Дальневосточный математический журнал. 2015. Том 15. № 1. С. 61–69

УДК 517.95
MSC2010 35Q30

© А. А. Илларионов, Л. В. Илларионова[1]

Стационарные решения двумерных уравнений Навье – Стокса с большими потоками

Получены новые результаты о существовании решения стационарной краевой задачи для двумерных уравнений Навье – Стокса однородной несжимаемой жидкости с ненулевыми потоками.

Ключевые слова: *уравнения Навье – Стокса, проблема Лере.*

1. Введение

Пусть Ω — двумерная конечная область с границей Γ, состоящей из связных компонент $\Gamma_1, \dots, \Gamma_\chi$, причем Γ_χ ограничивает Ω, т.е. Γ_χ — внешняя компонента связности. Рассмотрим стационарную краевую задачу для уравнений Навье – Стокса, относительно неизвестных функций $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ и p:

$$-\nu\,\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \qquad \text{в } \Omega, \tag{1.1}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \qquad \text{на } \Gamma. \tag{1.2}$$

Из уравнения $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ вытекает необходимое условие разрешимости задачи:

$$\sum_{i=1}^{\chi} a_i(\mathbf{g}) = 0, \tag{1.3}$$

где

$$a_i(\mathbf{g}) = \int_{\Gamma_i} \mathbf{g}\cdot\mathbf{n}\,d\Gamma$$

— поток жидкости через Γ_i. Здесь и далее $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ — единичный вектор внешней нормали к Γ.

Разрешимость краевой задачи (1.1), (1.2) впервые была доказана Ж. Лерэ [1] в случае, когда $a_i(\mathbf{g}) = 0$, $i = \overline{1,\chi}$ (т.е. в Ω отсутствуют внутренние источники либо стоки).

[1]ХО ИПМ ДВО РАН, Хабаровск, ул. Дзержинского, 54, ТоГУ, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136; ВЦ ДВО РАН Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, 65. Электронная почта: `illar_a@list.ru`, `illarionova_l@list.ru`

Один из важнейших вопросов математической гидродинамики [2, 3] состоит в следующем: *существует ли решение задачи (1.1), (1.2), если функция* $\mathbf{g}$ *удовлетворяет только необходимому условию (1.3)?*

Положительный ответ очевиден, если потоки $|a_i(\mathbf{g})|$ достаточно *малы* (например, по сравнению с ν). При *больших* потоках $a_i(\mathbf{g})$ известно довольно мало. Основная трудность состоит в отсутствии аналога леммы Хопфа в случае ненулевых потоков (см. [4, 5]).

Известно (см. [6, 7, 8, 9]), что решение задачи (1.1), (1.2) существует, если выполняются некоторые условия симметрии. В общем случае самая сильная теорема о разрешимости доказана в [10] при условиях:

$$\mathbf{f} = 0, \quad \chi = 2, \quad a_1(\mathbf{g}) = -a_2(\mathbf{g}) \geq 0.$$

Еще один интересный результат состоит в следующем. Предположим, что $\mathbf{f} = 0$ и $\mathbf{g} = \nabla G$, где G — гармоническая в Ω функция. Тогда задача (1.1), (1.2) имеет очевидное потенциальное решение $\mathbf{u} = \nabla G$, $p = const$. В работе [11] (см. также [12, 13, 14]) доказано, что задача (1.1), (1.2) разрешима для почти всех потоков $a_1(\mathbf{g}), a_2(\mathbf{g})$, если $\chi = 2$, $\mathbf{f} = 0$ и функция $\mathbf{g}$ достаточна близка к градиенту некоторой гармонической в Ω функции. Более подробный обзор литературы можно найти в [9, 10].

Кроме (1.2), существуют и другие виды граничных условий. Например, естественными, с физической точки зрения, являются

$$\begin{aligned} &\mathbf{u} \times \mathbf{n} = g \quad \text{на } \Gamma, \\ &h = l + C_i \quad \text{на } \Gamma_i, \\ &\int\limits_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma_i = a_i, \qquad i = \overline{1, \chi}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $\mathbf{u} \times \mathbf{n} = u_1 n_2 - u_2 n_1$, $h = |\mathbf{u}|^2/2 + p$ — полный напор течения, C_i — неизвестные постоянные, числа a_i и функции l, g заданы.

Разрешимость краевой задачи (1.1), (1.4) доказывалась в [15, 16, 17, 18] при однородных краевых условиях $a_i = 0$, $g = 0$; в [19, 20] при нулевых потоках $a_i = 0$; и в [21], если выполняются условия симметрии такие же, как и в [6, 7].

Если $\mathbf{f} = 0$, $l = 0$ и функция g удовлетворяет дополнительному предположению

$$\int\limits_{\Gamma_i} g \, d\Gamma_i = 0, \qquad i = \overline{1, \chi},$$

то задача (1.1), (1.4) имеет потенциальное решение $\mathbf{u} = \nabla G$. В настоящей работе мы обосновываем разрешимость (1.1), (1.4) при условии, что $\mathbf{f}$ и l достаточно малы. Применяемый метод отличен от использованного в [11] для задачи (1.1), (1.2).

2. Формулировка основного результата

Далее всюду считаем, что граница $\Gamma = \partial\Omega$ принадлежит классу $C^{1,1}$. Рассматриваемую задачу запишем в виде

$$-\Delta \mathbf{u} + \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathrm{L}\mathbf{u} + \nabla h = \mathbf{f}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{2.1}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{n}|_\Gamma = g, \quad \int\limits_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\, ds = a_i, \quad h|_{\Gamma_i} = l + C_i, \quad i = \overline{1, \chi}, \tag{2.2}$$

где

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \quad \mathrm{L}\mathbf{u} = (-u_2, u_1).$$

Мы использовали формулу $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathrm{L}\mathbf{u} + \nabla|\mathbf{u}|^2/2$ и положили $\nu = 1$ (последнего всегда можно добиться с помощью линейной замены переменных).

Введем стандартное обозначение: $W_q^m(Q)$ — пространство Соболева функций, заданных на множестве Q, при этом $H^m(Q) = W_2^m(Q)$, $L^p(Q) = W_p^0(Q)$. Если X — нормированное пространство, то X^* — сопряженное к X пространство.

Определим гильбертово пространство

$$V = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{v} \times \mathbf{n}|_\Gamma = 0, \quad \int\limits_{\Gamma_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, d\Gamma = 0, \ \ i = \overline{1, \chi} \right\}$$

с нормой пространства $\mathbf{H}^1(\Omega)$ и функционал

$$\langle F, \mathbf{v} \rangle = \int\limits_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, d\Omega - \int\limits_\Gamma l \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, d\Gamma, \quad \mathbf{v} \in V.$$

Так же, как и в [16, 18, 20], функцию $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, удовлетворяющую условиям

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \quad \mathbf{u} \times \mathbf{n}|_\Gamma = g, \quad \int\limits_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\, ds = a_i, \quad i = \overline{1, \chi}, \tag{2.3}$$

$$\forall \mathbf{v} \in V \qquad \int\limits_\Omega \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}\, d\Omega + \int\limits_\Omega (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \operatorname{rot} \mathbf{u}\, d\Omega = \langle F, \mathbf{v} \rangle, \tag{2.4}$$

будем называть обобщенным решением задачи (2.1), (2.2). Здесь и далее $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathrm{L}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1 v_2 - u_2 v_1)$ — скалярная функция.

Нам будет удобнее будет рассматривать задачу (2.3), (2.4) в случае, когда F — произвольный функционал из V^*. Пусть

$$a = (a_1, \ldots, a_\chi) \in \mathbb{R}^\chi, \quad \sum_{i=1}^{\chi} a_i = 0, \tag{2.5}$$

$$g \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \int\limits_{\Gamma_i} g\, d\Gamma_i = 0, \ \ i = \overline{1, \chi}. \tag{2.6}$$

Основной результат настоящей работы заключается в следующем.

Теорема 2.1. *Пусть выполняются условия (2.5), (2.6). Тогда найдется такое* $\varepsilon > 0$ *(зависящее от* Ω, g *и* a*), что для всех* $F \in V^*$*, удовлетворяющих условию*

$$\|F\|_{V^*} < \varepsilon,$$

существует хотя бы одно решение $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ *задачи (2.3), (2.4).*

3. Вспомогательные результаты

Рассмотрим задачу относительно неизвестной функции G:

$$\Delta G = f \text{ в } \Omega, \quad \nabla G \times \mathbf{n}|_\Gamma = g, \quad \int\limits_{\Gamma_i} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}\, d\Gamma_i = a_i, \quad i = \overline{1, \chi}. \tag{3.7}$$

Лемма 3.1. *Пусть выполняются условия (2.5), (2.6). Пусть*

$$f \in L^2(\Omega), \qquad \int\limits_\Omega f\, d\Omega = 0.$$

Тогда существует единственное решение $G \in H^2(\Omega)$ *задачи (3.7).*

Доказательство проводится по следующей схеме (подробное изложение опускаем ввиду тривиальности).

1) Стандартным образом задача сводится к случаю $g = 0$, $a_i = 0$.

2) Существование обобщенного решения из класса $H^1(\Omega)$ вытекает из теоремы Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве.

3) Поскольку $g = 0$, то функция G постоянная на каждом Γ_i. Тогда $\Delta G \in L^2(\Omega)$, $G|_\Gamma \in C^\infty(\Gamma)$ и, следовательно, $G \in H^2(\Omega)$.

Пусть теперь G — заданная функция из класса $H^2(\Omega)$. Рассмотрим следующее линейное однородное уравнение относительно неизвестной $\mathbf{w} \in V$:

$$\forall \mathbf{v} \in V \qquad \int\limits_\Omega \operatorname{rot} \mathbf{w} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}\, d\Omega + \int\limits_\Omega (\nabla G \times \mathbf{w}) \operatorname{rot} \mathbf{v}\, d\Omega = 0. \tag{3.8}$$

Отметим, что соотношение (3.8) является обобщенной формулировкой задачи

$$\mathbf{rot}\, \operatorname{rot} \mathbf{w} + \mathbf{rot}\, (\nabla G \times \mathbf{w}) + \nabla q = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{3.9}$$

$$\mathbf{w} \times \mathbf{n}|_\Gamma = 0, \quad \int\limits_{\Gamma_i} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}\, d\Gamma_i = 0, \quad q|_{\Gamma_i} = C_i, \quad i = \overline{1, \chi}, \tag{3.10}$$

где неизвестными являются функции $\mathbf{w}$, q и постоянные C_i. Здесь и ниже, если ϕ — скалярная функция, то

$$\mathbf{rot}\, \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right).$$

Покажем, что (3.8) имеет только тривиальное решение. Доказательство будет проведено по следующей схеме.

1) Из (3.9), (3.10) вытекают соотношения

$$\Delta q = 0 \text{ в } \Omega, \quad q|_{\Gamma_i} = C_i, \quad \int\limits_{\Gamma_i} \frac{\partial q}{\partial \mathbf{n}}\, d\Gamma_i = 0, \;\; i = \overline{1, \chi}.$$

Поэтому $q = 0$ в Ω. Следовательно, $\mathbf{rot}\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{w} + \nabla G \times \mathbf{w}) = 0$. Значит, существует такая постоянная C, что

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{w} + \nabla G \times \mathbf{w} = C \text{ в } \Omega. \tag{3.11}$$

2) Так как $\mathbf{w} \in V$, то $\mathbf{w}$ можно представить в виде $\mathbf{w} = \mathbf{rot}\,\phi$, где $\phi \in H^2(\Omega)$. Функция ϕ удовлетворяет уравнениям

$$-\Delta\phi - \nabla G \cdot \nabla\phi = C \text{ в } \Omega, \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{3.13}$$

3) Умножая уравнение (3.12) на функцию e^G и интегрируя по Ω, приходим к выводу $C = 0$. Умножая (3.12) на ϕe^G и интегрируя по Ω, получаем $\phi = 0$.

Приведем теперь строгое обоснование этих рассуждений.

Лемма 3.2. *Пусть $G \in H^2(\Omega)$. Если $\mathbf{w} \in V$ удовлетворяет (3.8), то $\mathbf{w} = 0$ в Ω.*

Доказательство. Положим $\mathbf{H}_0^1(\Omega) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \mathbf{y}|_\Gamma = 0\}$. Докажем, что

$$\forall \mathbf{y} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \qquad \int\limits_\Omega \mathrm{rot}\,\mathbf{w} \cdot \mathrm{rot}\,\mathbf{y}\, d\Omega + \int\limits_\Omega (\nabla G \times \mathbf{w})\, \mathrm{rot}\,\mathbf{y}\, d\Omega = 0. \tag{3.14}$$

Возьмем любую функцию $\mathbf{y} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Согласно лемме 3.1, существует решение $\psi \in H^2(\Omega)$ задачи

$$\Delta\psi = \mathrm{div}\,\mathbf{y} \text{ в } \Omega, \quad \nabla\psi \times \mathbf{n}|_\Gamma = 0, \quad \int\limits_{\Gamma_i} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}\, d\Gamma_i = 0, \;\; i = \overline{1, \chi}.$$

Тогда $(\mathbf{y} - \nabla\psi) \in V$. Выбирая в (3.8) $\mathbf{v} = (\mathbf{y} - \nabla\psi)$, получаем (3.14).

Докажем теперь, что выполняются (3.12), (3.13). Так как для любой $\mathbf{y} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$

$$\int\limits_\Omega (\nabla G \times \mathbf{w})\, \mathrm{rot}\,\mathbf{y}\, d\Omega = \int\limits_\Omega \mathbf{rot}\,(\nabla G \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{y}\, d\Omega,$$

то (3.14) эквивалентно уравнению $\mathbf{rot}\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{w} + \nabla G \times \mathbf{w}) = 0$ в $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$. Следовательно, найдется такая постоянная C, что выполняется (3.11). Поскольку $\mathbf{w} \in V$, то $\mathbf{w}$ можно представить в виде $\mathbf{w} = \mathbf{rot}\,\phi$, где $\phi \in H^2(\Omega)$. Согласно (3.11), функция ϕ удовлетворяет (3.12), а так как $\mathbf{w} \times \mathbf{n}|_\Gamma = 0$, то выполняется (3.13).

Поскольку $G \in H^2(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, то $e^G \in H^2(\Omega)$. Умножим уравнение (3.12) на функцию e^G и проинтегрируем полученное соотношение по Ω. Учитывая, что

$$-\int\limits_\Omega \Delta\phi \cdot e^G \, d\Omega = \int\limits_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla e^G \, d\Omega = \int\limits_\Omega (\nabla\phi \cdot \nabla G) e^G \, d\Omega,$$

получаем

$$C \int\limits_\Omega e^G \, d\Omega = 0.$$

Значит, $C = 0$. Умножим уравнение (3.12) на функцию ϕe^G и проинтегрируем полученное соотношение по Ω. Учитывая, что

$$-\int\limits_\Omega \Delta\phi \cdot \phi e^G \, d\Omega = \int\limits_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla(\phi e^G) \, d\Omega = \int\limits_\Omega e^G |\nabla\phi|^2 \, d\Omega + \int\limits_\Omega (\nabla\phi \cdot \nabla G) \phi e^G \, d\Omega,$$

получаем

$$\int\limits_\Omega e^G |\nabla\phi|^2 \, d\Omega = 0.$$

Следовательно, $\nabla\phi = 0$ и $\mathbf{w} = \mathbf{rot}\,\phi = 0$ в Ω. □

4. Доказательство теоремы 2.1

Следующий результат является тривиальным следствием теоремы о неявно заданной функции.

Теорема 4.1. *Пусть X, Y — банаховы пространства, оператор $A : X \to Y$ непрерывно дифференцируемый. Пусть $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, причем*

$$A(x_0) = y_0.$$

Предположим, что производная $A'(x_0) : X \to Y$ является эпиморфизмом. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого $y \in Y$, удовлетворяющего условию

$$\|y - y_0\|_Y < \varepsilon,$$

существует (хотя бы одно) решение $x \in X$ уравнения

$$A(x) = y.$$

Доказательство теоремы 2.1. Согласно лемме 3.1, существует функция $G \in H^2(\Omega)$ такая, что

$$\Delta G = 0 \text{ в } \Omega, \quad \nabla G \times \mathbf{n}|_\Gamma = g, \quad \int\limits_{\Gamma_i} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} \, d\Gamma_i = a_i, \quad i = \overline{1, \chi}.$$

Будем искать решение $\mathbf{u}$ задачи (2.3), (2.4) в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \nabla G,$$

где $\mathbf{u}_0 \in V$ — новая неизвестная функция. Она должна удовлетворять уравнению

$$A(\mathbf{u}_0) = F, \tag{4.15}$$

где оператор $A : V \to V^*$ действует по формуле

$$\forall \mathbf{u}_0, \mathbf{v} \in V \qquad \langle A(\mathbf{u}_0), \mathbf{v}\rangle = \int\limits_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{u}_0 \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}\, d\Omega + \int\limits_{\Omega} ((\mathbf{u}_0 + \nabla G) \times \mathbf{v}) \operatorname{rot} \mathbf{u}_0\, d\Omega.$$

Если $F = 0$, то уравнение (4.15) имеет тривиальное решение $\mathbf{u}_0 = 0$. Поэтому, согласно теореме 4.1, достаточно доказать, что производная $A'(0) : V \to V^*$ является эпиморфизмом.

Имеем $A'(0) = B_1 + B_2$, где линейные непрерывные операторы $B_1, B_2 : V \to V^*$ действуют по формулам

$$\forall \mathbf{w}, \mathbf{v} \in V \qquad \langle B_1\mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle = \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{w} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}\, d\Omega, \quad \langle B_2\mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle = \int_{\Omega} (\nabla G \times \mathbf{v}) \operatorname{rot} \mathbf{w}\, d\Omega.$$

Из известной оценки [18, 20]

$$\forall \mathbf{v} \in V \qquad \langle B_1(\mathbf{v}), \mathbf{v}\rangle \geq C(\Omega) \cdot \|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$$

вытекает, что оператор B_1 является непрерывно обратимым. Из компактности вложения $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ следует, что отображение B_2 является компактным. Значит, оператор $A'(0) = B_1 + B_2$ является фредгольмовым. Пусть $\mathbf{w} \in \ker((A'(0))^*)$ (принадлежит ядру сопряженного к $A'(0)$ оператора $(A'(0))^*$). Тогда $\mathbf{w} \in V$ и

$$\forall \mathbf{v} \in V \qquad \langle B_1\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle + \langle B_2\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = 0,$$

то есть выполняется (3.8). Применяя лемму 3.2, получаем $\mathbf{w} = 0$. Значит, $(A'(0))^*$ имеет нулевое ядро. Поэтому, согласно альтернативе Фредгольма, оператор $A'(0)$ является эпиморфизмом (более того, он непрерывно обратимый). □

Список литературы

[1] J. Leray, “Etude de diverses équations, integrales non lineaire et de queques problemes que posent l'Hydrodynamique”, *J. Math. Pures Appl.*, **35**:12 (1933), 1–82.

[2] О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, Наука, М., 1970.

[3] V. I. Yudovich, “Eleven great problems of mathematical hydrodynamics”, *Mosc. Math. J.*, **3**:2 (2003), 711–737.

[4] A. Takeshita, “A remark on Leray's inequality”, *Pacific J. Math.*, **157**:1 (1993), 151–158.

[5] А. А. Илларионов, “О возможности обобщения леммы Хопфа на случай уравнений Навье–Стокса с ненулевыми потоками”, *Сиб. матем. журн*, **50**:4 (2009), 831–835.

[6] C. J. Amick, “Existence of solutions to the nonhomogeneous steady Navier – Stokes equations”, *Indiana Univ. Math. J.*, **33**:6 (1984), 817–830.

[7] Л. И. Сазонов, “О существование стационарного симметричного решения двумерной задачи о протекании жидкости”, *Матем. заметки*, **54**:6 (1993).

[8] H. Fujita, “On the stationary solutions to Navier-Stokes equations in simmetric plane domains under general outflow conditions”, *Proceeding of International Conference on Navier – Stokes equations, Theory and Numerical methods, 1997, Varenna, Italy. Pitman Research Notes in Math. 388*, 16–30.

[9] V. V. Pukhnachev, “Viscous flows in domains with a multiply connected boundary”, *New directions in mathematical fluid mechanics, Adv. Math. Fluid Mech., Birkhauser Verlag, Basel,*, 2010, 333–348.

[10] M. V. Korobkov, K. Pileckas, R. Russo, “On the Flux Problem in the Theory of Steady Navier – Stokes Equations with Nonhomogeneous Boundary Conditions”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **207** (2013), 185–213.

[11] H. Fujita, H. Morimoto, “A remark on the existence of steady Navier – Stokes flow with non-vanishing outflow conditions”, *Gakuto International Series in Math. Science and Appl., Nonlinear Waves,*, **10** (1997), 53–61.

[12] H. Morimoto, “Note on the boundary value problem for the Navier–Stokes equations in 2–D domain with general outfllow condition (in Japanese)”, *Memoirs of the Institute of Science and Technology, Meiji University*, **35** (1997), 95–102.

[13] H. Morimoto, “General outflow condition for Navier–Stokes system”, *In “Recent Topics on Mathematical Theory of Viscous Incompressible fluid”, Lectures Notes in Num. Appl. Anal.*, **16** (1998), 209–224.

[14] A. Russo, G. Starita, “On the existence of steady-state solutions to the Navier–Stokes system for large fluxes”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **7** (2008), 171–180.

[15] В. В. Рагулин, “К задаче о протекании вязкой жидкости сквозь ограниченную область при заданном перепаде давления или напора”, *Динамика сплошной среды.*, 1976, № 27, 78–92.

[16] C. Bègue, C. Conca, F. Murat, O. Pironneau, “A nouveau sur les équations de Stokes et de Navier-Stokes avec des conditions aux limites sur la pression”, *C. R. Acad. Sc. Paris. Série I.*, **304**:2 (1987), 23–28.

[17] А. Ю. Чеботарев, “Субдифференциальные краевые задачи для стационарных уравнений Навье – Стокса”, *Дифференц. уравнения*, **28**:8 (1992), 1443–1450.

[18] C. Conca, F. Murat, O. Pironneau, “The Stokes and Navier-Stokes equation with boundary conditions involving the pressure”, *Japan J. Math.*, **20**:2 (1994), 279–318.

[19] А. А. Илларионов, А. Ю. Чеботарев, “О разрешимости смешанной краевой задачи для стационарных уравнений Навье – Стокса”, *Дифференц. уравнения*, **37**:5 (2001), 689–695.

[20] А. А. Илларионов, “О разрешимости краевых задач для стационарных уравнений Навье – Стокса”, *Дальневосточный матем. журн.*, **2**:1 (2001), 16–36.

[21] А. А. Илларионов, “Существование стационарного симметричного решения двумерных уравнений Навье – Стокса с заданным напором и ненулевыми потоками”, *Дифференц. уравнения*, **45**:8 (2009), 1116–1125.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 10 апреля 2015 г.

Работа второго автора выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований ДВО РАН (проект 15-I-4-075) и РФФИ (проект 14-01-00781)

A. A. Illarionov, L. V. Illarionova The stationary solutions to the two-dimensional Navier-Stokes equation for large fluxes. Far Eastern Mathematical Journal. 2015. V. 15. № 1. P. 61–69.

ABSTRACT

We prove some results concerning with solvability of stationary homogeneous incompressible 2D Navier-Stokes equations with non-zero fluxes.
Key words: *Navier-Stokes equations, Leray problem.*