Дальневосточный математический журнал. 2015. Том 15. № 1. С. 102–120

УДК 512.579
MSC2010 30A10, 30C10, 30C15

© А. Р. Халиуллина[1]

Условия модулярности решётки конгруэнций полигона над полугруппой правых или левых нулей

Получены необходимые и достаточные условия модулярности и дистрибутивности решётки конгруэнций полигона над полугруппой правых или левых нулей, а также условия, при которых решётка конгруэнций является цепью. Кроме того, описаны конгруэнции произвольного полигона над полугруппой левых нулей.

Ключевые слова: *решётка конгруэнций, полигон над полугруппой, модулярная решётка, полугруппа левых/правых нулей.*

Введение

Конгруэнции универсальной алгебры, т.е. отношения эквивалентности, сохраняющие операции, играют важную роль в структурной теории. Это объясняется тем, что конгруэнции – это то же самое, что ядра гомоморфизмов данной алгебры в другие. Хорошо известно, что конгруэнции всякой универсальной алгебры A образуют решётку (обозначим её через $\mathrm{Con}A$), и эта решётка является подрешёткой решётки $\mathrm{Eq}A$ всех отношений эквивалентности на множестве A. Кажется естественным изучение универсальных алгебр с заданными условиями на их решётки конгруэнций.

Напомним, что решётка L называется *дистрибутивной*, если $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$ для любых $x, y, z \in L$, и *модулярной*, если это равенство выполнено при $x \leq z$. Хорошо известно (см. [1], глава II, теоремы 1, 2), что решётка L модулярна тогда и только тогда, когда L не содержит подрешётки, изоморфной *пентагону*, и дистрибутивна тогда и только тогда, когда в L нет пентагонов и *диамантов* (см. рис. 1).

Решётки конгруэнций универсальных алгебр некоторых многообразий являются модулярными. Такими многообразиями являются, в частности, группы (решётка конгруэнций группы, т.е. решётка нормальных подгрупп группы всегда модулярна), а также кольца и модули. Условиям дистрибутивности или модулярности

[1]Национальный исследовательский университет “МИЭТ”, 124498, г. Москва, г. Зеленоград, площадь Шокина, дом 1. Электронная почта: `haliullinaar@gmail.com`

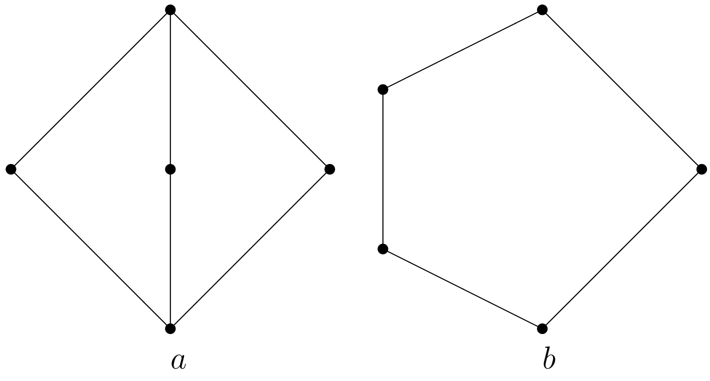

Рис. 1. a — диамант, b — пентагон

решёток конгруэнций, а также условиям, когда конгруэнции образуют цепь, посвящено значительное количество статей. Цепные и дистрибутивные кольца и модули — это целое направление теории колец (см. [2], [3]). Унары с дистрибутивной, модулярной решёткой конгруэнций и с решёткой конгруэнций, являющейся цепью, полностью описаны в [4]. В работе [5] были описаны полугруппы, у которых левые конгруэнции образуют цепь. Решётки конгруэнций произвольных полигонов над полугруппами изучались в [6]. Там было получено одно необходимое условие модулярности решётки конгруэнций — *отсутствие сквозных конгруэнций.*

Цель данной работы —- полное описание полигонов над полугруппами правых или левых нулей, имеющих дистрибутивную, модулярную или линейно упорядоченную решётку конгруэнций. Кроме того, мы описываем все конгруэнции полигона над полугруппой левых нулей.

В работе будут использоваться следующие обозначения: $\Delta_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$ — отношение равенства на множестве A, EqA — решётка отношений эквивалентности на A. Если ясно, о каком множестве идёт речь, вместо Δ_A будем писать просто Δ. Наибольшее отношение эквивалентности $A \times A$ на A будем обозначать ∇_A или просто ∇. Если $\varphi : A \to B$ — отображения множеств, то *ядро* $\mathrm{ker}\varphi$ и *образ* $\mathrm{im}\varphi$ отображения φ определяются обычным образом: $\mathrm{ker}\varphi = \{(a,a')|a\varphi = a'\varphi\}$, $\mathrm{im}\varphi = A\varphi$. Через $T(X)$ мы будем обозначать полугруппу всех отображений $\alpha : X \to X$ с умножением $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$ при $x \in X$, $\alpha, \beta \in T(X)$. Если ρ — отношение эквивалентности на множестве A, то $a\rho$ (для $a \in A$) – класс отношения ρ, содержащий элемент a, а A/ρ — фактор-множество (множество ρ-классов).

Основные определения и факты из теории полугрупп можно найти в [7, 8]. Некоторые из них приведём. Полугруппа S называется *полугруппой левых нулей*, если $xy = x$ при любых $x, y \in S$, и *полугруппой правых нулей*, если в ней выполняется тождество $xy = y$. Полугруппы левых и правых нулей являются частными случаями более общей конструкции *рисовской матричной полугруппы* $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ над группой G с сэндвич-матрицей P (см. [7, 8]).

Правый полигон над полугруппой S (или правый S-полигон; см. [9]) — это множество X, на котором задано действие полугруппы S, т.е. определено отображение

$X \times S \to X, (x, s) \mapsto xs$, удовлетворяющее условию $x(st) = (xs)t$ при $x \in X$, $s, t \in S$. Часто правый S-полигон X записывают в виде X_S. Левый полигон определяется двойственным образом. Однако левые полигоны мы рассматривать не будем, поэтому часто слово "правый" перед словом "полигон" будем опускать. *Конгруэнцией полигона* X над полугруппой S называется такое отношение эквивалентности ρ на X, что $(x, y) \in \rho \Rightarrow (sx, sy) \in \rho$ при всех $x, y \in X$, $s \in S$. *Нуль* S-полигона X — это такой элемент $z \in X$, что $zs = z$ при всех $s \in S$.

Копроизведением $\coprod\limits_{i \in I} X_i$ семейства полигонов $\{X_i \,|\, i \in I\}$ над полугруппой S назовём дизъюнктное объединение этих полигонов (если X_i имеют между собой непустые пересечения, то возьмём их изоморфные попарно не пересекающиеся копии). Полигон X называется *конеразложимым*, если он не разлагается в нетривиальное копроизведение полигонов. Нетрудно проверить, что всякий полигон является копроизведением конеразложимых полигонов.

Отметим следующее хорошо известное свойство произвольных полигонов над полугруппами. Доказательство приводим для полноты изложения.

Предложение 1. *Если X — полигон и Y — его подполигон, то решётка $ConY$ изоморфно вкладывается в решётку $ConX$.*

Доказательство. Нетрудно проверить, что отображение $\rho \mapsto \rho \cup \Delta_X$ $(\rho \in \mathrm{Con}Y)$ является решёточным вложением $\mathrm{Con}Y$ в $\mathrm{Con}X$. □

В работе [6] было введено понятие сквозной конгруэнции полигона. Напомним это определение. Конгруэнция ρ полигона X называется *сквозной*, если X представим в виде $X = Y \sqcup Z$ и существуют такие элементы $y_1, y_2 \in Y$, $z_1, z_2 \in Z$, что $(y_1, y_2), (z_1, z_2) \notin \rho$, а $(y_1, z_1), (y_2, z_2) \in \rho$. Следующее утверждение будет часто использоваться в дальнейшем.

Предложение 2. *[6, лемма 2.4] Если полигон X имеет сквозную конгруэнцию, то решётка $ConX$ не модулярна.*

Пусть X — полигон над полугруппой S. Будем говорить, что полугруппа S действует на множестве (полигоне) X *эффективно*, если выполняется импликация

$$(\forall x \in X \ xs = xt) \Rightarrow s = t.$$

Нетрудно увидеть, что всегда можно добиться эффективности действия S на X путём "склеивания" элементов из S, действующих на элементы из X одинаково. А именно, для каждого $s \in S$ обозначим через φ_s отображение $X \to X$ такое, что $x\varphi_s = xs$ при $x \in X$. Тогда отображение $\Phi : S \to T(X)$, $s \mapsto \varphi_s$ будет являться гомоморфизмом полугруппы S в полугруппу $T(X)$. Пусть $\ker\Phi = \rho$. Тогда ρ — конгруэнция полугруппы S. Пусть $\pi : S \to S/\rho$, $s \mapsto s\rho$ – естественный гомоморфизм. Положим $S/\rho = \bar{S}$, $\bar{s} = s\rho$. Тогда X можно рассматривать как $\bar{S}$-полигон относительно действия $x\bar{s} = xs$ при $x \in X$, $s \in S$. Нетрудно увидеть, что конгруэнции у полигонов X_S и $X_{\bar{S}}$ одни и те же, т.е. $\mathrm{Con}_S X = \mathrm{Con}_{\bar{S}} X$. При этом полугруппа $\bar{S}$ действует на X эффективно. Кроме того, полугруппу $\bar{S}$ можно рассматривать как подполугруппу полугруппы $T(X)$.

Полигоны над полугруппами левых нулей

Рассмотрим теперь полигоны над полугруппами левых нулей. Такие полигоны были полностью описаны в [10]. Если зафиксировать полугруппу левых нулей S, то следствие 11 из [10], дающее это описание, может быть переформулировано в виде приводимой ниже теоремы.

Теорема 1. *Пусть X и Y — непустые множества, $Y \subseteq X$, $A = X \setminus Y$ (допускается, что $A = \emptyset$), S – полугруппа левых нулей, $\{\varphi_s | s \in S\}$ — семейство отображений $\varphi_s : A \to Y$. Положим $as = a\varphi_s$ для $s \in S$, $a \in A$ и $ys = y$ для $y \in Y$, $s \in S$. Тогда $X = Y \cup A$ — правый полигон над полугруппой S. И наоборот, всякий правый полигон над полугруппой левых нулей устроен таким образом.*

Нетрудно увидеть, что множество Y в теореме 1 обладает следующими свойствами: а) $Y = XS$, б) Y — подполигон, в) Y является множеством нулей полигона X. Из этих свойств видно, что любое отношение эквивалентности на множестве Y является конгруэнцией. Следовательно, для описания всех конгруэнций полигона X имеет смысл задаться каким-либо отношением эквивалентности σ на Y и описывать конгруэнции полигона X, ограничение которых на X совпадает с σ.

Теорема 2. *Пусть X — правый полигон над полугруппой левых нулей S, множества Y, A и отображения $\varphi_s : A \to Y$ (для $s \in S$) имеют тот же смысл, что в предыдущей теореме. Возьмём любое отношение эквивалентности σ на множестве Y. Для $s \in S$ пусть $\sigma\varphi_s^{-1} = \{(a, b) | (a\varphi_s, b\varphi_s) \in \sigma\}$, $\widetilde{\sigma} = \bigcap\limits_{s \in S} \sigma\varphi_s^{-1}$. Для каждого класса K отношения σ пусть $A_K = \bigcap\limits_{s \in S} K\varphi_s^{-1}$ (это множество может быть пустым). Возьмём для каждого K какое-либо подмножество $A'_K \subseteq A_K$ и положим $Z_K = K \cup A'_K$. Пусть σ' – любое отношение эквивалентности на множестве $A \setminus \bigcup\limits_K A'_K$, содержащееся в $\widetilde{\sigma}$. Тогда $\rho = \bigcup\limits_K (Z_K \times Z_K) \cup \sigma'$ — конгруэнция полигона X. Кроме того, любая конгруэнция ρ полигона X, для которой $\rho|_Y = \sigma$, устроена таким образом.*

Доказательство. Проверим, что $\rho = \bigcup\limits_K (Z_K \times Z_K) \cup \sigma'$ — конгруэнция. Пусть $(x, y) \in \rho$ и $s \in S$. Если $(x, y) \in Z_K \times Z_K$, то $(xs, ys) \in K$ (действительно, если $x \in A'_K$, то $xs \in K$ по определению множества A_K, а если $x \in K$, то также $xs \in K$, так как K состоит из нулей; аналогично $ys \in K$). Это означает, что $(xs, ys) \in \sigma$, поэтому $(xs, ys) \in \rho$. Пусть теперь $(x, y) \in \sigma'$. Тогда $(x, y) \in \bigcap\limits_{s \in S} K\varphi_s^{-1}$, а значит, $(xs, ys) \in \sigma \subseteq \rho$. Таким образом, ρ — конгруэнция.

Осталось доказать, что других конгруэнций нет. Пусть ρ — произвольная конгруэнция на X и $\rho|_Y = \sigma$. Пусть $(x, y) \in \rho$ и $x \in Y$, $y \in A$. Обозначим σ-класс элемента x через K. Так как $x \in Y$, то $xs = x$ при всех $s \in S$, поэтому $(xs, ys) = (x, ys) \in Y \times Y$, а так как $(xs, ys) \in \rho$, то $(xs, ys) \in \sigma$. Следовательно, $ys \in K$, а значит, $y \in K\varphi_s^{-1}$. Это выполнено для всех $s \in S$, следовательно, $y \in A_K$. Положим $A'_K = x\rho \setminus K$. Пусть $x, y \in A \setminus \bigcup\limits_K A'_K$ и $(x, y) \in \rho$. Надо показать, что $(x, y) \in \widetilde{\sigma}$. Для любого $s \in S$ имеем $(xs, ys) \in \rho$ и $(xs, ys) \in Y \times Y$.

Следовательно, $(xs, ys) \in \sigma$, а значит, $(x, y) \in \sigma\varphi_s^{-1}$. Так как последнее включение выполняется для всех $s \in S$, то $(x, y) \in \widetilde{\sigma}$. Таким образом, ρ имеет вышеописанный вид, требуемый формулировкой теоремы. □

Перейдём теперь к рассмотрению условий модулярности решётки конгруэнций. Всюду далее в этом разделе X будет обозначать полигон над полугруппой левых нулей S, $Y = XS$ — его подполигон. Заметим, что множество Y имеет тот же смысл, что в предложении 2. Положим $A = X \setminus Y$ (множество A может быть пустым). Очевидно, что Y является множеством нулей полигона X. Поэтому любое отношение эквивалентности на множестве Y является конгруэнцией.

Для дальнейшего нам понадобится ряд вспомогательных лемм. В целях сокращения записи отношение эквивалентности ρ, имеющее неодноэлементные классы K_1, K_2, ..., K_t, будем обозначать следующим образом: $\rho = (K_1)(K_2)\ldots(K_t)$. Исходя из этого, получаем, что $\rho = \bigcup\limits_{i=1}^{t} (K_i \times K_i) \cup \Delta_X$. Для случая $K_i = \{a_1, \ldots, a_n\}$ или $K_i = \{a_1, \ldots, a_n\} \cup B$ наряду с (K_i) будем такие использовать обозначения $(a_1 \ldots a_n)$ и $(a_1 \ldots a_n B)$ соответственно. Далее элементы множества A будем обозначать латинскими буквами, а множества Y цифрами: $A = \{a, b, c, \ldots\}$, $Y = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Лемма 1. *Пусть X — полигон над полугруппой левых нулей S, $Y = XS$, $A = X \setminus Y$. Если решётка* Con$X$ *модулярна, то $|Y| \leq 3$, $|A| \leq 2$.*

Доказательство. Так как Y состоит из нулей, то Con$Y$ =EqY. Согласно предложению 1 решётка Con$X$ содержит подрешётку, изоморфную решётке Con$Y$. Хорошо известно, что решётка EqY при $|Y| > 3$ немодулярна. Следовательно, так как решётка Con$X$ модулярна, то $|Y| \leq 3$. Далее, пусть σ — произвольное отношение эквивалентности на множестве A. Нетрудно увидеть, что тогда отношение $\sigma \cup (Y \times Y)$ будет конгруэнцией полигона X, причём отображение $\sigma \mapsto \sigma \cup (Y \times Y)$ является решёточным вложением решётки EqA в решётку Con$X$. Так как решётка Con$X$ модулярна, то $|A| \leq 3$.

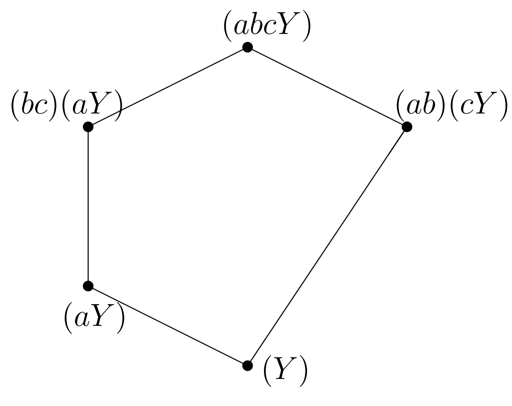

Рис. 2. Подрешётка решётки Con$X$ в лемме 1

Осталось доказать, что $|A| \leq 2$. Если $|A| = 3$, т.е. $A = \{a, b, c\}$, то отношения эквивалентности (Y), (aY), $(bc)(aY)$, $(abcY)$, $(ab)(cY)$ являются конгруэнциями полигона X и образуют пентагон (см. рисунок 2). Это противоречит модулярности решётки Con$X$. Таким образом, $|A| \leq 2$. □

Следующая лемма даёт ещё одно необходимое условие модулярности решётки Con$X$.

Лемма 2. *Пусть X — полигон над полугруппой левых нулей S, $Y = XS$, $A = X \setminus Y$ и пусть $a, b \in A$, $a \neq b$. Если решётка ConX модулярна, то $aS \cap bS \neq \emptyset$.*

Доказательство. Пусть $aS \cap bS = \emptyset$. Возьмём какое-нибудь $s \in S$. Положим $y = as$, $z = bs$. Рассмотрим отношение $\rho = (ab)(Y)$. Очевидно, что ρ – конгруэнция. Так как $aS \cap bS = \emptyset$, то мы имеем разложение $X = aS^1 \sqcup bS^1 (\sqcup Y')$, где $Y' = Y \setminus (aS \cup bS)$, скобки означают, что третье слагаемое отсутствует, если $Y' = \emptyset$. Заметим, что $(a, b), (y, z) \in \rho$, а $(a, y), (b, z) \notin \rho$, при этом a, y находятся в одном слагаемом, а b, z — в другом. Следовательно, конгруэнция ρ сквозная. Согласно предложению 2 решётка Con$X$ не модулярна. □

При $|A| \leq 1$ условия модулярности решётки Con$X$ выглядят совсем просто, как показывает следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть X — полигон над полугруппой левых нулей S, $Y = XS$, $A = X \setminus Y$. Пусть $|A| \leq 1$. Тогда решётка ConX модулярна в том и только том случае, если $|Y| \leq 3$.*

Доказательство. Если $A = \emptyset$, то Con$X$ = Con$Y$ = EqY, поэтому модулярность решётки Con$X$ равносильна неравенству $|Y| \leq 3$. Пусть теперь $|A| = 1$. Считаем, что $A = \{a\}$. По лемме 1 $|Y| \leq 3$. Нам достаточно рассмотреть лишь случай $|Y| = 3$, так как при $|Y| < 3$ мы имеем $|X| \leq 3$, и решётка Con$X$ модулярна, так как является подрешёткой решётки Eq(3). Итак, $A = \{a\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$. Так как $|aS| \leq 3$, то возможны лишь случаи: (i) $|aS| = 1$; (ii) $|aS| = 2$; (iii) $|aS| = 3$. Их можно условно изобразить, как показано на рисунке 3.

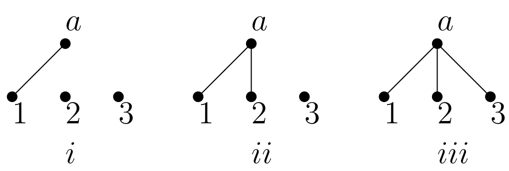

Рис. 3. Варианты действия полугруппы S на X

Случай (i). Нетрудно увидеть, что в этом случае мы получаем следующую решётку Con$X$ (см. рис. 4). Её модулярность проверяется непосредственно.

Случай (ii). В этом случае решётка Con$X$ изоморфна подрешётке решётки из случая (i), а значит, тоже модулярна (см. рис. 5).

Случай (iii). Решётка Con$X$ также модулярна (см. рис. 6).

□

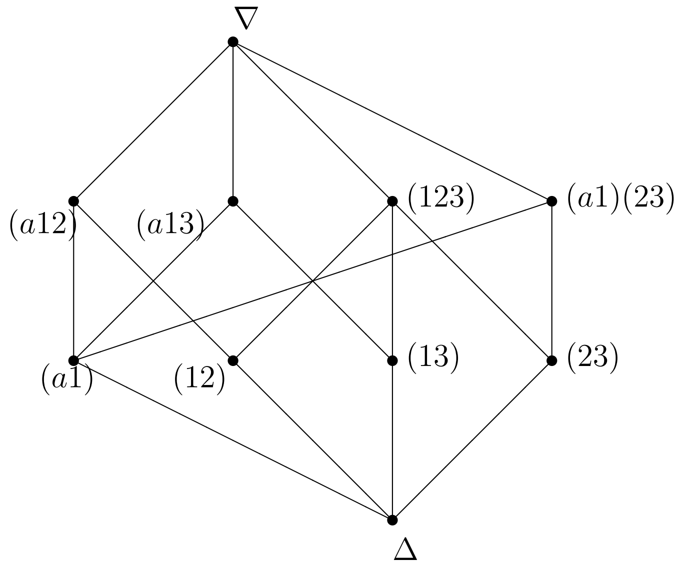

Рис. 4. Решётка конгруэнций Con$X$ в случае (i) леммы 3

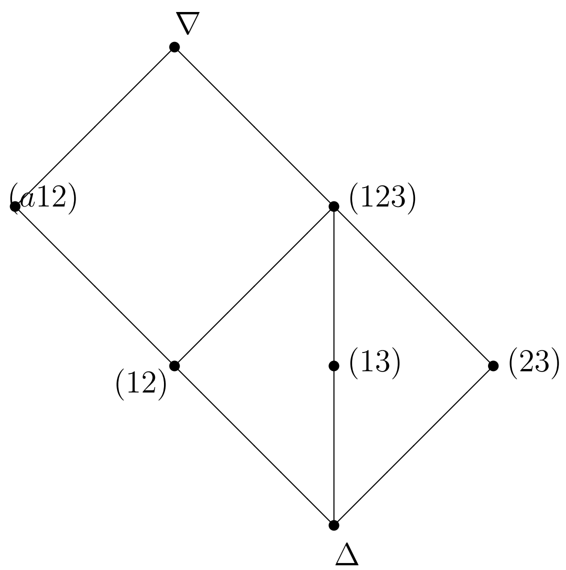

Рис. 5. Решётка конгруэнций Con$X$ в случае (ii) леммы 3

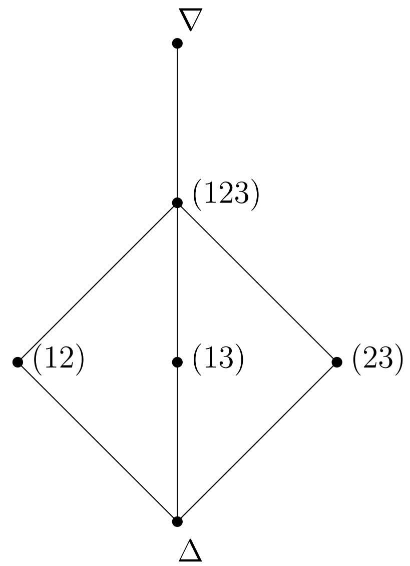

Рис. 6. Решётка конгруэнций Con$X$ в случае (iii) леммы 3

Лемма 4. *Пусть X — полигон над полугруппой левых нулей S, $Y = XS$, $A = X \backslash Y$. Пусть $A = \{a, b\}$, $Y = \{1, 2\}$. В этом случае решётка Con$X$ модулярна, если и только если $aS \cap bS \neq \emptyset$.*

Доказательство. Необходимость следует из леммы 2. Докажем *достаточность.* Пусть $aS \cap bS \neq \emptyset$. Очевидно, нам следует рассмотреть лишь один из следующих случаев: (i) $aS = bS = \{1\}$, (ii) $aS = \{1, 2\}$, $bS = \{1\}$, (iii) $aS = bS = \{1, 2\}$ (см. рис. 7), так как остальные случаи сводятся к перечисленным переименованием элементов полигона. Разберём случаи (i)–(iii) в отдельности.

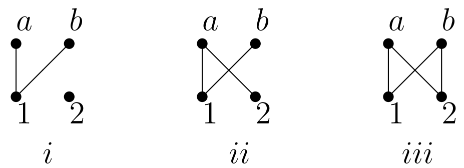

Рис. 7. Варианты действия полугруппы S на X

Случай (i): $aS = bS = \{1\}$. Тогда решётка Con$X$ имеет вид, изображённый на рис. 8. Она изоморфна прямому произведению решётки $\{\Delta, (a1), (ab), (b1), (ab1)\}$ и двухэлементной цепи. Следовательно, решётка Con$X$ модулярна.

Случай (ii): $aS = \{1, 2\}$, $bS = \{1\}$. Решётка Con$X$ изображена на рисунке 9. Её модулярность очевидна.

Случай (iii): $aS = bS = \{1, 2\}$. Решётка Con$X$ изображена на рисунке 10. Отношение (ab) будет являться конгруэнцией в том и только том случае, когда $as = bs$ при всех $s \in S$. Поэтому связи этого отношения помечены пунктиром. Модулярность обеих решёток (с пунктиром и без) очевидна. □

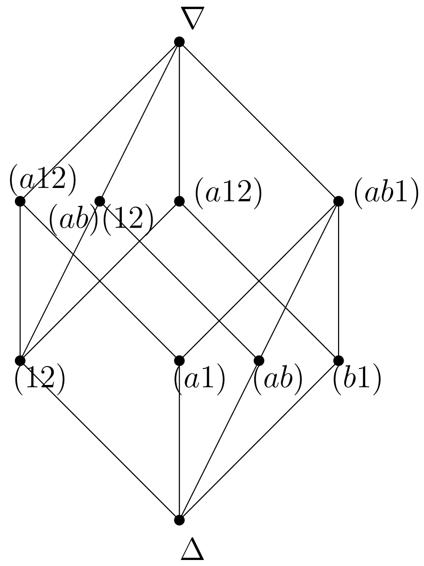

Рис. 8. Решётка конгруэнций Con$X$ в случае (i) леммы 4

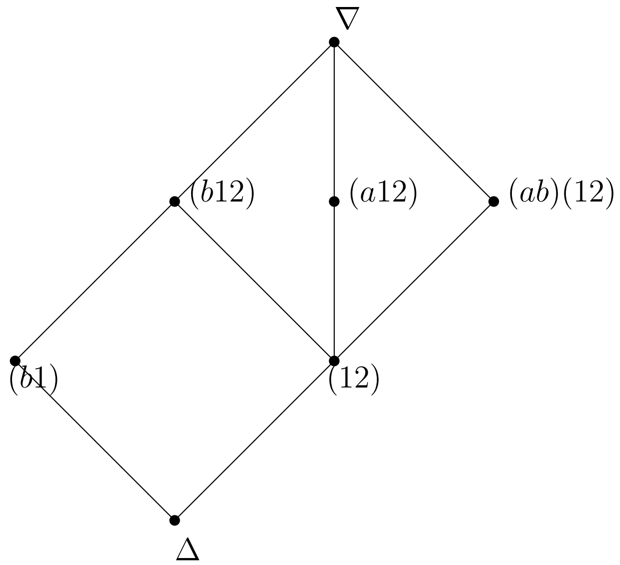

Рис. 9. Решётка конгруэнций Con$X$ в случае (ii) леммы 4

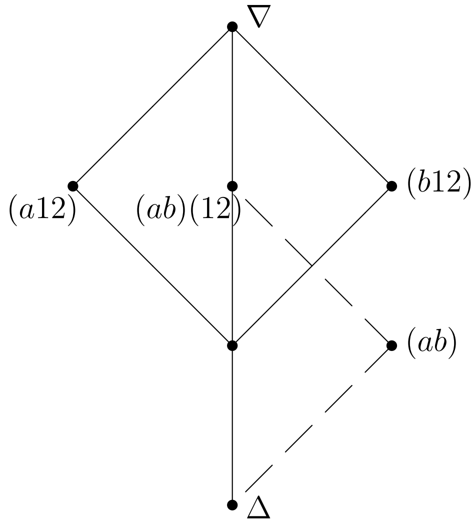

Рис. 10. Решётка конгруэнций Con$X$ в случае (iii) леммы 4

Теорема 3. *Пусть X — полигон над полугруппой левых нулей S, $Y = XS$, $A = X \setminus Y$. Решётка Con$X$ модулярна в том и только том случае, если $|Y| \leq 3$, $|A| \leq 2$ и $aS \cap bS \neq \emptyset$ при $a, b \in A$ и $a \neq b$.*

Доказательство. Пусть решётка Con$X$ модулярна. Тогда $|Y| \leq 3$, $|A| \leq 2$ по лемме 1. При $|A| \leq 1$ элементов $a, b \in A$ таких, что $a \neq b$, не существует, а при $|A| = 2$ условие $aS \cap bS \neq \emptyset$ следует из леммы 2. Необходимость доказана.

Пусть $|Y| \leq 3$, $|A| \leq 2$ и $aS \cap bS \neq \emptyset$ при $a \neq b$, где $a, b \in A$. Доказательства достаточности заключается в доказательстве модулярность решётки Con$X$. При $|A| \leq 1$ утверждение следует из леммы 3, поэтому далее будем считать, что $|A| = 2$. Пусть $A = \{a, b\}$. Мы можем считать, что $|Y| = 3$, так как можно дополнить полигон Y нулями. Считаем, что $Y = \{1, 2, 3\}$. Так как $aS \cap bS \neq \emptyset$, то нам достаточно рассмотреть случаи действия полугруппы S на X, изображенные на рисунке 11, остальные сводятся к перечисленным переименованием элементов. Разберём эти случаи в отдельности.

Случай (i). Мы имеем три компоненты связности: $\{a, b, 1\}$, $\{2\}$ и $\{3\}$, поэтому возможны лишь следующие разложения X в копроизведение двух подполигонов: $X = \{a, b, 1\} \sqcup \{2, 3\}$, $X = \{a, b, 1, 2\} \sqcup \{3\}$, $X = \{a, b, 1, 3\} \sqcup \{2\}$. Очевидно, в полигоне над полугруппой левых нулей любой подполигон содержит нуль. В нашем случае полигон X имеет ровно три нуля, поэтому четырёх попарно не пересекающихся подполигонов нет. Кроме того, из доказательства достаточности п. (i) леммы 4 следует, что наибольший по мощности сомножитель копроизведения во всех трёх случаях имеет модулярную решётку конгруэнций. Поэтому, ввиду [6, теорема 3.1] достаточно доказать отсутствие сквозных конгруэнций. Для второго и третьего разложений это очевидно, так как меньшее слагаемое одноэлементно. Рассмотрим разложение $X = \{a, b, 1\} \sqcup \{2, 3\}$. Если ρ — сквозная конгруэнция, то элементы 2, 3 ρ-эквивалентны двум каким-либо элементам из $\{a, b, 1\}$. Без ограничения общности

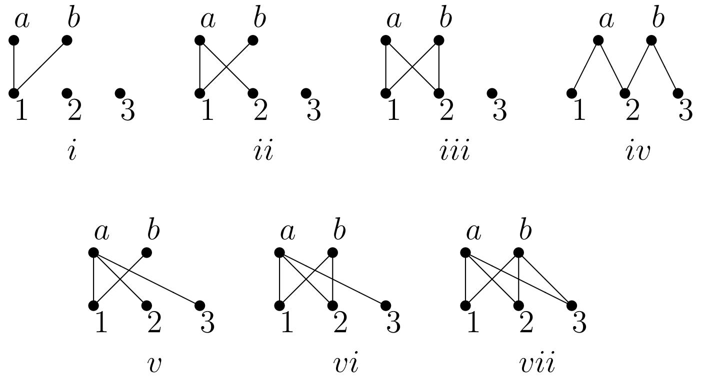

Рис. 11. Варианты действия полугруппы S на X

можно считать, что $(a,2) \in \rho$. Так как $a \cdot S = \{1\}$ и $2 \cdot S = \{2\}$, то $(1,2) \in \rho$. Значит, $a, 1, 2$ лежат в одном ρ-классе. Ясно, что $(b,3) \in \rho$, откуда $(1,3) \in \rho$, что невозможно. Таким образом, сквозных конгруэнций нет, поэтому решётка $\mathrm{Con}X$ модулярна.

Случаи (ii), (iii). В этих случаях, рассуждая аналогично тому, как это делалось в случае (i) и применяя п.(ii), (iii) доказательства достаточности в лемме 4 и [6, теорема 3.1], получаем, что решётка $\mathrm{Con}X$ модулярна.

Случай (iv). В этом случае решётка $\mathrm{Con}X$ имеет вид, изображённый на рисунке 12. Её модулярность проверяется непосредственно.

Случай (v). В этом случае решётка $\mathrm{Con}X$ имеет вид, изображённый на рисунке 13. Её модулярность устанавливается непосредственно.

Случай (vi). Если полигон X удовлетворяет условию

$$\forall s \in S \;\; as = 3 \Rightarrow bs = 1, \qquad (*)$$

то отношение эквивалентности $(ab)(13)$ является конгруэнцией, в противном случае не является. Аналогично, $(ab)(23) \in \mathrm{Con}X$ в том и только том случае, если выполнено условие

$$\forall s \in S \;\; as = 3 \Rightarrow bs = 2. \qquad (**)$$

Ясно, что одновременно условия (*) и (**) выполняться не могут. На рисунке 14 показана решётка $\mathrm{Con}X$. Пунктиром отмечена возможность того, что $(ab)(13) \in \mathrm{Con}X$. Если $(ab)(23) \in \mathrm{Con}X$, то рисунок, изображающий решётку $\mathrm{Con}X$, будет аналогичен рисунку 14. Модулярность полученных решёток проверяется непосредственно.

Случай (vii). В этом случае решётка $\mathrm{Con}X$ является подрешёткой решётки, изображённой на рисунке 15. Эквивалентности (ab), $(ab)(12)$, $(ab)(13)$, $(ab)(23)$ не всегда будут конгруэнциями полигона X. Все они будут конгруэнциями тогда и только тогда, когда $as = bs$ при всех $s \in S$. В некоторых случаях часть из них или все не будут принадлежать $\mathrm{Con}X$. В любом случае решётка $\mathrm{Con}X$ оказывается модулярной.

$\square$

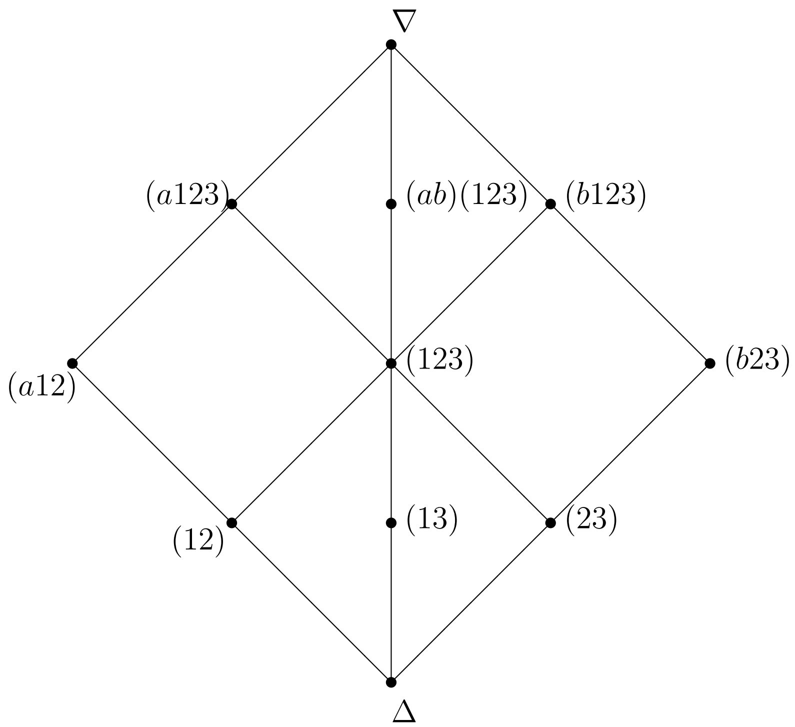

Рис. 12. Решётка конгруэнций Con$X$ в случае (iv) теоремы 3

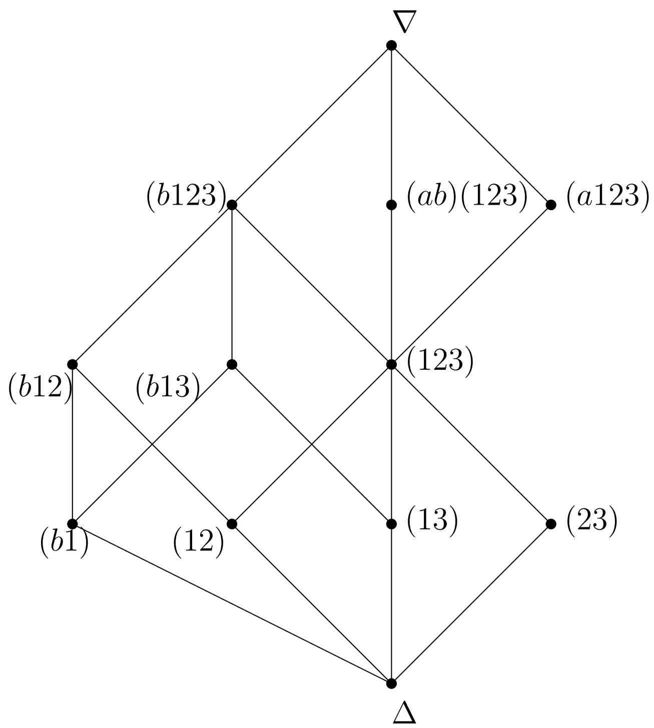

Рис. 13. Решётка конгруэнций Con$X$ в случае (v) теоремы 3

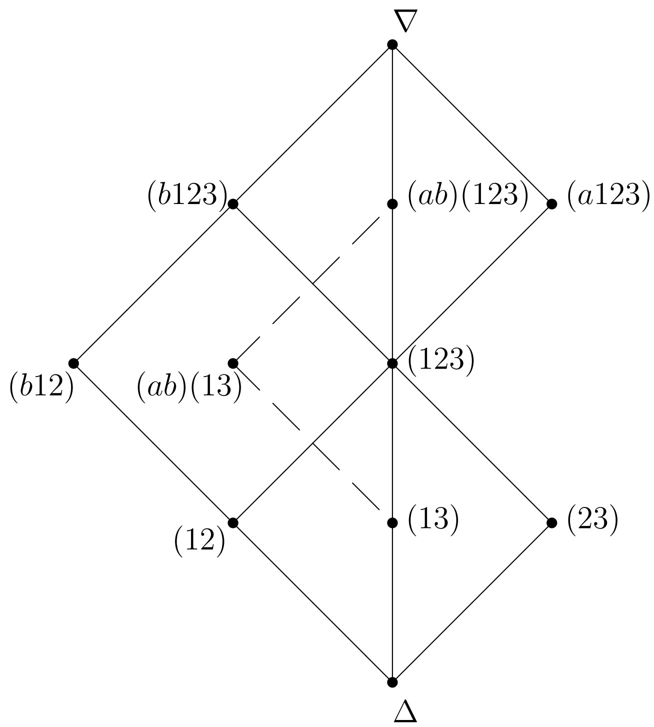

Рис. 14. Решётка конгруэнций Con$X$ в случае (vi) теоремы 3

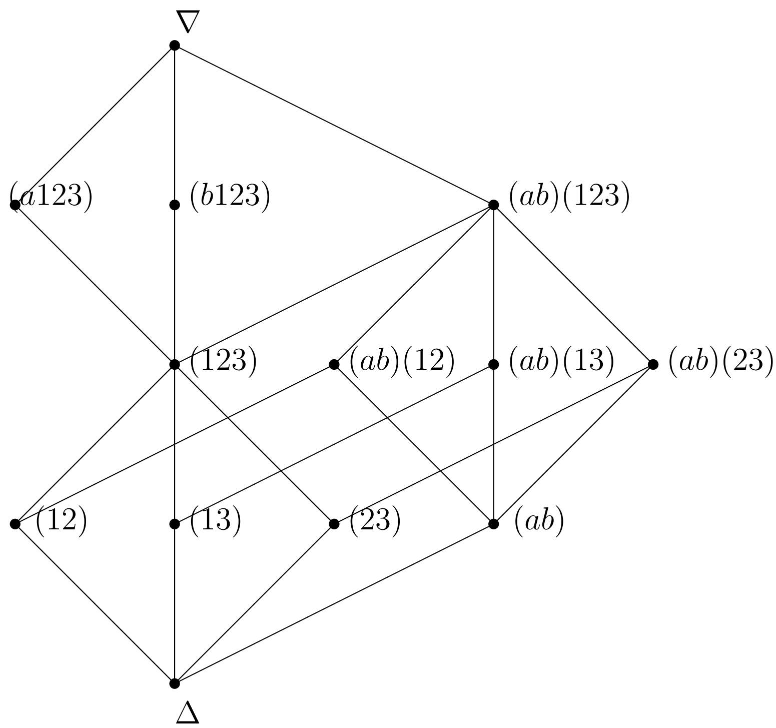

Рис. 15. Решётка конгруэнций Con$X$ в случае (vii) теоремы 3

Перейдём теперь к нахождению условий дистрибутивности решётки Con$X$, где X — полигон над полугруппой левых нулей S. Как обычно, полагаем $Y = XS$, $A = X \setminus Y$.

Лемма 5. *Если решётка ConX дистрибутивна, то* $|A| \leq 2$ *и* $|Y| \leq 2$.

Доказательство. При доказательстве леммы 1 фактически было показано, что решётка Con$X$ содержит подрешётки, изоморфные решёткам EqY и EqA. Так как при $n > 2$ решётка Eq(n) отношений эквивалентности на n-элементом множестве не дистрибутивна, то получаем требуемые неравенства $|A|, |Y| \leq 2$. □

Лемма 6. *При* $|A| = 2$ *решётка ConX не дистрибутивна.*

Доказательство. Если $A = \{a, b\}$, то подрешётка $\{(Y), (ab)(Y), (aY), (bY), \nabla\}$ решётки Con$X$ является диамантом. □

Теорема 4. *Пусть* X *— полигон над полугруппой левых нулей* S. *Тогда решётка ConX дистрибутивна в том и только том случае, если* $|X| \leq 2$ *либо* $X \cong \{a, 1, 2\}$, *где 1 и 2 — нули и* $aS \subseteq \{1, 2\}$. *При* $|X| \leq 2$ *решётка ConX является одно- или двухэлементной цепью, а если* $X \cong \{a, 1, 2\}$, *то решётка ConX является трёхэлементной цепью* $\{\Delta, (12), \nabla\}$ *при* $|aS| = 2$ *и прямым произведением двух двухэлементных цепей при* $|aS| = 1$ *(ConX* $= \{\Delta, (12), (a1), \nabla\}$, *если считать, что* $aS = \{1\}$*).*

Доказательство. Ввиду лемм 5, 6 мы имеем $|A| \leq 1$, $|Y| \leq 2$. Разбор этих ситуаций не представляет труда. □

Теорема 5. *Пусть* X *— полигон над полугруппой левых нулей* S. *Решётка ConX является цепью в том и только том случае, если* $|X| \leq 2$ *либо* $X \cong \{a, 1, 2\}$, *где* $aS = \{1, 2\}$.

Доказательство. Очевидно ввиду теоремы 5. □

В заключение этого раздела отметим, что в случае модулярности решётки конгруэнций максимальный порядок полигона X равен 5, а максимальный порядок полугруппы левых нулей, действующей эффективно на X, равен 9.

Полигоны над полугруппами правых нулей

Полигоны над полугруппами правых нулей были описаны в [10, Corollary 10], конгруэнции этих полигонов — в [11]. Сделаем ряд замечаний о строении этих полигонов.

Пусть X – полигон над полугруппой правых нулей S. Пусть $\sigma = \{(x, y) \in X \times X | \exists s \;\; xs = ys\}$. Так как S – полугруппа правых нулей, то $xs = ys \Leftrightarrow xt = yt$ при любых $s, t \in S$, поэтому в определении σ можно "$\exists s$" заменить на "$\forall s$". Если X_i – классы отношения эквивалентности σ, то X_i — подполигоны, поэтому $X = \coprod\limits_{i \in I} X_i$. Пусть $Y_i = XS \cap X_i$. Имеем $|X_i s| = 1$ при любом $s \in S$. Пусть $X_i s = \{y_{is}\}$.

При $i \neq j$ построим двудольный граф Γ_{ij}, у которого множество вершин есть $Y_i \cup Y_j$, а рёбрами являются пары (y_{is}, y_{js}) при $s \in S$. *Эти обозначения мы будем использовать до конца статьи.*

Лемма 7. *Пусть X — полигон над полугруппой правых нулей S. Тогда полугруппа S действует на любом из множеств Y_i $(i \in I)$ транзитивно, т.е. $\forall y, y' \in Y_i \; \exists s \in S \; ys = y'$.*

Доказательство. Так как $y, y' \in S$ и $Y_i \subseteq XS$, то $y = xs$, $y' = x't$ при некоторых $x, x' \in X$, $s, t \in S$. Отсюда $y = y_{is}$, $y' = y_{it}$. Следовательно, $yt = xst = xt = y_{it} = x't = y'$. $\square$

Замечание. Утверждение этой леммы означает, что полигон Y_i является циклическим и порождается любым своим элементом.

Лемма 8. *Пусть X — полигон над полугруппой правых нулей S. Предположим, что для некоторых $i \neq j$ граф Γ_{ij} связен. Если ρ — конгруэнция полигона X и $(x, y) \in \rho$ для некоторых $x \in X_i$, $y \in X_j$, то $(Y_i \cup Y_j) \times (Y_i \cup Y_j) \subseteq \rho$.*

Доказательство. Для любого $s \in S$ имеем $(xs, ys) \in \rho$, т.е. $(y_{is}, y_{js}) \in \rho$. Таким образом, все рёбра графа Γ_{ij}, рассматриваемые как пары элементов из X, принадлежат ρ. Так как граф Γ_{ij} связен, то $(u, v) \in \rho$ при любых $u, v \in Y_i \cup Y_j$. $\square$

Лемма 9. *Пусть X — полигон над полугруппой правых нулей S, $I = \{1, 2\}$, $X = X_1 \sqcup X_2$. Если $|X_1|, |X_2| \leq 3$, $X_1 = Y_1$ и граф Γ_{12} связен, то решётка $ConX$ модулярна.*

Доказательство. Ввиду леммы 7 и того, что $XS \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} Y_i$, любой подполигон полигона X содержит какое-либо Y_i. В нашем случае $|I| = 2$, поэтому четырёх попарно не пересекающихся подполигонов полигон X не имеет. Очевидно, $X = X_1 \sqcup X_2$ — единственное разложение полигона X в копроизведение. Также ясно, что $\mathrm{Con}X_i = \mathrm{Eq}X_i$ при всех $i \in I$, а ввиду неравенств $|X_1|, |X_2| \leq 3$ решётки $\mathrm{Con}X_1$, $\mathrm{Con}X_2$ модулярны. Теперь ввиду теоремы 3.1 из [6] для доказательства модулярности решётки $\mathrm{Con}X$ достаточно установить отсутствие сквозных конгруэнций.

Пусть ρ — сквозная конгруэнция. Тогда существуют элементы $u, v \in X_1$, $p, q \in X_2$ такие, что $(u, p), (v, q) \in \rho$, а $(u, v), (p, q) \notin \rho$. По лемме 8 $(Y_i \cup Y_j) \times (Y_i \cup Y_j) \subseteq \rho$. По условию леммы $X_1 = Y_1$, следовательно, $(u, v) \in \rho$. Это противоречит выбору элементов u, v. $\square$

Теорема 6. *Пусть X — полигон над полугруппой правых нулей S, $X = \coprod\limits_{i \in I} X_i$ — разложение в копроизведение копрямо неразложимых подполигонов, $Y_i = X_i \cap XS$. Решётка $ConX$ модулярна в том и только том случае, если выполнены условия:*

(i) $|I| \leq 3$;
(ii) $|X_i| \leq 3$ для любого $i \in I$;
(iii) если $X_i \neq Y_i$ при некотором i, то $X_j = Y_j$ при всех $j \neq i$;
(iv) для любых $i \neq j$ граф Γ_{ij} связен.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть решётка Con$X$ модулярна. По теореме 3.1. из [6] полигон X в этом случае не может содержать 4 попарно не пересекающихся подполигона. Следовательно, $|I| \leq 3$, т.е. выполнено (i). Решётка ConX_i изоморфно вкладывается в решётку Con$X$. В полигоне X_i любое отношение эквивалентности является конгруэнцией, т.е. ConX_i =EqX_i. Но при $|X_i| \geq 4$ решётка EqX_i немодулярна. Следовательно, $|X_i| \leq 3$, т.е. выполнено (ii). Далее предположим, что (iii) не выполнено. Тогда существуют элементы $a \in X_i \setminus Y_i$, $b \in X_j \setminus Y_j$ при некоторых $i \neq j$. В этом случае, как нетрудно проверить, $\rho = (ab)(Y_iY_j)$ будет являться сквозной конгруэнцией, что по теореме 3.1 из [6] влечет немодуряность решётки Con$X$, что противоречит условию. Тем самым доказано (iii). Наконец, докажем (iv). Предположим, что оно не выполнено, т.е. граф Γ_{ij} не связан. Тогда граф Γ_{ij} разбивается на несколько компонент связности (не менее двух). Пусть $\Gamma_{ij} = \bigcup\limits_{\alpha} K_\alpha$, где K_α — различные компоненты связности графа Γ_{ij}. Пусть A_α — вершины графа K_α, лежащие в Y_i, а B_α — в Y_j. Очевидно, $A_\alpha \cap A_\beta = B_\alpha \cap B_\beta = \emptyset$ при $\alpha \neq \beta$. Пусть $\rho = \bigcup\limits_{\alpha}(K_\alpha \times K_\alpha) \cup \Delta_X$. Очевидно, что ρ — отношение эквивалентности на X. Докажем, что ρ – конгруэнция. Пусть $(x, y) \in \rho$ и $s \in S$. Если $x, y \in Y_i$ или $x, y \in Y_j$, то $xs = ys$, а значит, $(xs, ys) \in \rho$. Пусть теперь $x \in Y_i$, $y \in Y_j$. Тогда $x \in A_\alpha$, $y \in B_\alpha$ при некотором α. По определению умножения в X имеем: $xs = y_{is}$, $ys = y_{js}$. Следовательно, (xs, ys) — ребро графа Γ_{ij}. Значит, xs, ys лежат в одной компоненте связности, поэтому $(xs, ys) \in \rho$. Мы имеем разложение полигона X в копроизведение: $X = X_i \sqcup (\bigcup\limits_{k \neq i} X_k)$. Возьмём две различные компоненты связности K_1 и K_2 графа Γ_{ij}, в них элементы u, v, w, z такие, что $u \in A_1$, $v \in A_2$, $w \in B_1$, $z \in B_2$. Тогда $u, v \in X_i$, $w, z \in \cup_{k \neq i} X_k$, $(u, w), (v, z) \in \rho$, а $(u, v), (w, z) \notin \rho$. Следовательно, ρ — сквозная конгруэнция. По теореме 3.1 из [6] это решётка Con$X$ немодулярна, что противоречит условию.

Докажем достаточность. Пусть выполнены условия (i) — (iv). Если $|I| = 1$, то $|X| \leq 3$, поэтому решётка EqX модулярна, а значит, её подрешётка Con$X$ также модулярна. При $|I| = 2$ модулярность решётки Con$X$ следует из леммы 9. Осталось рассмотреть случай $|I| = 3$. Мы можем считать, что $I = \{1, 2, 3\}$. Из неравенства $|I| \leq 3$ и леммы 7 следует, что X не может иметь 4 попарно не пересекающихся подполигона. Рассмотрим произвольное разложение полигона X в копроизведение двух полигонов. Без ограничения общности можно считать, что оно имеет вид $X = (X_1 \cup X_2) \sqcup X_3$. Решётка Con$X_3$ модулярна, так как $|X_3| \leq 3$. Модулярность решётки Con$(X_1 \cup X_2)$ =Con$(X_1 \sqcup X_2)$ следует из леммы 9. Теперь с учетом теоремы 3.1 из [6] достаточно доказать отсутствие сквозных конгруэнций. Это делается так же, как в лемме 9. □

Приведём в качестве примера изображение какой-нибудь модулярной решётки конгруэнций полигона над полугруппой правых нулей. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $X_1 = Y_1 = \{1, 2\}$, $X_2 = Y_2 = \{3, 4\}$, $X_3 = Y_3 = \{5, 6\}$. Тогда решётка Con$X$ имеет вид, изображённый на рисунке 16 сплошными линиями. В случае, когда $X_1 \neq Y_1$, скажем, $1 \notin Y_1$, $2 \in Y_1$, к прежней решётке добавляются отношения (234), (234)(56), (256), (256)(34), (23456). На рисунке 16 добавления отмечены пунктиром.

Отметим, что наибольший порядок полигона X над полугруппой правых нулей

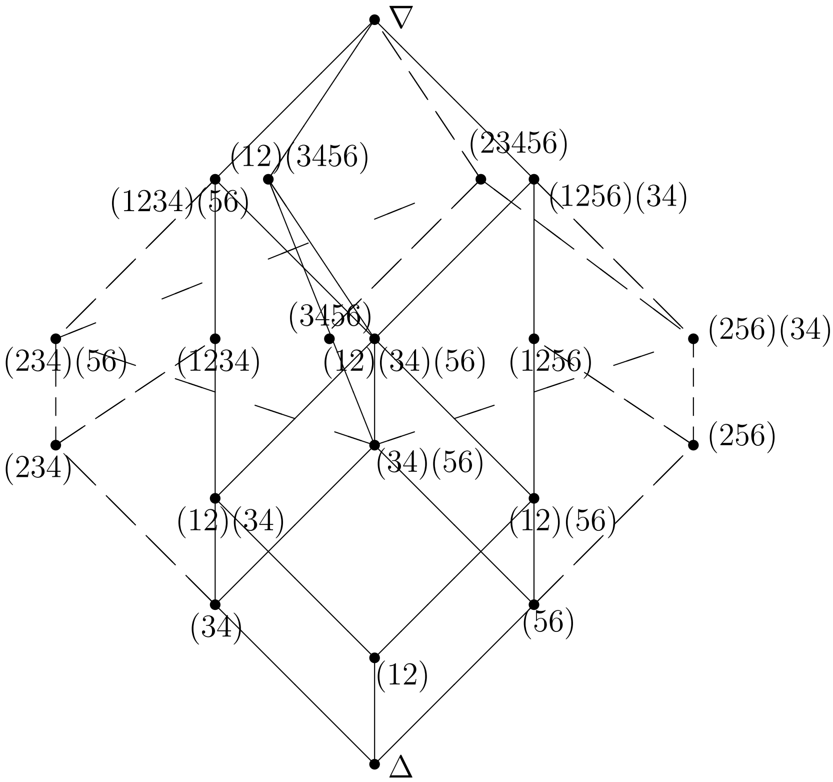

Рис. 16. Решётка конгруэнций Con$X$ для теоремы 6

S, у которого решётка конгруэнций Con$X$ модулярна, равен 9, а наибольший порядок полугруппы S, действующей эффективно на X, равен 27. Полугруппа S в этом случае состоит из элементов вида

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ i & i & i & j & j & j & k & k & k \end{pmatrix},$$

где $i \in \{1, 2, 3\}$, $j \in \{4, 5, 6\}$, $k \in \{7, 8, 9\}$. Конгруэнция σ здесь принимает вид $\sigma = (123)(456)(789)$. Подмножество $L_1 = \{\rho \in \mathrm{Con}X | \rho \subseteq \sigma\}$ — подрешётка решётки Con$X$. При этом $L_1 \cong \mathrm{Eq}X_1 \times \mathrm{Eq}X_2 \times \mathrm{Eq}X_3$ и $|L_1| = 5^3 = 125$. Оставшаяся часть $\mathrm{Con}X \setminus L_1$ состоит из элементов (1-6), (1-6)(78), (1-6)(79), (1-6)(89), (1-6)(789), (123789), (123789)(45), (123789)(46), (123789)(56), (123789)(456), (4-9), (12)(4-9), (13)(4-9), (23)(4-9), (123)(4-9). Следовательно, $|\mathrm{Con}X| = 125 + 15 = 140$. Если отменить условие $X_1 = Y_1$, то полугруппа (действующая эффективно) уменьшится, а решётка конгруэнций увеличится. Например, пусть $1 \in Y_1$, а $2, 3 \notin Y_1$. Тогда S состоит не более чем из 9 элементов, а в решётке Con$X$ будет более 140 элементов. К перечисленным выше отношениям добавятся, например, отношения (23), (1456), (1789)(46) и т.д.

Следующая теорема даёт условия дистрибутивности решётки Con$X$.

Теорема 7. *Пусть X — полигон над полугруппой правых нулей S, $X = \coprod_{i \in I} X_i$ – разложение в копроизведение копрямо неразложимых подполигонов, $Y_i = X_i \cap XS$.*

Решётка конгруэнций Con$X$ *дистрибутивна в том и только том случае, если выполнены условия:*

(i) $|I| \leq 2$*;*

(ii) $|X_i| \leq 2$ *для каждого* $i \in I$*;*

(iii) если $X = X_1 \sqcup X_2$*, то либо* $Y_1 = X_1$*, либо* $Y_2 = X_2$*;*

(iv) граф Γ_{12} *связен.*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть решётка Con$X$ дистрибутивна. Ранее мы видели, что подполигоны X_i — это в точности классы отношения эквивалентности σ. Очевидно, что решётка конгруэнций фактор-полигона X/σ является подрешёткой решётки Con$X$. Но полигон X/σ состоит только из нулей, поэтому $\mathrm{Con}(X/\sigma) = \mathrm{Eq}(X/\sigma)$. Из дистрибутивности этой решётки получаем, что $|X/\sigma| \leq 2$. Следовательно, выполнено (i). Кроме того, для каждого i мы имеем $\mathrm{Con}X_i = \mathrm{Eq}X_i$, поэтому $|X_i| \leq 2$, т.е. выполнено (ii). Если $|I| = 1$, то условия (iii), (iv) проверять не нужно. Далее считаем, что $|I| = 2$, т.е. $X = X_1 \sqcup X_2$. В этом случае выполнение условий (iii), (iv) следует из теоремы 6.

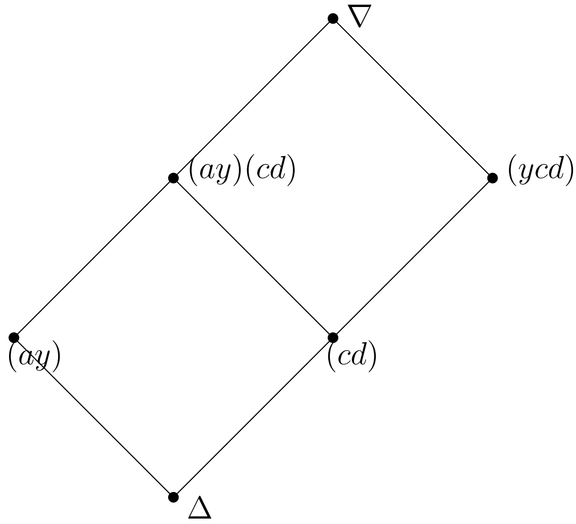

Рис. 17. Решётка конгруэнций Con$X$ для теоремы 7

Докажем достаточность. Пусть выполнены условия (i) -– (iv). Если $|I| = 1$, то $|X| \leq 2$, а значит, решётка Con$X$ дистрибутивна. Далее считаем, что $|I| = 2$ и $|X| \geq 3$. Итак, $X = X_1 \sqcup X_2$. Ввиду (iii) можем считать, что $Y_2 = X_2$. Если $|X_1| = |X_2| = 2$, $Y_1 = X_1$, можно считать, что $X_1 = \{a, b\}$, $X_2 = \{c, d\}$. Так как граф Γ_{12} связен, то $\mathrm{Con}X \cong \mathrm{Eq}(2) \times \mathrm{Eq}(2)$, а значит, дистрибутивна. При $|X_1| = |X_2| = 2$, $Y_1 \neq X_1$ пусть $X_1 = \{a, y\}$, где $a \notin Y_1$, $y \in Y_1$, $X_2 = \{c, d\}$. Решётка Con$X$ имеет вид, изображённый на рисунке 17. Она изоморфна прямому произведению двухэлементной и трёхэлементной цепей, поэтому дистрибутивна. При $|X_1| = 1$, $|X_2| = 2$ полагаем: $X_1 = \{y\}$, $X_2 = \{c, d\}$. Тогда Con$X$ является трёхэлементной цепью: $\Delta \subset (cd) \subset \nabla$. Случай $|X_1| = 2$, $|X_2| = 1$, $X_1 = Y_1$, $X_2 = Y_2$ не отличается от предыдущего. Пусть $|X_1| = 2$, $|X_2| = 1$, $X_1 \neq Y_1$. Полагаем

$X_1 = \{a, y\}$, где $a \notin Y_2$, $y \in Y_2$, $X_2 = \{z\}$. Тогда Con$X = \{\Delta, (ay), (yz), \nabla\}$ — прямое произведение двух двухэлементных цепей, следовательно, дистрибутивна. $\square$

Следствие 1. *Пусть X — полигон над полугруппой правых нулей S. Тогда решётка Con$X$ является цепью в том и только том случае, если $|X| \leq 2$ или $X \cong \{y, c, d\}$, где $yS = \{y\}$, $cS = dS = \{c, d\}$.*

Автор благодарит рецензента, сделавшего ряд ценных замечаний, позволивших улучшить текст статьи.

Список литературы

[1] Г. Гретцер, *Общая теория решёток*, Мир, М., 1982.

[2] А. А. Туганбаев, “Строение дистрибутивных колец”, *Мат. сборник*, **193**:5 (2002), 113–128.

[3] А. А. Туганбаев, *Теория колец. Арифметические модули и кольца*, МЦНМО, М., 2009.

[4] Д. П. Егорова, “Структура конгруэнций унарной алегбры”, *Межвуз. научн. сб. "Упорядоченные множества и решётки"*. Т. 5, Саратов, 1978, 11–44.

[5] I. B. Kozhukhov, “Left chain semigroups”, *Semigroup Forum*, **222**:1 (1981), 1–8.

[6] Д. О. Птахов, А. А. Степанова, “Решётки конгруэнций полигонов”, *Дальневост. матемем. журнал*, **13**:1 (2013), 107–115.

[7] А. Клиффорд, Г. Престон, *Алгебраическая теория полугрупп.* Т. 1, Мир, М., 1972.

[8] А. Клиффорд, Г. Престон, *Алгебраическая теория полугрупп.* Т. 2, Мир, М., 1974.

[9] M. Kilp, U. Knauer, A. V. Mikhalev, *Monoids, acts and categories*, W. de Gruyter, N.Y.–Berlin, 2000.

[10] A. Yu. Avdeyev, I. B. Kozhukhov, “Acts over completely 0-simple semigroups”, *Acta Cybernetica*, **14**:4 (2000), 523–531.

[11] А. Р. Халиуллина, “Конгруэнции полигонов над полугруппами правых нулей”, *Чебыш. сборник*, **14**:3 (2013), 142–146.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 23 декабря 2014 г.

Khaliullina A. R. Modularity conditions of the lattice of congruences of acts over right or left zero semigroups. Far Eastern Mathematical Journal. 2015. V. 15. № 1. P. 102–120.

ABSTRACT

We obtain necessary and sufficient conditions for modularity and distributivity of the lattice of congruences of acts over right or left zeros semigroup, as well as the conditions under which the congruence lattice is a chain. We describe the congruences of arbitrary act over left zero semigroup.

Key words: *congruences, act, semigroup.*