Дальневосточный математический журнал. 2015. Том 15. № 1. С. 53–60

УДК 519.853
MSC2010 65K05, 90C25, 49N15

 А. В. Жильцов, Р. В. Намм[1]

Метод множителей Лагранжа в задаче конечномерного выпуклого программирования

В работе исследована возможность использования модифицированных функций Лагранжа для решения задачи конечномерного выпуклого программирования. Доказывается сходимость модифицированного метода двойственности при наиболее общих предположениях относительно исходной задачи.

Ключевые слова: *метод множителей Лагранжа, выпуклый анализ, конечномерное выпуклое программирование.*

Введение

Классический подход Лагранжа к исследованию экстремальных задач с ограничениями-равенствами получил существенное развитие в связи с возникновением оптимизационных задач с ограничениями-неравенствами. На основе изучения классических функций Лагранжа, отвечающих задачам нелинейного программирования, были установлены важные признаки решения различных экстремальных задач с ограничениями, а для задач выпуклого программирования предложены алгоритмы, осуществляющие непосредственный поиск седловой точки классической функции Лагранжа. Такие алгоритмы, однако, сходятся медленно и их сходимость теоретически обоснована при весьма жестких требованиях относительно выпуклости и дифференцируемости входящих в задачу функций [1, 2]. Рассмотрение модифицированных функций Лагранжа позволило развить новый класс методов, в которых указанные выше недостатки проявляются в значительно меньшей степени. При этом развитие новых методов двойственности для задачи нелинейного программирования с ограничениями-неравенствами, как правило, осуществляется с помощью предварительного сведения исходной задачи к задаче с ограничениями-равенствами [1, 2]. В данной работе исследование модифицированных функций Лагранжа для задачи выпуклого программирования осуществляется средствами выпуклого анализа, без сведения к задаче с ограничениями-равенствами.

[1]Дальневосточный государственный университет путей сообщения, 680021, г. Хабаровск, ул. Серышева, 47. Электронная почта: egrevid@gmail.com, rnamm@yandex.ru

1. Функция чувствительности

Рассмотрим задачу конечномерного выпуклого программирования

$$\begin{cases} f(x) \to \min, \\ x \in \Omega = \{z \in \mathbb{R}^n \colon g^j(z) \leqslant 0, j = \overline{1,m}\}, \end{cases} \tag{1}$$

где f, g^j — выпуклые (и, следовательно, непрерывные) на $\mathbb{R}^n$ функции.

Предположим, что Ω — компактное множество, и пусть выполняется условие Слейтера, т. е. существует точка $\widetilde{x} \in \Omega$ такая, что $g^j(\widetilde{x}) < 0, j = \overline{1,m}$. Тогда, как известно [3, 4], классическая функция Лагранжа $L(x,y) = f(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} y_j g^j(x)$ имеет седловую точку $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$, т. е.

$$L(x^*, y) \leqslant L(x^*, y^*) \leqslant L(x, y^*), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^m_+.$$

При этом x^* является решением исходной задачи (1), а y^* есть решение двойственной задачи [4, 5]

$$\begin{cases} \underline{L}(y) \to \max, \\ y \in \Omega^* = \{\omega \in \mathbb{R}^m_+ \colon \underline{L}(\omega) > -\infty\}, \end{cases} \tag{2}$$

где $\underline{L}(y) = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \big\{ f(x) + \sum\limits_{j=1}^{m} y_j g^j(x) \big\}$.

Эффективная область двойственной функции $\underline{L}(y)$ может не совпадать с $\mathbb{R}^m$, что затрудняет решение задачи (2).

На пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ определим вспомогательную функцию $K_r(x,y,v)$ следующим образом [5]:

$$K_r(x,y,v) = \begin{cases} f(x) + \sum\limits_{j=1}^{m} y_j v_j + \frac{r}{2} \sum\limits_{j=1}^{m} v_j^2, & \text{если } g(x) \leqslant v, \\ +\infty, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $g(x) = (g^1(x), \ldots, g^m(x))$, $r > 0$ — константа.

На основе функции $K_r(x,y,v)$ строится модифицированная функция Лагранжа

$$M(x,y) = \inf_{v \in \mathbb{R}^m} K_r(x,y,v) = \inf_{v \geqslant g(x)} \left\{ f(x) + \sum_{j=1}^{m} y_j v_j + \frac{r}{2} \sum_{j=1}^{m} v_j^2 \right\} =$$

$$= f(x) + \frac{1}{2r} \inf_{v \geqslant g(x)} \sum_{j=1}^{m} \big((y_j + r v_j)^2 - y_j^2 \big) = f(x) + \frac{1}{2r} \sum_{j=1}^{m} \inf_{v_j \geqslant g^j(x)} \big((y_j + r v_j)^2 - y_j^2 \big) =$$

$$= f(x) + \frac{1}{2r} \sum_{j=1}^{m} \big(((y_j + r g^j(x))^+)^2 - y_j^2 \big).$$

Рассмотрим модифицированную двойственную функцию

$$\underline{M}(y) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} M(x,y) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \inf_{v \in \mathbb{R}^m} K_r(x,y,v).$$

Так как $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^n}\inf\limits_{v\in\mathbb{R}^m} K_r(x,y,v) = \inf\limits_{v\in\mathbb{R}^m}\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^n} K_r(x,y,v)$, то

$$\underline{M}(y) = \inf_{v\in\mathbb{R}^m}\inf_{g(x)\leqslant v}\left\{f(x)+\sum_{j=1}^m y_j v_j + \frac{r}{2}\sum_{j=1}^m v_j^2\right\} = \inf_{v\in\mathbb{R}^m}\left\{\chi(v)+\sum_{j=1}^m y_j v_j + \frac{r}{2}\sum_{j=1}^m v_j^2\right\},$$

где функция

$$\chi(v) = \begin{cases}\inf\limits_{g(x)\leqslant v} f(x), & \text{если } \{x\colon g(x)\leqslant v\}\neq\varnothing,\\ +\infty, & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

называется функцией чувствительности [5, 6].

Таким образом, модифицированная двойственная функция $\underline{M}(y)$ имеет двоякое представление

$$\underline{M}(y) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n}\left\{f(x)+\frac{1}{2r}\sum_{j=1}^m \left(\left((y_j+rg^j(x))^+\right)^2 - y_j^2\right)\right\}, \tag{3}$$

$$\underline{M}(y) = \inf_{v\in\mathbb{R}^m}\left\{\chi(v)+\sum_{j=1}^m y_j v_j + \frac{r}{2}\sum_{j=1}^m v_j^2\right\}. \tag{4}$$

Определение 1. *Пара* $(\overline{x},\overline{y})\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ *называется седловой точкой для* $M(x,y)$*, если*

$$M(\overline{x},y)\leqslant M(\overline{x},\overline{y})\leqslant (x,\overline{y}),\qquad \forall x\in\mathbb{R}^n, \forall y\in\mathbb{R}^m.$$

В определении седловой точки для модифицированной функции Лагранжа левое неравенство должно выполняться для всех $y\in R^m$, в отличие от определения седловой точки для классической функции Лагранжа. Известно, что функции $L(x,y)$ и $M(x,y)$ обладают одним и тем же множеством седловых точек [3, 5], что позволяет вместо классической функции Лагранжа $L(x,y)$ для поиска седловых точек использовать ее модифицированный аналог $M(x,y)$. При построении и исследовании методов двойственности, основанных на модифицированных функциях Лагранжа, возникает естественный вопрос о разрешимости задачи (3) либо задачи (4). Отметим, что из разрешимости одной задачи вытекает разрешимость другой. В литературе, как правило, исследуется задача (3) [1, 2]. Для её разрешимости достаточно предположить, что $f(x)$ есть сильно выпуклая функция. В данной работе, при наиболее общих предположениях о выпуклости функций f и g^j, $j=\overline{1,m}$, исследуется вопрос о разрешимости задачи (4).

Если допустимое множество Ω в задаче (1) является компактным множеством, то и множества вида $\Omega_v=\{x\colon g(x)\leqslant v\}\quad \forall v\in\mathbb{R}^m$, при условии, что $\Omega_v\neq\varnothing$, также являются компактными множествами [5]. Нетрудно увидеть, что в этом случае $\chi(v)$ есть собственная выпуклая функция [7].

Теорема 1. *Пусть в задаче (1) множество* Ω *является компактным. Тогда функция чувствительности* $\chi(v)$ *полунепрерывна снизу.*

Доказательство. Возьмем последовательность $\{v^k\} \subset \operatorname{dom}\chi$ такую, что $\lim\limits_{k\to\infty} v^k = \hat{v}$. Обозначим $x(v^k) = \operatorname*{argmin}\limits_{x\in\Omega_{v_k}} f(x)$. Очевидно, что $f(x(v^k)) = \chi(v^k)$. Так как $\{v^k\}$ — ограниченная последовательность в $\mathbb{R}^m$, то $\{x(v^k)\}$ является ограниченной последовательностью в $\mathbb{R}^n$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\{x(v^k)\}$ есть сходящаяся последовательность. Пусть $\hat{x} = \lim\limits_{k\to\infty} x(v^k)$. Получаем

$$f(\hat{x}) = f(\lim_{k\to\infty} x(v^k)) = \lim_{k\to\infty} f(x(v^k)) = \lim_{k\to\infty} \chi(v^k).$$

Так как $g^j(x(v^k)) \leqslant v_j^k, j = \overline{1,m}$, то, переходя к пределу по k, получим $g^j(\hat{x}) \leqslant \hat{v}_j, \quad j = \overline{1,m}$. Поэтому $\Omega_{\hat{v}} \neq \varnothing$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \chi(v^k) = f(\hat{x}) \geqslant \chi(\hat{v})$. Приходим к выводу, что $\chi(v)$ является полунепрерывной снизу функцией. □

Для каждого фиксированного $y \in \mathbb{R}^m$ рассмотрим функцию

$$F_y(v) = \chi(v) + \sum_{j=1}^m y_j v_j + \frac{r}{2}\sum_{j=1}^m v_j^2,$$

которая, вместе с $\chi(v)$, полунепрерывна снизу на $\mathbb{R}^m$ и является сильно выпуклой на $\operatorname{dom}\chi$ (обычно понятие сильной выпуклости применяется для функций, принимающих конечные значения на всем пространстве). Из полунепрерывности снизу функции чувствительности $\chi(v)$ следует, что ее надграфик $\operatorname{epi}\chi = \{(v,a) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \colon \chi(v) \leqslant a\}$ является выпуклым замкнутым множеством в $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$.

По теореме отделимости Мазура [8] существуют такие $\psi \in \mathbb{R}^m$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, что

$$\langle \psi, v\rangle_{\mathbb{R}^m} + \chi(v) + \alpha \geqslant 0, \qquad \forall v \in \operatorname{dom}\chi,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^m}$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$.

Из этих рассуждений следует, что $F_y(v) \longrightarrow +\infty$ при $v \in \mathbb{R}^m$ и $\|v\|_{\mathbb{R}^m} \longrightarrow \infty$, то есть $F_y(v)$ есть коэрцитивная на $\mathbb{R}^m$ функция. Вместе с сильной выпуклостью это гарантирует существование единственного элемента $v(y) = \operatorname*{argmin}\limits_{v\in\mathbb{R}^m} F_y(v)$. Таким образом, задача (4) разрешима.

2. Метод решения двойственной задачи

Рассмотрим модифицированную двойственную задачу

$$\begin{cases} \underline{M}(y) \to \max, \\ y \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \tag{5}$$

Известно, что задачи (2) и (5) равносильны [3, 5]. Но, в отличие от (2), двойственная функция $\underline{M}(y)$ в задаче (5) является гладкой. Это позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Функция* $\underline{M}(y)$ *дифференцируема на* $\mathbb{R}^m$, *ее производная* $\nabla\underline{M}(y)$ *равна* $v(y) = \operatorname*{argmin}_{v\in\mathbb{R}^m} F_y(v)$ *и, более того,*

$$\|v(\hat{y}) - v(\hat{\hat{y}})\|_{\mathbb{R}^m} \leqslant \frac{1}{r}\|\hat{y} - \hat{\hat{y}}\|_{\mathbb{R}^m}, \qquad \forall \hat{y}, \hat{\hat{y}} \in \mathbb{R}^m.$$

Доказательство. Благодаря третьему слагаемому функция $F_y(v)$ является сильно выпуклой. Пусть $\hat{y}, \hat{\hat{y}} \in \mathbb{R}^m$, $\hat{v} = v(\hat{y})$, $\hat{\hat{v}} = v(\hat{\hat{y}})$. Подставив их в один из критериев сильной выпуклости, получаем

$$\begin{aligned}
\chi(\hat{v}) + \sum_{j=1}^m \hat{y}_j\hat{v}_j + \frac{r}{2}\sum_{j=1}^m {\hat{v}_j}^2 + \frac{r}{2}\|\hat{\hat{v}} - \hat{v}\|^2_{\mathbb{R}^m} \leqslant \chi(\hat{\hat{v}}) + \sum_{j=1}^m \hat{y}_j\hat{\hat{v}}_j + \frac{r}{2}\sum_{j=1}^m {\hat{\hat{v}}_j}^2,\\
\chi(\hat{\hat{v}}) + \sum_{j=1}^m \hat{\hat{y}}_j\hat{\hat{v}}_j + \frac{r}{2}\sum_{j=1}^m {\hat{\hat{v}}_j}^2 + \frac{r}{2}\|\hat{v} - \hat{\hat{v}}\|^2_{\mathbb{R}^m} \leqslant \chi(\hat{v}) + \sum_{j=1}^m \hat{\hat{y}}_j\hat{v}_j + \frac{r}{2}\sum_{j=1}^m {\hat{v}_j}^2.
\end{aligned} \tag{6}$$

Складывая два неравенства, получим

$$r\|\hat{v} - \hat{\hat{v}}\|^2_{\mathbb{R}^m} \leqslant \sum_{j=1}^m (\hat{y}_j - \hat{\hat{y}}_j)(\hat{\hat{v}}_j - \hat{v}_j),$$

$$r\|\hat{v} - \hat{\hat{v}}\|^2_{\mathbb{R}^m} \leqslant \langle \hat{y} - \hat{\hat{y}}, \hat{\hat{v}} - \hat{v}\rangle_{\mathbb{R}^m}. \tag{7}$$

Отсюда вытекает

$$\|\hat{v} - \hat{\hat{v}}\|_{\mathbb{R}^m} \leqslant \frac{1}{r}\|\hat{y} - \hat{\hat{y}}\|_{\mathbb{R}^m}. \tag{8}$$

Из (6) также следует двустороннее неравенство

$$\sum_{j=1}^m \hat{\hat{y}}_j(\hat{\hat{v}}_j - \hat{v}_j) + \frac{r}{2}\sum_{j=1}^m ({\hat{\hat{v}}_j}^2 - {\hat{v}_j}^2) \leqslant \chi(\hat{v}) - \chi(\hat{\hat{v}}) \leqslant \sum_{j=1}^m \hat{y}_j(\hat{\hat{v}}_j - \hat{v}_j) + \frac{r}{2}\sum_{j=1}^m ({\hat{\hat{v}}_j}^2 - {\hat{v}_j}^2).$$

Поэтому

$$\lim_{\hat{\hat{y}}\to\hat{y}} \chi(\hat{\hat{v}}) = \chi(\hat{v}).$$

Отсюда и из (8) следует, что вогнутая функция $\underline{M}(y)$ является непрерывной на $\mathbb{R}^m$. Поэтому субдифференциал $\partial(-\underline{M}(y))$ выпуклой функции $(-\underline{M}(y))$ не пуст в любой точке $y \in \mathbb{R}^m$. Для доказательства дифференцируемости $\underline{M}(y)$ достаточно показать, что $\partial(-\underline{M}(y))$ состоит только из одного элемента [7].

Зафиксируем произвольный вектор $y \in \mathbb{R}^m$, и пусть $(-t) \in \partial(-\underline{M}(y))$. Для любого $\xi \in \mathbb{R}^m$ справедливо неравенство

$$\underline{M}(\xi) \leqslant \underline{M}(y) + \sum_{j=1}^m t_j(\xi_j - y_j),$$

т. е.

$$\chi(v(\xi)) + \sum_{j=1}^{m} \xi_j v_j(\xi) + \frac{r}{2}\sum_{j=1}^{m} v_j^2(\xi) \leqslant$$

$$\leqslant \chi(v(y)) + \sum_{j=1}^{m} y_j v_j(y) + \frac{r}{2}\sum_{j=1}^{m} v_j^2(y) + \sum_{j=1}^{m} t_j(\xi_j - y_j) \leqslant$$

$$\leqslant \chi(v(\xi)) + \sum_{j=1}^{m} y_j v_j(\xi) + \frac{r}{2}\sum_{j=1}^{m} v_j^2(\xi) + \sum_{j=1}^{m} t_j(\xi_j - y_j).$$

Поэтому для любых $\xi \in \mathbb{R}^m$, $\beta > 0$, справедливо

$$\beta^{-1}\sum_{j=1}^{m}(v_j(\xi) - t_j)(\xi_j - y_j) \leqslant 0.$$

Возьмем $\xi = y + \beta p$, $p \in \mathbb{R}^m$ — произвольный вектор. Переходя к пределу при $\beta \longrightarrow +0$, с учетом (8), получим

$$\sum_{j=1}^{m}(v_j(y) - t_j)p_j \leqslant 0, \qquad \forall p \in \mathbb{R}^m.$$

Это означает, что $t = v(y)$. Из единственности элемента $v(y) = \operatorname*{argmin}_{v\in\mathbb{R}^m} F_y(v)$ и неравенства (8) вытекает доказательство теоремы. □

Рассмотрим градиентный метод решения двойственной задачи (5)

$$y^{k+1} = y^k + \gamma v(y^k), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (y^0 \in \mathbb{R}^m \text{ — задано}), \tag{9}$$

$\gamma > 0$ — длина шага сдвига.

Из неравенства (8) следует, что $\nabla \underline{M}(y)$ удовлетворяет условию Липшица с константой r^{-1}. Это позволяет использовать для решения двойственной задачи градиентные алгоритмы, исследованные в [2, 9].

Функция $\underline{M}(y)$ ограничена сверху величиной $\min_{x\in\Omega} f(x)$. Поэтому для $0 < \gamma < 2r$ в градиентном методе (9) имеет место предельное соотношение $\lim_{k\to\infty} \|\nabla \underline{M}(y^k)\| = 0$ [2, стр. 31].

Теорема 3. *Пусть $0 < \gamma < 2r$. Тогда последовательность $\{y^k\}$, генерируемая по методу (9), сходится к решению двойственной задачи (5).*

Доказательство. Обозначим Y^* — множество решений задачи (5). Пусть $y \in Y^*$. Тогда $v(y) = \nabla \underline{M}(y) = 0$.

Далее, пользуясь (7), получим

$$\|y - y^{k+1}\|^2_{\mathbb{R}^m} = \|y + \gamma v(y) - y^k - \gamma v(y^k)\|^2_{\mathbb{R}^m} = \|(y - y^k) + \gamma(v(y) - v(y^k))\|^k_{\mathbb{R}^m} =$$
$$= \|y - y^k\|^2_{\mathbb{R}^m} + 2\gamma\langle y - y^k, v(y) - v(y^k)\rangle_{\mathbb{R}^m} + \gamma^2\|v(y) - v(y^k)\|^2_{\mathbb{R}^m} \leqslant$$
$$\leqslant \|y - y^k\|^2_{\mathbb{R}^m} - 2\gamma r\|v(y) - v(y^k)\|^2_{\mathbb{R}^m} + \gamma^2\|v(y) - v(y^k)\|^2_{\mathbb{R}^m} \leqslant$$
$$\leqslant \|y - y^k\|^2_{\mathbb{R}^m} - \gamma(2r - \gamma)\|v(y^k)\|^2_{\mathbb{R}^m} \leqslant \|y - y^k\|^2_{\mathbb{R}^m}. \tag{10}$$

Поэтому $\{y^k\}$ есть ограниченная последовательность и, кроме того, существует $\lim\limits_{k\to\infty}\|y-y^k\|^2_{\mathbb{R}^m}$.

Пусть $\overline{y}=\lim\limits_{j\to\infty}y^{k_j}$. Из (10) вытекает

$$\|y^{k_j+1}-y\|^2_{\mathbb{R}^m}\leqslant\|y^{k_j}-y\|^2_{\mathbb{R}^m}-\gamma(2r-\gamma)\|v(y^{k_j})\|^2_{\mathbb{R}^m}.$$

Тогда

$$\lim_{j\to\infty}\|y^{k_j+1}-y\|^2_{\mathbb{R}^m}\leqslant\lim_{j\to\infty}(\|y^{k_j}-y\|^2_{\mathbb{R}^m}-\gamma(2r-\gamma)\|v(y^{k_j})\|^2_{\mathbb{R}^m}),$$
$$\|\overline{y}-y\|^2_{\mathbb{R}^m}\leqslant\|\overline{y}-y\|^2_{\mathbb{R}^m}-\gamma(2r-\gamma)\|v(\overline{y})\|^2_{\mathbb{R}^m}.$$

Отсюда следует, что $v(\overline{y})=0$, то есть $\overline{y}\in Y^*$.

Возьмем $y=\overline{y}$. Тогда $\lim\limits_{j\to\infty}\|y^{k_j+1}-\overline{y}\|_{\mathbb{R}^m}=0$. Тогда, с учетом неравенств $\|y^l-\overline{y}\|_{\mathbb{R}^m}\leqslant\|y^{k_j}-\overline{y}\|_{\mathbb{R}^m}$ для $l\geqslant k_j$, получим, что $\lim\limits_{k\to\infty}y^k=\overline{y}$. □

Градиентный метод (9) может быть переписан следующим образом [2, 5]:

$$\begin{aligned}&(i)\quad x^{k+1}=\operatorname*{argmin}_{x\in\mathbb{R}^m}M(x,y^k)\\&(ii)\quad y_j^{k+1}=y_j^k+\gamma\max\{g^j(x^{k+1}),-\frac{y_j^k}{r}\},\qquad j=\overline{1,m}.\end{aligned}\tag{11}$$

Если $\gamma=r$, то из (ii) вытекает, что $y^{k+1}=(y^k+rg(x^{k+1}))^+$.

В предположении, что допустимое множество Ω в задаче (1) является компактным, и выполняется условие Слейтера, модифицированная функция Лагранжа $M(x,y)$ имеет седловую точку. Для метода (11) справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Любая предельная точка последовательности* $\{(x^{k+1},y^k)\}$, *генерируемая методом (11), является седловой точкой для* $M(x,y)$.

Доказательство. Согласно теореме 3 последовательность $\{y^k\}$ — сходящаяся. Нетрудно показать, что $x^{k+1}=\operatorname*{argmin}\limits_{g(x)\leqslant v(y^k)}f(x)$, где $v(y^k)=\operatorname*{argmin}\limits_{v\in\mathbb{R}^m}F_{y^k}(v)$. Так как $\lim\limits_{k\to\infty}\|v(y^k)\|_{\mathbb{R}^m}=0$, то $\{x^k\}$ является ограниченной последовательностью в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $(\widetilde{x},\widetilde{y})$ — предельная точка последовательности $\{(x^k,y^{k-1})\}$, то есть $(\widetilde{x},\widetilde{y})=\lim\limits_{i\to\infty}\{(x^{k_i},y^{k_i-1})\}$ в $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$. По теореме 3 $\widetilde{y}=\lim\limits_{k\to\infty}y^k$ и $\widetilde{y}\in Y^*$. Из полунепрерывности снизу $\chi(v)$ вытекает, что

$$\varliminf_{k\to\infty}\{\chi(v(y^k))+\sum_{j=1}^m y_iv_i(y^k)+\frac{r}{2}\sum_{j=1}^m v_j^2(y^k)\}\geqslant\chi(0).$$

Кроме того,

$$M(y^k)=\chi(v(y^k))+\sum_{j=1}^m y_jv_j(y^k)+\frac{r}{2}\sum_{j=1}^m v_j^2(y^2)=$$
$$=\inf_{v\in\mathbb{R}^m}\{\chi(v)+\sum_{j=1}^m y_jv_j+\frac{r}{2}\sum_{j=1}^m v_j^2\}\leqslant\chi(0).$$

Поэтому

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\{\chi(v(y^k)) + \sum_{j=1}^{m} y_j v_j + \frac{r}{2}\sum_{j=1}^{m} v_j^2(y^k)\} \leqslant \chi(0).$$

Следовательно, существует предел

$$\lim_{k\to\infty}\{\chi(v(y^k)) + \sum_{j=1}^{m} y_j v_j(y^k) + \frac{r}{2}\sum_{j=1}^{m} v_j^2(y^k)\} = \chi(0) = \inf_{g(x)\leqslant 0} f(x).$$

Так как $f(x^{k_i}) = \chi(v(y^{k_i-1}))$, то

$$f(\widetilde{x}) = \lim_{i\to\infty} f(x^{k_i}) = \lim_{i\to\infty}\chi(v(y^{k_i-1})) = \chi(0).$$

Значит, $\widetilde{x}$ есть решение задачи (1). □

Список литературы

[1] Д. Бертсекас, *Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа*, Радио и связь, М, 1987.

[2] Б. Т. Поляк, *Введение в оптимизацию*, Наука, М, 1983.

[3] Е. Г. Гольштейн, Н. В. Трертьяков, *Модифицированные функции Лагранжа. Теория и метода оптимизации*, Наука, М, 1989.

[4] D. P. Bertsekas, *Convex Optimization Theory*, Athena Scientific, Belmont, Masachusetts, 2009.

[5] К. Гроссман, А. А. Каплан, *Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации*, Наука, Новосибирск, 1981.

[6] А. С. Антипин, А. И. Голиков, Е. В. Хорошилова, "Функция чувствительности, ее свойства и приложения", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ*, **51**:12 (2011), 1–17.

[7] И. Экланд, Р. Темам, *Выпуклый анализ и вариационные проблемы*, М, Мир, 1979.

[8] А. Куфнер, С. Фучик, *Нелинейные дифференциальные уравнения*, М, Наука, 1988.

[9] Ю. Е. Нестеров, *Введение в выпуклую оптимизацию*, М, МЦНМО, 2010.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 13 октября 2014 г.

Zhiltsov A. V., Namm R. V. The Lagrange multiplier method in the finite convex programming problem. Far Eastern Mathematical Journal. 2015. V. 15. № 1. P. 53–60.

ABSTRACT

In this paper we investigate the possibility of using the modified Lagrange's function for solving of a finite-dimensional convex programming problem. Convergence of the modified duality method is proved under the most general assumptions concerning of initial problem.

Key words: *Lagrange multiplier method, convex optimization, finite convex programming.*