Дальневосточный математический журнал. 2015. Том 15. № 1. С. 76–90

УДК 539.3
MSC2010 74B20, 74J40, 74J30, 74H10

© В. Е. Рагозина, Ю. Е. Иванова[1]

Эволюционные уравнения задач интенсивного деформирования упругих неоднородных сред

Для модели нелинейно упругой среды с неоднородными свойствами, представленными непрерывным изменением упругих модулей и плотности, рассмотрены задачи о движении плоской продольной или поперечной ударной волны. Изменение свойств среды предполагается в направлении движения волновых фронтов. Метод сращиваемых асимптотических разложений позволяет определить эволюционные уравнения задач, отражающие совместно и нелинейность волнового процесса, и неоднородность среды. Наиболее интересный вариант эволюционного уравнения имеет место, когда интенсивность ударного процесса и малая неоднородность одного порядка. При этом переход к предельной внутренней задаче метода малого параметра диктуется цепочкой внутренних задач, при решении которых оказывается необходимым изменение всех независимых переменных и их масштабов.

Ключевые слова: *нелинейная упругая среда, неоднородность, ударные волны, объемное и сдвиговое деформирование, эволюционное уравнение.*

1. Введение

Свойствам ударных волн в нелинейно упругих средах посвящено большое число исследований [1, 2, 3]. Из них хорошо известно, что в общем случае механизм образования и последующего движения поверхностей сильных разрывов зависит от свойств упругой среды, от наличия в ней предварительных деформаций, от интенсивности разрыва, а также от послеударного воздействия на границе [1, 2, 3]. Скорости ударных волн и геометрия этих поверхностей за исключением простейших краевых задач тоже входят в число неизвестных величин, поэтому краевые условия — следствия законов сохранения ставятся на поверхностях с заранее неизвестным положением. Наконец, по своему типу ударные волны в твердом теле

[1]Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, 690041, Владивосток, ул. Радио, 5. Электронная почта: `ragozina@vlc.ru, ivanova@iacp.dvo.ru`

перестают быть чисто продольными или поперечными и приобретают смешанный характер [2, 3].

В качестве теоретического метода исследования обобщенных решений для задач динамики с поверхностями разрывов деформаций необходимо в первую очередь указать метод малого параметра [4, 5, 6]. В частности, это могут быть такие его варианты, как метод сращиваемых асимптотических разложений [4] или же метод лучевых рядов [7, 8]. Лучевые ряды в качестве прифронтовой асимптотики в окрестности волновых поверхностей строятся на основе известных свойств решений динамических задач, связанных с преобладанием изменений полей перемещений, деформаций, напряжений в направлении нормали к волновому фронту. Вариант лучевого метода [8] оказался наиболее эффективным, в нем используется представление решения рядом типа ряда Тейлора по времени в окрестности подвижной точки волнового фронта, а коэффициентами этого ряда являются разрывы производных по времени произвольного порядка от искомой функции. Первоначально считалось, что наличие ударных волн становится фактором, исключающим возможность применения лучевого метода, так как этот метод теряет свои рекуррентные свойства. Включение в лучевые разложения дополнительных внутренних рядов, предложенное в [9, 10], сняло это ограничение. Применение лучевых рядов имеет как положительные, так и отрицательные стороны. В частности, с одной стороны, лучевое решение имеет сравнительно простую форму, с другой стороны, область применения этого решения ограничена прифронтовой окрестностью ударной волны. Дополнительная проблема — вычисление большого числа слагаемых лучевого ряда обязательно связано с очень громоздкими вычислениями.

Как альтернативный вариант здесь можно рассматривать метод сращиваемых асимптотических разложений. Этот метод не ограничивает решение только степенными зависимостями от временной координаты. Анализ основного, внешнего [4] разложения позволяет указать те пространственно-временные области, где нелинейность является доминирующим фактором. Одновременно для этих областей оказывается возможным определить нелинейное эволюционное уравнение, более простое, чем исходные уравнения задачи, но сохраняющее основные свойства нелинейного волнового процесса. К примеру, для плоских продольных ударных волн этим уравнением будет уравнение Коула–Хопфа [11]. В [12] показано, что для чисто поперечных плоских волн в несжимаемой упругой среде уравнение Коула–Хопфа определяет изменение квадрата интенсивности волнового процесса. Учет дополнительного свойства среды — вязкости — приводит к уравнению Бюргерса [13] для продольных волн деформации и к модификации уравнения Бюргерса [14] для поперечных волн.

Перечисленные эволюционные уравнения возникают при изучении плоских одномерных волновых процессов в нелинейно упругих средах на достаточно больших расстояниях от нагружаемой границы. Для массивов большой протяженности дополнительным фактором, влияющим на волновой деформационный процесс, может стать неоднородность свойств среды в направлении движения ударной волны. Среды, неоднородные по свойствам, рассматривались в [15]. Неоднородность может проявляться очень разнообразно. В настоящей статье авторы рассматривают всего один вариант — слабую неоднородность степенного типа. Уже в этом случае показано, что учет факторов нелинейности связи напряжений–деформаций и неоднородности упругих свойств может приводить к различным вариантам эволюционного уравнения. Возникают интересные ситуации, когда переход к эволюционному уравнению возможен только при совместном изменении обеих независимых переменных. Далее на примере ряда наиболее простых модельных задач авторы показывают многообразие возникающих решений.

2. Общие модельные соотношения нелинейно-упругой неоднородной среды и краевые условия на поверхностях разрыва деформаций

Дальнейшее изложение проводим для декартовой пространственной системы координат x_1, x_2, x_3, применяя метод Эйлера для описания движения сплошной среды. Общая система уравнений, задающая свойства и динамику нелинейно упругой изотропной сжимаемой среды, имеет вид [16]

$$
\begin{gathered}
v_i = \dot{u}_i + u_{i,j}v_j, \qquad \rho = \rho_0 \det(\delta_{ij} - u_{i,j}), \qquad \alpha_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}), \\
\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}}(\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), \qquad \sigma_{ij,j} = \rho(\dot{v}_i + v_{i,j}v_j), \qquad (1) \\
W(I_1, I_2, I_3) = \frac{\lambda}{2}I_1^2 + \mu I_2 + lI_1I_2 + mI_1^3 + nI_3 + ..., \\
I_1 = \alpha_{ii}, \qquad I_2 = \alpha_{ij}\alpha_{ji}, \qquad I_3 = \alpha_{ij}\alpha_{jk}\alpha_{ki}, \qquad \dot{u}_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \qquad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.
\end{gathered}
$$

Здесь ρ_0 и ρ — плотность среды в свободном и текущем состояниях, u_i и v_i — компоненты векторов перемещения и скорости среды, α_{ij} — компоненты тензора деформаций Альманси, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений Эйлера–Коши, W — функция упругого потенциала, заданная рядом Тейлора в окрестности свободного состояния для случая адиабатического приближения, λ, μ, l, m, n — упругие модули среды, причем первые два — параметры Ламе. В уравнениях (1) и далее принято суммирование по повторяющимся индексам.

Если рассматривается несжимаемая нелинейно упругая изотропная среда, то в системе (1) для функций ρ, σ_{ij} и W необходимо принять соотношения

$$
\begin{gathered}
\rho = \rho_0, \qquad \sigma_{ij} = -p_0\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_{ik}}(\delta_{kj} - 2\alpha_{kj}), \qquad (2) \\
W = (a-\mu)I_1 + aI_2 + bI_1^2 - \kappa I_1I_2 - \theta I_1^3 + cI_1^4 + dI_2^2 + \nu I_1^2 I_2 + \dots,
\end{gathered}
$$

где p_0 — неизвестная функция добавочного гидростатического давления, $\mu, a, b, \kappa, \theta, c, d, \nu$ — упругие модули среды.

Предполагая, что краевые условия задачи могут привести к образованию ударной волны, необходимо перечислить те условия, которые должны выполняться на волне для обобщенного решения. Интегральные законы сохранения массы, импульса и энергии сводятся к динамическим условиям совместности разрывов [17]

$$[\rho(v_i n_i - G)] = 0, \quad [\sigma_{ij}]n_j = \rho^+(v_j^+ n_j - G)[v_i], \tag{3}$$
$$\sigma_{ij}^+[v_i]n_j = \rho^+(v_j^+ n_j - G)\left\{\frac{[v_i][v_i]}{2} + [e]\right\} - [q_j]n_j,$$

которые необходимо дополнить геометрическими и кинематическими условиями совместности

$$[f_{,i}] = \left[\frac{df}{dn}\right] n_i + a^{\alpha\beta}[f]_{,\alpha} x_{i,\beta}, \qquad [\dot{f}] = -G\left[\frac{df}{dn}\right] + \frac{\delta[f]}{\delta t}, \tag{4}$$
$$x_{i,\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial y^\alpha}, \quad a_{\alpha\beta} = x_{i,\alpha} x_{i,\beta}, \quad a^{\alpha\beta} a_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha, \quad x_{i,\alpha} n_i = 0, \quad n_i n_i = 1, \quad [f] = f^+ - f^-.$$

В уравнениях (3), (4) G — скорость движения ударной волны в направлении единичной внешней нормали с компонентами n_i, e — плотность внутренней энергии, q_j — компоненты вектора теплового потока, f — компонента любого тензорного поля, заданного в пространстве. Индексы «+» и «-» означают предельные значения величины f, вычисленные перед ударной волной и сразу за ней. В формулах (4) y^α ($\alpha = 1,\ 2$) — координаты на поверхности волны, $a_{\alpha\beta}$ — ковариантные компоненты метрического тензора поверхности, $\delta/\delta t$ — дельта-производная по Томасу [17, 18] — производная по времени для функции, заданной в данной точке подвижной поверхности.

Относительно констант упругой среды сделаем дополнительное предположение, считая, что они имеют слабую зависимость от координаты x_1, то есть

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon^k \tilde{\lambda}_1 s^j, \qquad \mu = \mu_0 + \varepsilon^k \tilde{\mu}_1 s^j, \qquad \rho_0 = \tilde{\rho}_0 + \varepsilon^k \tilde{\rho}_1 s^j, \qquad l = l_0 + \varepsilon^k \tilde{l}_1 s^j, \tag{5}$$
$$m = m_0 + \varepsilon^k \tilde{m}_1 s^j, \quad n = n_0 + \varepsilon^k \tilde{n}_1 s^j, \quad s = \frac{x_1}{C_1 T}, \quad C_1 = \sqrt{\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\tilde{\rho}_0}}, \quad k > 0,\ j > 0,$$

где $\lambda_0, \tilde{\lambda}_1, \mu_0, \tilde{\mu}_1, \tilde{\rho}_0, \tilde{\rho}_1, l_0, \tilde{l}_1, m_0, \tilde{m}_1, n_0, \tilde{n}_1$ — константы, C_1 — скорость продольных упругих волн в линейном приближении с исключенной неоднородностью среды, T и $C_1 T$ — характерное время и характерное расстояние, $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр задачи, конкретный вид которого будет определен позже. Формулы (5) соответствуют слабой степенной неоднородности в направлении оси x_1. Формулы, подобные (5), должны быть приняты и для констант несжимаемой нелинейно упругой среды.

3. Плоская продольная ударная волна в неоднородной среде

Рассматриваем нелинейно упругое предварительно недеформированное полупространство $x_1 \geq 0$. Начиная с момента $t = 0$ на его границе под действием приложенной нагрузки известны перемещения

$$u_1\Big|_{x_1=f_0(t),\,t\geq 0}=f_0(t),\qquad u_2\Big|_{x_1=f_0(t),\,t\geq 0}=u_3\Big|_{x_1=f_0(t),\,t\geq 0}=0,\qquad f_0'(0)>0. \tag{6}$$

Такие перемещения границы приводят к мгновенному образованию ударной волны. Перемещения точек среды сводятся к $u_1=u_1(x_1,t)$, $u_2=u_3=0$. При этом ударная волна становится чисто продольной [2], для ее скорости из уравнений (1), (3)–(5) получим формулу

$$G_1^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}\left\{1+\left(1-\frac{\alpha}{\lambda+2\mu}\right)\tau_1+\ldots\right\}, \tag{7}$$

$$\tau_1=[u_{1,1}]=-u_{1,1}^-,\qquad \alpha=-\frac{7}{2}(\lambda+2\mu)+3(l+m+n),$$

в которой многоточием обозначены невыписанные слагаемые с более высоким порядком малости по степеням интенсивности τ_1. На переднем фронте ударной волны должны быть выполнены краевые условия

$$u_1\Big|_{x_1=\int\limits_0^t G_1(\xi)d\xi}=0,\qquad \tau_1=u_{1,1}^-\Big|_{x_1=\int\limits_0^t G_1(\xi)d\xi}. \tag{8}$$

Следствием общей системы уравнений (1), (5) будет следующее уравнение движения:

$$\begin{gathered}(\lambda+2\mu+2\alpha u_{1,1})\,u_{1,11}+((\lambda+2\mu)_{,1}+\alpha_{,1}u_{1,1})\,u_{1,1}+\ldots=\\ =\frac{\rho_0}{(1-u_{1,1})^2}\left\{\ddot u_1(1-2u_{1,1})+2\dot u_{1,1}\dot u_1\right\}+\ldots\quad .\end{gathered} \tag{9}$$

Для решения краевой задачи (6)–(9) во внешней области определим безразмерные переменные формулами

$$s=\frac{x_1}{C_1T},\qquad m=\frac{t}{T},\qquad w(s,m)=\varepsilon^{-1}\frac{u_1(x_1,t)}{C_1T}, \tag{10}$$

которые означают относительную малость перемещений задачи, задаваемую параметром ε. Малый параметр ε далее в задаче считаем основным, а малую неоднородность задаем сравнительно с малым воздействием на границе, что позволяет решать задачу без обращения к рядам с двумя малыми параметрами.

Как вариант рассмотрим решение задачи при $k=2$, $j=1$ в формулах (5). В этом случае уравнение (9) в переменных (10) принимает вид

$$\begin{gathered}w_{,ss}\left(1+\alpha_0\varepsilon w_{,s}+\alpha_1\varepsilon^2 s+2\alpha_2\varepsilon^3 s w_{,s}\right)+\\ +\varepsilon^2 w_{,s}(\alpha_1+(\alpha_2-\alpha+1)\varepsilon w_{,s})+\ldots=\\ =(1+\varepsilon^2\rho_1 s)(w_{,mm}(1-2\varepsilon w_{,s})+2\varepsilon w_{,m}w_{,ms})+\ldots,\end{gathered} \tag{11}$$

$$\alpha_0=-9+6\frac{l_0+m_0+n_0}{\lambda_0+2\mu_0},\qquad \alpha_1=\frac{\tilde\lambda_1+2\tilde\mu_1}{\lambda_0+2\mu_0},\qquad \rho_1=\frac{\tilde\rho_1}{\tilde\rho_0},$$

$$2\alpha_2=-9\frac{\tilde\lambda_1+2\tilde\mu_1}{\lambda_0+2\mu_0}+6\frac{\tilde l_1+\tilde m_1+\tilde n_1}{\lambda_0+2\mu_0}.$$

Краевое условие (6) представим как

$$w(s,m)|_{s=\varepsilon f(m)} = f(m). \tag{12}$$

Неизвестную функцию $w(s,m)$ зададим асимптотическим рядом по степеням малого параметра:

$$w(s,m) = w_0(s,m) + \varepsilon w_1(s,m) + \varepsilon^2 w_2(s,m) + \ldots \quad .$$

Подставляя его в уравнение (11) и краевое условие (12), получим внешнее [4] решение

$$w(s,m) = f(\xi) + \varepsilon \left\{ -\frac{\alpha_0}{4} \left(f'(\xi)\right)^2 s + f'(\xi) f_1(\xi) \right\} + \ldots, \qquad \xi = m - s \geq 0, \tag{13}$$

в котором приведены только те слагаемые, которые позволяют определить область внутреннего решения. В рассматриваемом случае отметим, что неоднородные свойства среды сказываются на внешнем решении, начиная с $w_2(s,m)$. Решение (13) не может быть использовано для выполнения краевых условий (7). За их выполнение отвечает новое, внутреннее решение. Так как ряд (13) при $\xi \sim 1$ теряет равномерность при $s \sim \varepsilon^{-1}$, то переменными внутреннего решения выберем

$$n = \varepsilon s, \qquad p = s - m, \qquad w = w(p,n). \tag{14}$$

Предполагая представление $w(p,n)$ рядом по степеням ε и записывая уравнение (11) в переменных (14), на нулевом шаге метода малого параметра получим нелинейное уравнение

$$v_{0,n} + \left(\frac{\alpha_0}{2} v_0 + \gamma n\right) v_{0,p} = 0, \qquad v_0 = w_{0,p}, \qquad \gamma = \frac{\alpha_1 - \rho_1}{2}, \tag{15}$$

которое назовем эволюционным уравнением для рассматриваемого баланса нелинейности и неоднородности. Оно переходит в уравнение Коула−Хопфа [11] при $\alpha_1 = \rho_1 = 0$. Переход к этому уравнению оказался возможен только за счет изменения масштаба координаты s. Отметим, что последнее слагаемое уравнения (15) связано с разложением в ряд Тейлора величины

$$\tilde{C}_1 = C_1 \sqrt{\frac{1 + \alpha_1 \varepsilon s}{1 + \rho_1 \varepsilon s}} = C_1 \left(1 + \gamma \varepsilon s + \ldots\right) = C_1 \left(1 + \gamma n + \ldots\right).$$

В уравнении (15) видно, что тангенс угла наклона характеристик уравнения определяется аддитивно нелинейными слагаемыми и слагаемыми, обусловленными неоднородностью. Вдоль характеристик уравнения (15) еще не происходит искажение исходного импульса и общее решение задается как

$$v_0 = F_0 \left(p - \frac{\alpha_0}{2} v_0 n - \frac{\gamma}{2} n^2\right), \tag{16}$$

то есть характеристики уравнения (15) в плоскости p, n — семейство парабол. Для определения положения переднего фронта продольной ударной волны из уравнения эйконала $t = \int\limits_0^{x_1} G_1^{-1}(y)dy$ в переменных p, n получим такое обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dp_0}{dn} = \frac{\alpha_0}{4} v_0(p_0(n),\, n) + \gamma n, \qquad p_0(0) = 0, \tag{17}$$

где $p(n) = p_0(n) + \varepsilon p_1(n) + \ldots$ — асимптотический ряд, связывающий координаты p, n на ударной волне. Из уравнения (17) следует, что в данном случае отклонение ударной волны от характеристики определяется только нелинейным фактором. В качестве достаточно простого конкретного примера рассмотрим граничные перемещения, для которых $f_0(t) = vt + \dfrac{at^2}{2}$. Для них условие (12) переходит в условие

$$w(s,m)\Big|_{s=\varepsilon\left(m+\frac{Am^2}{2}\right)} = m + \frac{Am^2}{2}, \qquad \varepsilon = \frac{v}{C_1}, \qquad A = \frac{aT}{v}. \tag{18}$$

Внешнее решение нетрудно получить на основе ряда (13). В качестве внутреннего решения из общего соотношения (16) выберем следующий частный вариант:

$$v_0(p,n) = \frac{B_1 + B_2 p - \dfrac{B_2\gamma}{2} n^2}{1 + \dfrac{B_2\alpha_0 n}{2}}, \tag{19}$$

где B_1, B_2 — неизвестные константы. Тогда для функции $w_0(p,n)$ получим

$$w_0(p,n) = \frac{B_2 p^2}{2\left(1 + B_2\dfrac{\alpha_0 n}{2}\right)} + \frac{\left(B_1 - \dfrac{B_2\gamma}{2} n^2\right) p}{1 + B_2\dfrac{\alpha_0 n}{2}} + \varphi_0(n),$$

где $\varphi_0(n)$ — неизвестная функция. Функцию $v_0(p,n)$ из (19) подставляем в уравнение (17) с учетом краевого условия $p_0(0) = 0$, что позволяет записать для положения ударной волны

$$p_0(n) = \frac{2\gamma N^2}{B_2^2\alpha_0^2} - \frac{4\gamma N}{B_2^2\alpha_0^2} + \frac{B_1\sqrt{N}}{B_2} + \frac{2\gamma}{B_2^2\alpha_0^2} - \frac{B_1}{B_2}, \qquad N = 1 + \frac{B_2\alpha_0 n}{2}. \tag{20}$$

В формуле (20) переход к решению для однородной среды происходит при $\gamma = 0$. Неизвестная функция $\varphi_0(n)$ должна быть определена условием (8) в переменных $p, n, w(p,n)$, то есть $w_0(p,n)\Big|_{p=p_0(n)} = 0$, поэтому окончательно получим

$$w_0(p,n) = \frac{B_2(p^2 - p_0^2(n))}{2\left(1 + B_2\frac{\alpha_0 n}{2}\right)} + \frac{\left(B_1 - \frac{B_2\gamma}{2} n^2\right)(p - p_0(n))}{1 + B_2\frac{\alpha_0 n}{2}},$$

где $p_0(n)$ задается уравнением (20). Сопоставление внешнего и внутреннего решений определяет неизвестные константы: $B_1 = -1,\ B_2 = A$.

В качестве общего, более универсального метода решения эволюционного уравнения (15), чем определение его в частном случае, укажем возможность параметрического представления решения, подробно рассмотренную в [12] для однородных сред.

4. Эволюционное уравнение продольной ударной волны для среды с одинаковым порядком малости неоднородности и граничного импульса

Для краевой задачи, рассмотренной выше, предположим в формулах (5), что $k = j = 1$. Тогда в основных переменных (10) получим такое внешнее решение:

$$w(s,m) = f(\xi) + \varepsilon\left\{f(\xi)f'(\xi) + \frac{\gamma}{2}f''(\xi)(\xi+s)s - \right.$$
$$\left. - \left[\frac{\gamma}{2}(f'(\xi)\xi - f(\xi)) + \frac{\alpha_1}{2}f(\xi) + \frac{\alpha_0}{4}(f'(\xi))^2\right]s\right\} + \ldots \quad .$$

Очевидно, что для него неравномерность возникает впервые при $\xi \sim 1$, $s \sim \varepsilon^{-1/2}$ и связана только со свойством неоднородности. Новое внутреннее решение определим в переменных

$$\sigma = \varepsilon^{1/2}s, \qquad p = s - m, \qquad w(p,\sigma),$$

для которых уравнение движения задачи переходит в соотношение

$$(w_{,pp} + 2\varepsilon^{1/2}w_{,\sigma p} + \varepsilon w_{,\sigma\sigma})\{1 + \alpha_0\varepsilon(w_{,p} + \varepsilon^{1/2}w_{,\sigma}) + \alpha_1\varepsilon^{1/2}\sigma + 2\alpha_2\varepsilon^{3/2}\sigma(w_{,p} + \varepsilon^{1/2}w_{,\sigma})\} +$$
$$+\varepsilon(w_{,p} + \varepsilon^{1/2}w_{,\sigma})\left\{\alpha_1 + \varepsilon(w_{,p} + \varepsilon^{1/2}w_{,\sigma})(\alpha_2 - \alpha_1)\right\} + \ldots = \tag{21}$$
$$= (1 + \varepsilon^{1/2}\sigma\rho_1)\left\{w_{,pp}(1 - 2\varepsilon(w_{,p} + \varepsilon^{1/2}w_{,\sigma})) + 2\varepsilon w_{,p}(w_{,pp} + \varepsilon^{1/2}w_{,\sigma p})\right\} + \ldots \quad .$$

Его решение представим рядом вида

$$w(\sigma,p) = w_0(\sigma,p) + \varepsilon^{1/2}w_1(\sigma,p) + \varepsilon w_2(\sigma,p) + \ldots \quad .$$

Из уравнения (21) на каждом шаге внутреннего решения получим такое волновое уравнение

$$v_{i,\sigma} + \gamma\sigma v_{i,p} = H_i(\sigma,p), \qquad H_0 = 0, \qquad v_i = w_{i,p}, \tag{22}$$

в котором $H_i(\sigma,p)$ — функция, определяемая предыдущими шагами метода. Для характеристик уравнения (22) и положения ударной волны в нулевом приближении получим общее соотношение

$$\frac{dp_0}{d\sigma} = \gamma\sigma, \qquad p_0(\sigma) = \frac{\gamma\sigma^2}{2},$$

поэтому

$$w_0(\sigma,p) = \int\limits_0^z v_0(\xi)d\xi, \quad z = p - \frac{\gamma\sigma^2}{2},$$

функции последующих шагов определяются без труда из уравнения (22). Это уравнение показывает необходимость уточнения на расстояниях $s \sim \varepsilon^{-1/2}$ искривления полухарактеристик за счет неоднородности. Сравнение $w_1(\sigma, p)$ и $w_0(\sigma, p)$ диктует следующее сжатие масштаба и изменение полухарактеристики:

$$z = p - \frac{\gamma}{2}\sigma^2, \qquad y = \varepsilon^{1/6}\sigma, \qquad w = w(z, y), \tag{23}$$
$$w(z, y) = w_0(z, y) + \varepsilon^{1/3}w_1(z, y) + \varepsilon^{2/3}w_2(z, y) + \ldots,$$

причем заметим, что $y = \varepsilon^{1/6}\sigma = \varepsilon^{2/3}s$. Уравнение движения для переменных (23) здесь не приводим ввиду его громоздкости. Укажем, что на нулевом шаге из него получаем уравнение

$$v_{0,y} - \frac{(3\alpha_1 + \rho_1)}{4}\gamma y^2 v_{0,z} = 0, \qquad v_0 = w_{0,z},$$

решением которого будет функция

$$v_0 = F_0(\zeta) = F_0\left(z + \frac{(3\alpha_1 + \rho_1)}{4}\gamma\frac{y^3}{3}\right).$$

Очередное сжатие координаты $y = \varepsilon^{2/3}s$ одновременно привело к изменению полухарактеристики, которая теперь задается формулой

$$\zeta = s - m - \frac{\gamma}{2}\varepsilon s^2 + \frac{(3\alpha_1 + \rho_1)\gamma}{12}\varepsilon^2 s^3 + \ldots = const.$$

Два рассмотренных выше сжатия координаты s ($\sigma = \varepsilon^{1/3}s$, $y = \varepsilon^{2/3}s$) приводят к гиперболическим уравнениям для $w_0(p, \sigma)$ или $w_0(p, y)$, причем эти уравнения указывают на необходимость учета в полухарактеристике p новых слагаемых, обусловленных неоднородностью среды (координаты z и ζ соответственно). Очевидно, что рассматривая последовательно внутренние задачи со сжатием координаты s в $\dfrac{k}{k+1}$ раз, в пределе при $k \to \infty$ приходим к внутренней задаче с переменными

$$r = s - m - \sum_{k=1}^{\infty} A_k \varepsilon^k s^{k+1}, \qquad n = \varepsilon s, \qquad w = w(r, n), \tag{24}$$

где константы A_k можем считать известными и вычисленными последовательно на k-м шаге сжатия координаты s. Предположим, что для ряда, входящего в формулы (24), выполняется следующая связь с функцией $\Psi(n)$:

$$\Psi(n) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} A_k(k+1)n^k, \qquad \Psi'(n) = -\sum_{k=1}^{\infty} A_k k(k+1)n^{k-1}. \tag{25}$$

Тогда уравнение движения с учетом формул (24), (25) переходит в соотношение

$$\left(\varepsilon^2 w_{,nn} + 2\varepsilon w_{,rn}\Psi(n) + w_{,rr}\Psi^2(n) + \varepsilon w_{,r}\Psi'(n)\right)\{1 + \alpha_1 n + \alpha_0\varepsilon W + 2\alpha_2 n\varepsilon W\} +$$
$$+ \varepsilon W\{\alpha_1 + \varepsilon(\alpha_2 - \alpha_1)W\} + \ldots = (1 + \rho_1 n)\{w_{,rr}(1 - 2\varepsilon W) + 2\varepsilon w_{,r}W_{,r}\} + \ldots, \tag{26}$$

$$W(r,n) = w_{,r}\Psi(n) + \varepsilon w_{,n}.$$

Представляя неизвестную функцию $w(r,n)$ асимптотическим рядом по целым степеням малого параметра, из формулы (26) для наименьшей степени ε получим уравнение

$$w_{0,rr}\left\{\Psi^2(n)(1+\alpha_1 n) - (1+\rho_1 n)\right\} = 0,$$

из которого следует, что $\Psi(n) = \pm\sqrt{(1+\rho_1 n)(1+\alpha_1 n)^{-1}}$, причем для нашей задачи здесь необходимо оставить «+» . Рассматривая эту функцию при $n=\varepsilon s,\ s\sim 1$ и раскладывая ее в ряд Тейлора, получим

$$\Psi(\varepsilon s) = 1 - \gamma\varepsilon s + \gamma\frac{\rho_1+3\alpha_1}{4}\varepsilon^2 s^2 + \ldots,$$

то есть найденный вид $\Psi(n)$ согласуется с проведенными раньше сжатиями масштаба s. Формулы (24) содержат интеграл от $\Psi(n)$, для которого имеет место представление

$$\Phi(n) = \int\sqrt{\frac{1+\rho_1 n}{1+\alpha_1 n}}dn = \frac{1}{\alpha_1}\sqrt{(1+\rho_1 n)(1+\alpha_1 n)} + \frac{\gamma}{\alpha_1}H(n) + K,$$

$$H(n) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{-\alpha_1\rho_1}}\operatorname{arctg}\sqrt{-\frac{\rho_1}{\alpha_1}\frac{1+\alpha_1 n}{1+\rho_1 n}}, & \alpha_1\rho_1 < 0 \\ \frac{2}{\sqrt{\alpha_1\rho_1}}\operatorname{arth}\sqrt{\frac{\rho_1}{\alpha_1}\frac{1+\alpha_1 n}{1+\rho_1 n}} = \frac{\ln\left(\sqrt{\alpha_1(1+\rho_1 n)}+\sqrt{\rho_1(1+\alpha_1 n)}\right)}{2\sqrt{\alpha_1\rho_1}}, & \alpha_1\rho_1 > 0, \end{cases}$$

в котором K определяется условием $\Phi(0)=0$. Подставляя найденную функцию $\Psi(n)$ в соотношение (26), на нулевом шаге метода получим эволюционное уравнение для перемещений

$$v_{0,n} + v_{0,r}v_0\frac{\Psi^2(n)(\alpha_0+2\alpha_2 n)}{2(1+\alpha_1 n)} + v_0\left(\frac{\alpha_1}{2(1+\alpha_1 n)} + \frac{\Psi'(n)}{2\Psi(n)}\right) = 0, \tag{27}$$
$$v_0 = w_{0,r}.$$

В нем отражены все факторы, влияющие на прифронтовое поле перемещений, в том числе присутствует и искажение исходного импульса за счет неоднородной среды. Общее решение уравнения (27) строится вдоль характеристик

$$V_0(r,n) = F\left(r - \frac{V_0(r,n)}{2}\int\limits_0^n\sqrt[4]{\frac{(1+\rho_1\xi)^3}{(1+\alpha_1\xi)^9}}(\alpha_0+2\alpha_2\xi)d\xi\right), \tag{28}$$
$$V_0(r,n) = v_0(r,n)\sqrt{\Psi(n)(1+\alpha_1 n)},$$

причем конкретный вид функции F устанавливается сравнением с внешним решением. Одновременно для функции $r(n) = r_0(n) + \varepsilon r_1(n) + \ldots$, связывающей координаты r и n на ударной волне, на нулевом шаге метода выполняется уравнение

$$\frac{dr_0}{dn} = \left(\frac{\alpha_0}{4} + \frac{\alpha_2}{2}n\right)\frac{\Psi^2(n)}{1+\alpha_1 n}v_0(r_0(n),n), \tag{29}$$

показывающее, что ударная волна и характеристики уравнения (27) имеют тангенсы угла наклона, отношение которых равно 1/2. Для краевой задачи с граничным условием (18) из соотношений (28), (29) получим такое частное решение:

$$w_0(r,n) = \frac{-r + Ar^2/2 + r_0(n) - Ar_0^2(n)/2}{\sqrt{\Psi(n)(1+\alpha_1 n)}\left(1 + \dfrac{A}{2}P(n)\right)}, \tag{30}$$

$$r_0(n) = \frac{1}{A} - \sqrt{\frac{1}{A} + P(n)}, \qquad P(n) = \int\limits_0^n \sqrt[4]{\frac{(1+\rho_1\xi)^3}{(1+\alpha_1\xi)^9}}(\alpha_0 + 2\alpha_2\xi)d\xi.$$

Отметим, что $P(n)$ не сводится к элементарным функциям, координата r имеет сложную зависимость от исходных переменных, поэтому простота решения (30) носит чисто внешний характер. Проведенный анализ может быть применен и к случаю, когда в формулах (5) $k = j = 2$ (с изменением вида $\Psi(n)$), и во многих других ситуациях. Вместе с тем исследование не носит универсального характера, так как, например, возможны ситуации, в которых нелинейность задачи проявляется на расстояниях, где ввиду неоднородности уже произошло сильное затухание исходного импульса и поэтому эволюционное уравнение может потерять свое значение как базовое. Подчеркнем еще раз, что многообразие вида неоднородных свойств среды требует отдельного исследования в каждом случае.

5. О движении плоской поперечной ударной волны в несжимаемой неоднородной среде

В качестве еще одного модельного примера рассмотрим задачу о чисто поперечной ударной волне в несжимаемом полупространстве $x_1 \geq 0$, определяемом системой (1), (2). В момент $t = 0$ при условии отсутствия предварительных деформаций на границе $x_1 = 0$ происходит сдвиговое воздействие, в результате которого известна кинематика граничных точек:

$$u_2\Big|_{x_1=0,\, t\geq 0} = f_0(t), \qquad f_0'(0) > 0. \tag{31}$$

Возникающие в среде перемещения считаем такими: $u_2 = u_2(x_1,t)$, $u_1 = u_3 = 0$. Чисто поперечная ударная волна для нашего случая имеет скорость G_2, определяемую системами (1), (2), (3), (4):

$$G_2^2 = \frac{\mu}{\rho_0}\left(1 + \frac{\beta}{\mu}\tau_2^2 + \ldots\right), \qquad \beta = a + b + \kappa + d, \qquad \tau_2 = [u_{2,1}]\Big|_{x_1=\int\limits_0^t G_2(\xi)d\xi},$$

причем упругие модули μ, a, b, κ, d и плотность ρ_0 задаются формулами (5) с точностью до замены в них C_1 на $C_2 = \sqrt{\mu_0\tilde{\rho}_0^{-1}}$, и мы рассмотрим для упругих модулей вариант неоднородных свойств при $k = 2,\ j = 1$. В этом случае уравнение движения Навье имеет вид

$$\left(\mu + 3\beta u_{2,1}^2\right)u_{2,11} + \left(\mu_{,1} + 3\beta_{,1}u_{2,1}^2\right)u_{2,1} = \rho_0\ddot{u}_2 + \ldots \quad . \tag{32}$$

Кроме краевых условий (31), для него выполняются краевые условия на ударной волне

$$u_2\Big|_{x_1=\int\limits_0^t G_2(\xi)d\xi}=0,\qquad [u_{2,1}]\Big|_{x_1=\int\limits_0^t G_2(\xi)d\xi}=-u_{2,1}^-\Big|_{x_1=\int\limits_0^t G_2(\xi)d\xi}.$$

Аналогично тому, как делалось в задаче о продольной волне деформации, определим безразмерные переменные и функции внешней области:

$$s=\frac{x_1}{C_2T},\qquad m=\frac{t}{T},\qquad w(s,m)=\varepsilon^{-1}\frac{u_2(x_1,t)}{C_2T},\qquad C_2=\sqrt{\frac{\mu_0}{\tilde\rho_0}}=const,$$

причем функцию $w(s,m)$ представим рядом по четным степеням ε:

$$w(s,m)=w_0(s,m)+\varepsilon^2w_2(s,m)+\varepsilon^4w_4(s,m)+\ldots\quad .$$

Из уравнения (32), записанного в переменных (33), для асимптотического ряда функции $w(s,m)$ получим

$$\begin{gathered}w_0(s,m)+\varepsilon^2w_2(s,m)+\ldots=\\=f(\xi)+\varepsilon^2\left\{\frac{\mu_1-\rho_1}{4}f'(\xi)s^2-\frac{\mu_1+\rho_1}{4}f(\xi)s+\frac{\beta_0}{2}(f'(\xi))^3s\right\}+\ldots,\\ \rho_1=\frac{\tilde\rho_1}{\tilde\rho_0},\quad \mu_1=\frac{\tilde\mu_1}{\mu_0},\qquad \beta_0=\frac{a_0+b_0+\chi_0+d_0}{\mu_0},\qquad \xi=m-s,\end{gathered}\tag{33}$$

где $f(\xi)$ соответствует функции $f_0(t)$ в (31) для безразмерного представления. Решение (34) показывает, что его первоначальная неравномерность связана с неоднородностью среды и возникает при $s\sim\varepsilon^{-1}$. Если $s\sim\varepsilon^{-2}$, то влияние будет оказывать и фактор нелинейности модели. В диапазоне от $s\sim\varepsilon^{-1}$ до $s\sim\varepsilon^{-2}$ получаем, как и в предыдущей задаче, цепочку сжатий масштаба (здесь k-му шагу соответствует сжатие порядка $2k/k+1$) и дополняем эту цепочку измененной полухарактеристикой. Опуская подробности, приведем окончательные результаты. Переменными итоговой внутренней задачи выберем

$$n=\varepsilon^2s,\qquad r=s-m-\sum_{k=1}^{\infty}B_k\varepsilon^{2k}s^{k+1},\qquad w=w(r,n),\tag{34}$$

причем определим $\Psi(n)$ формулой $\Psi(n)=1-\sum\limits_{k=1}^{\infty}B_k(k+1)n^k$. Тогда, записывая уравнение движения (32) в переменных (35), получим, во-первых, что $\Psi(n)=\sqrt{(1+\rho_1n)(1+\mu_1n)^{-1}}$. Во-вторых, на нулевом шаге для внутреннего решения получим уравнение вида

$$\begin{gathered}v_{0,n}+v_{0,r}\frac{3v_0^2}{2}\frac{\Psi^3(n)(\beta_0+\beta_1n)}{1+\mu_1n}+\frac{v_0}{2}\left(\frac{\Psi'(n)}{\Psi(n)}+\frac{\mu_1}{1+\mu_1n}\right)=0,\\ \beta_1=\frac{\tilde a_1+\tilde b_1+\tilde\kappa_1+\tilde d_1}{\mu_0},\qquad v_0=w_{0,r},\end{gathered}\tag{35}$$

которое назовем эволюционным уравнением поперечных ударных волн в среде со слабой неоднородностью линейного типа. Это уравнение одновременно показывает зависимость угла наклона характеристик от строящегося решения (квадрат функции v_0), влияние неоднородности и на поле характеристик, и на искажение исходного импульса. Для функции $r_0(n)$, связывающей в нулевом приближении координаты r и n на поперечной волне, получим уравнение вида

$$\frac{dr_0}{dn} = (\beta_0 + \beta_1 n)\frac{v_0^2(r_0(n), n)}{2}\frac{\Psi^3(n)}{1+\mu_1 n}. \tag{36}$$

Из него опять следует, что отношение тангенсов углов наклона ударной волны и пересекающей ее характеристики постоянно, но теперь равно 1/3. Виду ограниченности объема статьи здесь не приводим примеры частных решений (36), укажем только, что методы их получения аналогичны рассмотренным выше.

6. Заключение

Учет неоднородных свойств сплошной среды даже в наиболее простых формах вносит новые интересные особенности как в структуру эволюционных уравнений и их решений, так и в методы их получения. Большая часть примеров, рассмотренных в статье, связана с необходимостью совместного изменения обеих независимых переменных внутренней области, причем итоговые уравнения для полухарактеристик имеют нетривиальный характер. В приведенных задачах итоговое представление внутренних координат диктуется, как предельный случай, цепочкой последовательных сжатий масштаба пространственной координаты. Авторы надеются, что эта методика может оказаться полезной и в других динамических нелинейных задачах. В частности, для случаев движения нескольких упругих волн в сплошной среде с большим расстоянием между фронтами. Эволюционные уравнения, при условии перехода на подвижную поверхность разрывов, приводят к основным соотношениям лучевого метода, поэтому могут быть успешно использованы в качестве дополнительной информации при определении коэффициентов лучевых рядов. Прикладной аспект рассмотренных решений авторы видят в применении их при моделировании новых схем численного счета динамических нестационарных задач.

Список литературы

[1] Д. Бленд, *Нелинейная динамическая теория упругости*, Мир, Москва, 1972, 183 с.

[2] А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова, *Нелинейные волны в упругих средах*, Московский лицей, Москва, 1998, 412 с.

[3] А. А. Буренин, А. Д. Чернышов, “Ударные волны в изотропном упругом пространстве”, *Прикл. математика и механика*, **42**:4 (1978), 711–717.

[4] М. Ван-Дайк, *Методы возмущений в механике жидкости*, Мир, Москва, 1967, 239 с.

[5] Дж. Коул, *Методы возмущений в прикладной математике*, Мир, Москва, 1972, 275 с.

[6] А. Х. Найфе, *Введение в методы возмущений*, Мир, Москва, 1984, 535 с.

[7] J. D. Achenbach, D. P. Reddy, “Note of wave propogation in lineary viscoelastic media”, *ZAMP*, **18**:1 (1967), 141–144.

[8] Л. А. Бабичева, Г. И. Быковцев, Н. Д. Вервейко, “Лучевой метод решения динамических задач в упруговязкопластических средах”, *Прикл. математика и механика*, **37**:1 (1973), 145–155.

[9] А. А. Буренин, Ю. А. Россихин, “Лучевой метод решения одномерных задач нелинейной динамической теории упругости с плоскими поверхностями сильных разрывов”, *Прикладные задачи механики деформируемых сред*, 1991, 129–137.

[10] А. А. Буренин, “Об одной возможности построения приближенных решений нестационарных задач динамики упругих сред при ударных воздействиях”, *Дальневосточный мат. сб.*, 1999, № 8, 49–72.

[11] Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, Москва, 1977, 622 с.

[12] В. Е. Рагозина, Ю. Е. Иванова, “Об эволюционных уравнениях задач ударного деформирования с плоскими поверхностями разрывов”, *Вычислительная механика сплошных сред*, **2**:3 (2009), 82–95.

[13] А. А. Буренин, Ю. А. Россихин, “О влиянии вязкости на характер распространения плоской продольной волны”, *Прикл. механика и техн. физика*, 1990, № 6, 13–17.

[14] Ю. Е. Иванова, “О структуре ударной волны деформаций изменения формы”, *Материалы Всероссийской конференции "Фундаментальные и прикладные вопросы механики посвященной 70-летию со дня рождения академика В.П. Мясникова*, 2006, 52–54.

[15] Ю. Н. Пелиновский, В. Е. Фридман, Ю. К. Энгельбрехт, *Нелинейные эволюционные уравнения*, Валгус, Таллинн, 1984, 164 с.

[16] А. И. Лурье, *Нелинейная теория упругости*, Наука, Москва, 1980, 512 с.

[17] Т. Томас, *Пластическое течение и разрушение в твердых телах*, Мир, Москва, 1964, 308 с.

[18] Г. И. Быковцев, Д. Д. Ивлев, *Теория пластичности*, Дальнаука, Владивосток, 1998, 528 с.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 7 июля 2014 г.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ №14-01-31030-мол_а.

Ragozina V. E., Ivanova Yu. E. The evolution equations of intensive deformation problems of elastic inhomogeneous medium. Far Eastern Mathematical Journal. 2015. V. 15. № 1. P. 76–90.

ABSTRACT

The motion problems of the plane longitudinal or transverse shock wave for the nonlinear elastic medium model with inhomogeneous properties, which are represented by a continuous changes of the elastic moduli and density are considered. Changing of the medium properties is assumed in the direction of the wave fronts motion. The method of matched asymptotic expansions allows to determine the problems evolution equations, reflecting nonlinear wave processes and the inhomogeneity of the medium. The most interesting variant of the evolution equation occurs when the intensity of the impact process and the small inhomogeneity have the same order. The transition to the limiting inner problem of the small parameter method is dictated by the chain of inner problems for which it is necessary to change all the independent variables and their scales.

Key words: *nonlinear elastic medium, inhomogeneity, shock waves, volume and shear deformation, evolution equation.*