировки уравнения Эйлера.

Утверждение 2. *Уравнение сохранения вихря для баротропного движения идеальной жидкости представляется в виде*

$$\mathcal{L}_u \Omega = 0, \tag{17}$$

где $\mathcal{L}_u$ — производная Ли вдоль векторного поля u.

Доказательство. В силу известного свойства производной Ли (см. Приложение) и точности формы Ω имеем

$$\mathcal{L}_u \Omega = u \rfloor d\Omega + d(u \rfloor \Omega) = d(dH) = 0.$$

Выкладки, проведенные в декартовых координатах, показывают, что уравнение (17) совпадает с уравнением Гельмгольца — Фридмана для вихря [18, стр. 89]. □

Предложенная ковариантная формулировка уравнения Эйлера предоставляет естественный способ записи данного уравнения относительно произвольной подвижной системы координат. Для этого достаточно выразить в новых координатах поле скоростей инерциальной системы отсчета и стандартную евклидову метрику в $\mathbb{R}^3$, а затем воспользоваться общим координатным представлением (12) уравнения Эйлера.

Справедлива следующая физическая интерпретация полей скоростей [19].

Лемма 2. *Пусть h — поле скоростей инерциальной системы отсчета. Пространственные компоненты полей u, v и h в произвольной адаптированной системе координат (t, x^i) имею следующую интерпретацию:*

$-h^i$ — поле скоростей подвижной системы координат,

v^i — поле скоростей жидкости в инерциальной системе отсчета,

u^i — поле скоростей жидкости относительно подвижной системы координат.

Доказательство. Пометим штрихами стандартные декартовы координаты. Тогда

$$h^i = \frac{\partial x^i}{\partial t'} = -\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\frac{\partial x'^j}{\partial t}, \tag{18}$$

где первое равенство верно по определению инерциальной системы отсчета (4), а второе — по правилу дифференцирования сложной функции

$$0 = \frac{\partial x^i}{\partial t} = \frac{\partial x^i}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\frac{\partial x'^j}{\partial t}. \tag{19}$$

Физический смысл величин $\partial x'^i/\partial t$ из формулы (18) состоит в том, что они являются компонентами в стандартных декартовых координатах поля скоростей подвижной системы координат (t, x^i). Следовательно, величины h^i представляют собой компоненты поля скоростей подвижной системы координат, выраженные в координатах этой системы.

Для завершения доказательства леммы осталось показать, что компоненты u^i определяют скорость жидкости относительно подвижной системы координат. Но это с учетом установленной интерпретации величин h^i сразу следует из равенства $u^i = v^i + h^i$. □

Продемонстрируем предложенный способ записи компонент уравнения Эйлера на примере задачи, рассматриваемой в книге Ламба [12], о представлении этого уравнения в произвольной подвижной прямоугольной системе координат. Чтобы выразить компоненты уравнения Эйлера в этой системе координат, нужно просто положить в уравнении (12) $v_i = v^i$ и

$$h^1 = -a^1 + b_3x^2 - b_2x^3, \qquad h^2 = -a^2 + b_1x^3 - b_3x^1, \qquad h^3 = -a^3 + b_2x^1 - b_1x^2,$$

где a^i — компоненты скорости начала системы координат и b_i — компоненты вращения системы координат относительно мгновенного положения ее осей. Такой способ не требует вычислений, в отличие от используемого в [12].

Другим примером, иллюстрирующим предложенный способ записи уравнения Эйлера в подвижной системе координат, является задача записи этого уравнения в переменных Лагранжа [12]. Напомним, что в механике сплошных сред лагранжевы координаты (t, x^i) определяют через их связь со стандартными декартовыми координатами (t', x'^i) посредством преобразования (1), требуя сохранения x^i вдоль траектории материальных частиц [20]:

$$\frac{\partial x^i}{\partial t'} + u'^j \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} = 0, \qquad u'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial t}. \tag{20}$$

В этой формуле u'^i — пространственные компоненты поля абсолютных скоростей материальных частиц в стандартных декартовых координатах. При преобразованиях (1) компоненты указанного поля изменяются по тензорному закону:

$$u^i = \frac{\partial x^i}{\partial t'} + u'^j \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}. \tag{21}$$

Тогда из формул (20) и (21) получаем, что в лагранжевых координатах $u^i = 0$, и, следовательно, в этих координатах $h^i = -v^i$. Последнее равенство означает (см. лемму 2), что поле скоростей подвижной (лагранжевой) системы координат совпадает с полем скоростей жидкости относительно инерциальной системы отсчета.

Для записи уравнения Эйлера в переменных Лагранжа выполним в уравнении (12) подстановку $h^i = -v^i$. Получим

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x^i}\big(\tfrac{1}{2} v_j v^j - W\big). \tag{22}$$

Придадим этому уравнению стандартный вид [12], учитывая, что согласно формуле (4) $h^i = \partial x^i / \partial t'$ и, следовательно,

$$v^i = -h^i = -\frac{\partial x^i}{\partial t'}, \qquad v_i = g_{ij} v^j = -\frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial x'^k}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial t'} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial x'^k}{\partial t}, \tag{23}$$

где для получения последнего равенства использовалось соотношение (19). Подставляя выражения (23) в уравнение (22) и принимая во внимание, что

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x'^k}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\frac{1}{2} \frac{\partial x'^k}{\partial t} \frac{\partial x'^k}{\partial t}\Big), \qquad v_j v^j = -\frac{\partial x'^k}{\partial x^j} \frac{\partial x'^k}{\partial t} \frac{\partial x^j}{\partial t'} = \frac{\partial x'^k}{\partial t} \frac{\partial x'^k}{\partial t},$$

получаем уравнение (22) в виде

$$\frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x'^k}{\partial t^2} = -\frac{\partial W}{\partial x^i}.$$

Это и есть стандартная форма записи уравнения Эйлера в переменных Лагранжа [12].

Заключение

В работе предложена четырехмерная ковариантная формулировка уравнения Эйлера движения идеальной жидкости, то есть такая форма записи этого уравнения, которая не меняется при координатных преобразованиях, зависящих от времени. Эта формулировка является следствием применения дифференциально-геометрических методов к описанию движения жидкости. Используя представление об этом движении как траектории в расслоенном пространстве–времени, можно получить естественную геометрическую интерпретацию понятий «система отсчета», «относительное и абсолютное движение». Оказывается, что естественными геометрическими структурами для описания движущейся жидкости и ее полевых характеристик являются вертикальные тензорные поля и нелинейные связности — объекты до недавнего времени не использовавшиеся в механике жидкости.

Приложение

В настоящей работе используется аппарат дифференциального исчисления на многообразиях [21,22]. Поясним основные операции над дифференциальными формами.

Напомним, что произвольная дифференциальная p-форма α в локальных координатах (x^i), $i = 1, \dots, n$, уникально представляется в виде

$$\alpha = a_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}, \tag{24}$$

где предполагается, что индексы упорядочены по правилу $i_1 < \dots < i_p$ и по повторяющимся индексам идет суммирование. Число $p = \deg \alpha \geq 0$ называется *степенью* формы. Формы $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ называются *базисными координатными формами*. Координатная 1-форма dx^i представляет собой дифференциал координатной функции x^i. К числу базисных форм относят и 0-форму 1. Для краткости форму (24) записывают в виде $\alpha = a_I dx^I$.

Операция $\wedge$ над координатными 1-формами характеризуется свойством

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$$

и обобщается на произвольные формы. Для двух форм $\alpha = a_I dx^I$ и $\beta = b_J dx^J$ их *внешнее произведение* $\alpha \wedge \beta$ определяется формулой

$$\alpha \wedge \beta = a_I b_J dx^I \wedge dx^J.$$

Справедливо свойство

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{\deg \alpha \deg \beta} \beta \wedge \alpha.$$

Внешний дифференциал p-формы $\alpha = a_I dx^I$ определяется как $(p+1)$-форма

$$d\alpha = da_I \wedge dx^I.$$

При $p = 0$ он совпадает с дифференциалом функции. Внешний дифференциал удовлетворяет условию

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d\beta.$$

Напомним, что произвольный линейный оператор D над формами называется *дифференцированием*, если

$$D(\alpha \wedge \beta) = D\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha (\deg D\alpha - 1)} \alpha \wedge D\beta.$$

Таким образом, оператор d является дифференцированием.

Для произвольного векторного поля

$$u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

определена операция $u \rfloor$ *внутреннего умножения* форм на u, характеризующаяся линейностью и свойством

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big\rfloor (dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^i \wedge \cdots \wedge dx^p) = (-1)^{i+1} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^p,$$

где шляпка над множителем указывает на отсутствие этого множителя. Эта операция также является дифференцированием, поскольку

$$u \rfloor (\alpha \wedge \beta) = u \rfloor \alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge u \rfloor \beta.$$

Производная Ли формы α вдоль векторного поля u может быть определена формулой

$$\mathcal{L}_u \alpha = u \rfloor d\alpha + d(u \rfloor \alpha).$$

Так как операторы d и $u \rfloor$ являются дифференцированиями, то является дифференцированием и оператор $\mathcal{L}_u$ производной Ли вдоль векторного поля u:

$$\mathcal{L}_u (\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_u \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_u \beta.$$

Список литературы

[1] C. Truesdell, W. Noll, *The non-linear field theories of mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2004, 603 pp.

[2] W. Noll, *Five contributions to natural philosophy*, 2004, `http://www.math.cmu.edu/~wn0g/noll`.

[3] C. Truesdell, R. Toupin, "The classical field theories", In: *Encyclopedia of Physics*, ed. S. Flugge, Springer-Verlag, Berlin, Gottingen, Heidelberg, 1960.

[4] J. E. Marsden, T. J. R. Hughes, *Mathematical foundations of elasticity*, Dover, New York, 1983.

[5] G. Romano, R. Barretta, *Continuum mechanics on manifolds*, University of Naples Federico II, Naples, Italy, 2014, http://wpage.unina.it/romano.

[6] G. Romano, R. Barretta and M. Diaco, "Geometric continuum mechanics", *Meccanica*, **49**:1, (2014), 111–133.

[7] А. И. Гудименко, М. А. Гузев, "Об инвариантной форме записи закона сохранения массы", *Дальневост. матем. журн.*, **14**:1 (2014), 33–40.

[8] А. И. Гудименко, М. А. Гузев, “Геометрические аспекты изучения закона сохранения массы”, *Дальневост. матем. журн.*, **14**:2 (2014), 173–190.

[9] D. Saunders, *The Geometry of Jet Bundles*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.

[10] Г. А. Сарданашвили, *Современные методы теории поля. 2. Геометрия и классическая механика*, УРСС, Москва, 1998.

[11] L. Mangiarotti and G. Sardanashvily, *Connections in classical and quantum field theory*, World Scientific, Singapore, NewJersey, London, Hong Kong, 2000.

[12] Г. Ламб, *Гидродинамика*, Гостехиздат, Москва, 1947.

[13] В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, *Математические аспекты классической и небесной механики*, Современные проблемы математики. Фундаментальные напрвления. Т. 3, ВИНИТИ, Москва, 1985.

[14] B. Schutz, *Geometrical methods of mathematical physics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980.

[15] Ф. И. Должанский, *Лекции по геофизической гидродинамики*, ИБМ РАН, Москва, 2006.

[16] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика*, Физматлит,, Москва, 2001.

[17] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*, Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.,, Москва, 1986.

[18] Л. Г. Лойцянский, *Механика жидкости и газа: Учеб. для вузов.*, Дрофа, Москва, 2003.

[19] Д. В. Сивухин, *Общий курс физики. Т. I. Механика*, Физматлит. Изд-во МФТИ, Москва, 2005.

[20] С. К. Годунов, Е. И. Роменский, *Элементы механики сплошных сред и законы сохранения*, Научная книга, Новосибирск, 1998.

[21] Ф. Уорнер, *Основы теории гладких многообразий и групп Ли*, Мир, Москва, 1987.

[22] I. Kolár and P. Michor and J. Slovák, *Natural operations in differential geometry*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1993.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 15 апреля 2015 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Научного Фонда ДВФУ (проект № 13-06-0013-м_а) и РФФИ 13-01-12404 офи_м2.

Gudimenko A. I., Guzev M. A. On covariant form of the momentum balance equation for perfect fluid. Far Eastern Mathematical Journal. 2015. V. 15. № 1. P. 41–52.

ABSTRACT

The apparatus of differential geometry is used to represent the momentum balance equation for perfect fluid in a form that is invariant under the time-dependent coordinate transformations. The motion of fluid is described in the framework of four-dimensional formalism when the space-time is represented as a bundle over the time axis $\mathbb{R}$. Applications of the obtained formulation are discussed.

Key words: *continuum mechanics, momentum conservation law, fiber bundles, covariant formulation.*