Дальневосточный математический журнал. 2015. Том 15. № 2. С. 156–165

УДК 517.984.42+519.218.7
MSC2010 34L20, 47B10, 60G15

© А. А. Владимиров[1]

Некоторые замечания об интегральных характеристиках винеровского процесса

Устанавливается, что в случае, когда обобщённая функция $\rho \in W_2^{-1}[0,1]$, не обязательно являющаяся мерой, задаёт ядерный мультипликатор из пространства $W_2^1[0,1]$ в пространство $W_2^{-1}[0,1]$, распределение случайной величины $\int_0^1 \rho\xi^2\,dt$, где ξ — винеровский процесс, определяется спектром граничной задачи

$$-y'' = \lambda\rho y, \qquad y(0) = y'(1) = 0$$

по тому же закону, что и в случае, когда обобщённая функция ρ является мерой. Дополнительно приводится пример обобщённой функции $\rho \in W_2^{-1}[0,1]$, задающей неядерный мультипликатор из пространства $W_2^1[0,1]$ в пространство $W_2^{-1}[0,1]$.

Ключевые слова: *обобщённая функция, мультипликатор, винеровский процесс, ядерный оператор.*

1. Общие конструкции

1.1. Обозначим через $\mathfrak{H}$ вещественное гильбертово пространство случайных величин с конечным вторым моментом [1, Гл. V, § 1]. Рассмотрим непрерывный в смысле нормы пространства $\mathfrak{H}$ центрированный гауссовский случайный процесс $\xi\colon [0,1] \to \mathfrak{H}$ и обозначим через K действующий в вещественном пространстве $L_2[0,1]$ неотрицательный интегральный оператор, ядром которого выступает ковариационная функция

$$\mathcal{K}(t,s) \rightleftharpoons \langle \xi(s), \xi(t)\rangle_{\mathfrak{H}}$$

процесса ξ. Далее всегда будет предполагаться, что образ оператора K является плотным в $L_2[0,1]$. Из этого предположения, в частности, вытекает инъективность оператора K. Обозначим через $\mathfrak{D}$ пространство $\operatorname{im} K^{1/2}$, снабжённое нормой

$$\|y\|_{\mathfrak{D}} \rightleftharpoons \|K^{-1/2}y\|_{L_2[0,1]}, \tag{1}$$

[1]ВЦ им. А.А. Дородницына РАН, 119333, г. Москва, ул. Вавилова, 40. Электронная почта: vladimi@mech.math.msu.su

а через $\mathfrak{D}^*$ — двойственное к $\mathfrak{D}$ относительно $L_2[0,1]$ гильбертово пространство обобщённых функций, получаемое пополнением $L_2[0,1]$ по норме

$$\|y\|_{\mathfrak{D}^*} \risingdotseq \sup_{\|z\|_{\mathfrak{D}}=1} \langle y, z\rangle_{L_2[0,1]} = \langle Ky, y\rangle^{1/2}_{L_2[0,1]}.$$

Оператор K при этом продолжается по непрерывности до изометрии $I\colon \mathfrak{D}^* \to \mathfrak{D}$ со свойством

$$(\forall y, z \in \mathfrak{D}^*) \qquad \langle y, Iz\rangle = \langle y, z\rangle_{\mathfrak{D}^*}. \tag{2}$$

Символ $\langle f, y\rangle$ здесь и далее используется нами для обозначения результата применения функционала $f \in \mathfrak{D}^*$ к функции $y \in \mathfrak{D}$.

Заметим [1, Гл. V, § 1], что при любом выборе функции $\varphi \in C[0,1]$ интеграл

$$\xi_\varphi \risingdotseq \int_0^1 \varphi \cdot \xi \, dt$$

корректно определён как бохнеровский (и даже римановский) интеграл от $\mathfrak{H}$-значной функции. При этом выполняются не зависящие от выбора $\varphi \in C[0,1]$ соотношения

$$\|\xi_\varphi\|^2_{\mathfrak{H}} = \int_{[0,1]^2} \mathcal{K}(t,s)\varphi(s)\varphi(t)\, dtds = \|\varphi\|^2_{\mathfrak{D}^*},$$

означающие возможность продолжения соответствия $\varphi \mapsto \xi_\varphi$ по непрерывности до изометрического вложения пространства $\mathfrak{D}^*$ в пространство $\mathfrak{H}$. Это наблюдение позволяет сопоставить всякому ортонормированному базису $\{f_k\}_{k=0}^\infty$ пространства $\mathfrak{D}$ ортонормированное семейство $\{\xi_k\}_{k=0}^\infty$ случайных величин $\xi_k \risingdotseq \xi_{I^{-1}f_k}$, удовлетворяющее при любом выборе $\varphi \in \mathfrak{D}^*$ вытекающему из (2) равенству

$$\xi_\varphi = \sum_{k=0}^\infty \langle \varphi, f_k\rangle\, \xi_k. \tag{3}$$

В частности, независимо от выбора значения $t \in [0,1]$ дельта-функция $\boldsymbol{\delta}_t$ с сосредоточенным в точке t носителем заведомо принадлежит пространству $\mathfrak{D}^*$ ввиду непрерывности ядра $\mathcal{K}$. Отвечающей этой дельта-функции случайной величиной является значение процесса $\xi(t)$, что ввиду (3) автоматически влечёт справедливость разложения

$$\xi(t) = \sum_{k=0}^\infty f_k(t)\, \xi_k, \tag{4}$$

известного как ряд Карунена – Лоева. При этом, вследствие компактности множества дельта-функций в пространстве $\mathfrak{D}^*$, сходимость ряда (4) является равномерной по параметру $t \in [0,1]$.

1.2. Обозначим через M действующий в пространстве $L_2[0,1]$ интегральный оператор, ядром которого выступает ковариационная функция

$$\mathcal{M}(t,s) \rightleftharpoons \langle \xi^2(s), \xi^2(t) \rangle_{\mathfrak{H}}$$

квадрата рассматриваемого процесса ξ. Обозначим через $\mathfrak{M}$ пополнение пространства $L_2[0,1]$ по норме $\|y\|_{\mathfrak{M}} \rightleftharpoons \langle My, y \rangle^{1/2}_{L_2[0,1]}$. Повторяя рассуждения из предыдущего пункта, убеждаемся в возможности изометрического вложения пространства $\mathfrak{M}$ в пространство $\mathfrak{H}$ посредством соответствия

$$\tau_\rho \rightleftharpoons \int\limits_0^1 \rho \cdot \xi^2 \, dt. \tag{5}$$

Имеет место следующий факт.

1.2.1. *При любом выборе функции $\rho \in C[0,1]$ и ортонормированного базиса $\{f_k\}_{k=0}^\infty$ пространства $\mathfrak{D}$ последовательность $\{\tau_{\rho,n}\}_{n=0}^\infty$ случайных величин вида*

$$\tau_{\rho,n} \rightleftharpoons \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n r_{kl}(\rho) \cdot \xi_k \xi_l, \qquad r_{kl}(\rho) \rightleftharpoons \int\limits_0^1 \rho \cdot f_k f_l \, dt,$$

сходится в пространстве $\mathfrak{H}$ к интегралу (5).

Доказательство. Заметим, что для любой пары случайных величин ζ, η с центральным нормальным совместным распределением выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \|\zeta^2 - \eta^2\|^2_{\mathfrak{H}} = \langle (\zeta-\eta)^2, (\zeta+\eta)^2 \rangle_{\mathfrak{H}} \leqslant \|(\zeta-\eta)^2\|_{\mathfrak{H}} \cdot \|(\zeta+\eta)^2\|_{\mathfrak{H}} = \\ = 3\|\zeta-\eta\|^2_{\mathfrak{H}} \cdot \|\zeta+\eta\|^2_{\mathfrak{H}}. \end{aligned}$$

Соответственно, последовательность квадратов частичных сумм ряда из правой части равенства (4) равномерно по параметру $t \in [0,1]$ сходится в пространстве $\mathfrak{H}$ к случайной величине $\xi^2(t)$. Последний факт немедленно влечёт справедливость доказываемого утверждения. □

1.3. Имеют место следующие два факта, связанные с понятиями *ядерного* оператора и оператора *Гильберта – Шмидта* [2, Гл. III, §§ 8–9].

1.3.1. *Пусть R — самосопряжённый ядерный оператор в арифметическом гильбертовом пространстве ℓ_2, а $\{\zeta_i\}_{i=0}^\infty$ — система независимых стандартных нормальных случайных величин. Тогда двойной ряд*

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \sum_{\{i,j\} \in \mathbb{N}^2} R_{ij} \zeta_i \zeta_j \tag{6}$$

сходится в пространстве $\mathfrak{H}$, причём норма его суммы не превосходит ядерной нормы оператора R.

Доказательство. Для любого конечного множества $\mathbb{F} \subset \mathbb{N}^2$ равенства $\|\zeta_i^2\|_{\mathfrak{H}} = \sqrt{3}$ и ортонормированность системы $\{\zeta_i\zeta_j\}_{i>j}$ означают [2, Гл. III, Теорема 8.6] справедливость оценки

$$\left\| \sum_{\{i,j\}\in\mathbb{F}} R_{ij}\zeta_i\zeta_j \right\|_{\mathfrak{H}} \leqslant \sqrt{3}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}|R_{ii}| + \left(2\cdot\sum_{\{i,j\}\in\mathbb{N}^2}|R_{ij}|^2\right)^{1/2} \leqslant (\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot\|R\|_1,$$

где через $\|R\|_1$ обозначена ядерная норма оператора R. Поскольку последовательность $\{R_n\}_{n=0}^{\infty}$ операторов с матричными элементами

$$(R_n)_{ij} \rightleftharpoons \begin{cases} R_{ij} & \text{при } \max(i,j)\leqslant n, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

сходится по ядерной норме к оператору R, полученный результат означает сходимость ряда (6) вместе с выполнением требуемой оценки нормы суммы. $\square$

1.3.2. *Пусть R — самосопряжённый оператор Гильберта – Шмидта в арифметическом гильбертовом пространстве ℓ_2, удовлетворяющий тождеству $R_{ii}\equiv 0$, а $\{\zeta_i\}_{i=0}^{\infty}$ — система независимых стандартных нормальных случайных величин. Тогда двойной ряд*

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{\{i,j\}\in\mathbb{N}^2} R_{ij}\zeta_i\zeta_j$$

сходится в пространстве $\mathfrak{H}$, причём норма его суммы совпадает с нормой Гильберта – Шмидта оператора R.

Справедливость данного утверждения немедленно вытекает из факта ортонормированности системы случайных величин $\{\zeta_i\zeta_j\}_{i>j}$.

2. Винеровский процесс

2.1. Как хорошо известно, винеровский процесс определяется ковариационной функцией

$$\mathcal{K}(t,s) \equiv \frac{t+s}{2} - \left|\frac{t-s}{2}\right|,$$

представляющей собой функцию Грина граничной задачи

$$-y'' - \lambda y = 0,$$
$$y(0) = y'(1) = 0.$$

Соответственно, пространство $\mathfrak{D}$ в этом случае имеет вид

$$\mathfrak{D} = \{y \in W_2^1[0,1] : y(0)=0\}, \qquad \|y\|_{\mathfrak{D}} = \|y'\|_{L_2[0,1]}, \tag{7}$$

а интегральный оператор $J\colon L_2[0,1]\to\mathfrak{D}$ вида

$$[Jy](x)\rightleftharpoons\int\limits_0^x y\,dt$$

представляет собой изометрическую биекцию. Легко проверяется также, что сопряжённая изометрическая биекция $J^*\colon\mathfrak{D}^*\to L_2[0,1]$ действует на функции $y\in L_2[0,1]$ согласно правилу

$$[J^*y](x)\equiv\int\limits_x^1 y\,dt.$$

Ковариационная функция квадрата винеровского процесса имеет вид

$$\mathcal{M}(t,s)\equiv t^2+ts+s^2-|t^2-s^2|.$$

Непосредственным вычислением легко проверяется справедливость следующего утверждения.

2.1.1. *Для любых функции $y\in L_2[0,1]$ и её первообразной $Y\rightleftharpoons -J^*y$ выполняется равенство*

$$\|y\|^2_{\mathfrak{M}}=\left(\int\limits_0^1 Y\,dt\right)^2+4\int\limits_0^1 t\,Y^2\,dt. \tag{8}$$

Из соотношения (8), в частности, вытекает справедливость следующего факта.

2.1.2. *Пространство $\mathfrak{D}^*$ непрерывным образом вложено в пространство $\mathfrak{M}$.*

Далее мы будем использовать символ $\mathfrak{B}(\mathfrak{D},\mathfrak{D}^*)$ для обозначения пространства ограниченных линейных операторов, отображающих пространство $\mathfrak{D}$ в пространство $\mathfrak{D}^*$. Оператор класса $\mathfrak{B}(\mathfrak{D},\mathfrak{D}^*)$ мы будем называть *мультипликатором*, если он допускает представление в виде предела (хотя бы в смысле сильной операторной топологии) некоторой последовательности операторов умножения на обычные непрерывные функции.

2.1.3. *Всякий элемент пространства $\mathfrak{M}$ определяет некоторый мультипликатор класса $\mathfrak{B}(\mathfrak{D},\mathfrak{D}^*)$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную функцию $\rho\in C[0,1]$ и отвечающую ей гладкую функцию $P\rightleftharpoons J^*\rho$. Норма самосопряжённого оператора $R\colon\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}^*$ умножения на функцию ρ допускает вытекающие из (7) и (8) оценки

$$\|R\|=\sup_{\|y\|_{\mathfrak{D}}=1}\left|\int\limits_0^1\rho\cdot y^2\,dt\right|=2\sup_{\|y'\|_{L_2[0,1]}=1}\left|\int\limits_0^1 P\cdot yy'\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\sup_{\|y'\|_{L_2[0,1]}=1}\int\limits_0^1\sqrt{t}|P|\cdot|y'|\,dt=2\left(\int\limits_0^1 tP^2\,dt\right)^{1/2}\leqslant\|\rho\|_{\mathfrak{M}}.$$

Соответственно, всякая сходящаяся в пространстве $\mathfrak{M}$ последовательность непрерывных функций определяет сходящуюся в смысле равномерной операторной топологии последовательность операторов умножения. $\square$

2.2. Опираясь на обычное понимание [3], [4], [5] задач Штурма – Лиувилля с коэффициентами – мультипликаторами, можно сформулировать следующее утверждение.

2.2.1. *Пусть обобщённая функция $\rho \in \mathfrak{D}^*$ определяет ядерный мультипликатор класса $\mathfrak{B}(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^*)$. Пусть также $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ есть последовательность всех (занумерованных в произвольном порядке) собственных значений граничной задачи*

$$\begin{gathered} -y'' - \lambda \rho y = 0, \\ y(0) = y'(1) = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Тогда выполняется равенство

$$\int\limits_0^1 \rho \cdot \xi^2 \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-1} \xi^2_{I^{-1} y_n}, \tag{10}$$

где символы ξ_φ и I имеют тот же смысл, что и в пункте 1.1, а y_n суть отвечающие собственным значениям λ_n собственные функции задачи (9), нормированные в пространстве $\mathfrak{D}$.

Доказательство. Зафиксируем в пространстве $\mathfrak{D}$ ортонормированный базис $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ вида

$$f_k(x) \equiv \frac{\sqrt{8}\, \sin[\pi \cdot (k + 1/2)x]}{\pi \cdot (2k+1)} \tag{11}$$

и свяжем с ним систему $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$ независимых стандартных нормальных случайных величин $\xi_k \rightleftharpoons \xi_{I^{-1} f_k}$. Сопоставим произвольной обобщённой функции $\rho \in \mathfrak{D}^*$ две случайные величины

$$\begin{aligned} \tau_\rho^{\mathbf{d}} &\rightleftharpoons \sum_{i=0}^{\infty} r_{ii}(\rho) \cdot \xi_i^2, \\ \tau_\rho^{\mathbf{n}} &\rightleftharpoons \sum_{\{i,j\} \in \mathbb{N}^2} r_{ij}(\rho) \cdot (1 - \delta_{ij}) \cdot \xi_i \xi_j, \end{aligned}$$

где положено $r_{ij}(\rho) \rightleftharpoons \langle \rho, f_i f_j \rangle$ и использован стандартный символ Кронекера δ_{ij}. Вытекающее из определения (11) равенство

$$r_{kk}(\rho) = \frac{4}{\pi \cdot (2k+1)} \int\limits_0^1 P \cdot \sin[\pi \cdot (2k+1)x] \, dx,$$

где положено $P \rightleftharpoons J^* \rho$, гарантирует корректность определения случайной величины $\tau_\rho^{\mathbf{d}}$ и выполнение оценки

$$\|\tau_\rho^{\mathbf{d}}\|_{\mathfrak{H}} \leqslant \sqrt{3} \cdot \|\rho\|_{\mathfrak{D}^*}.$$

Кроме того, ввиду изометричности операторов J и J^*, сингулярные числа определённого обобщённой функцией ρ мультипликатора $R \in \mathfrak{B}(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^*)$ совпадают с таковыми для оператора $J^*RJ\colon L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, представляющего собой интегральный оператор с ядром

$$\mathcal{P}(t,s) \equiv P\left(\frac{t+s}{2} + \left|\frac{t-s}{2}\right|\right).$$

Соответственно, оператор R является оператором Гильберта – Шмидта, что, ввиду 1.3.2, гарантирует корректность определения случайной величины $\tau_\rho^{\mathbf{n}}$ и выполнение оценок

$$\|\tau_\rho^{\mathbf{n}}\|_{\mathfrak{H}} \leqslant \left(2\int_{[0,1]^2} P^2\left(\frac{t+s}{2} + \left|\frac{t-s}{2}\right|\right)\, dtds\right)^{1/2} \leqslant 2\cdot\|\rho\|_{\mathfrak{D}^*}.$$

Заметим теперь, что для любой функции $\rho \in C[0,1]$, согласно 1.2.1, выполняется равенство

$$\tau_\rho = \tau_\rho^{\mathbf{d}} + \tau_\rho^{\mathbf{n}}. \tag{12}$$

Ввиду плотности линейного множества $C[0,1]$ в пространстве $\mathfrak{D}^*$ и того факта, что каждая из случайных величин τ_ρ, $\tau_\rho^{\mathbf{d}}$ и $\tau_\rho^{\mathbf{n}}$ зависит от параметра $\rho \in \mathfrak{D}^*$ непрерывным образом, это означает выполнение равенства (12) и для всякой $\rho \in \mathfrak{D}^*$. Иначе говоря, справедливо равенство

$$\tau_\rho = \sum_{\{i,j\}\in\mathbb{N}^2} r_{ij}(\rho)\cdot\xi_i\xi_j.$$

При этом в случае ядерности порождённого обобщённой функцией ρ мультипликатора последний может быть представлен в виде суммы сходящегося по ядерной норме операторного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^{-1}\langle I^{-1}y_n, \cdot\rangle\, I^{-1}y_n.$$

Последнее, вкупе с вытекающими из (3) равенствами

$$\sum_{\{i,j\}\in\mathbb{N}^2} \langle I^{-1}y_n, f_i\rangle\cdot\langle I^{-1}y_n, f_j\rangle\cdot\xi_i\xi_j = \xi^2_{I^{-1}y_n},$$

ввиду 1.3.1 как раз и означает справедливость доказываемого утверждения. □

В случае неотрицательности мультипликатора ρ утверждение 2.2.1 хорошо известно и составляет — вместе с асимптотиками бесконечномерных χ^2-распределений — основу теории малых уклонений винеровского процесса (см., например, [6], [7]). В общем случае это утверждение указывает возможные теоретико-вероятностные приложения спектральных асимптотик задачи Штурма – Лиувилля с индефинитным весом (см., например, [4], [5]).

Фигурирующее в формулировке утверждения 2.2.1 условие ядерности задаваемого обобщённой функцией $\rho \in \mathfrak{D}^*$ мультипликатора носит содержательный характер: существуют обобщённые функции, для которых левая сторона равенства (10) осмысленна, в то время как ряд из правой стороны расходится в пространстве $\mathfrak{H}$. Установлению этого факта посвящается следующий параграф.

3. Пример неядерного мультипликатора

3.1. Обозначим через ρ_n, где $n \geqslant 1$, обобщённые функции вида

$$\rho_n \rightleftharpoons \sum_{k=1}^{n} \left(\boldsymbol{\delta}_{(k-1/2)/n} - \boldsymbol{\delta}_{k/n} \right).$$

Имеет место следующий факт.

3.1.1. *Пусть $\lambda_{m,n}$ есть m-ое снизу положительное собственное значение граничной задачи*

$$-y'' - \lambda \rho_n y = 0, \tag{13}$$

$$y(0) = y(1) = 0. \tag{14}$$

Тогда независимо от выбора величины $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\lambda_{m,n} < 2\pi m + \varepsilon$.

Доказательство. Введём обозначения

$$\omega_{k,n}(\lambda) \rightleftharpoons y_n(\lambda, k/n), \qquad \omega^+_{k,n}(\lambda) \rightleftharpoons y'_n(\lambda, (k/n) + 0),$$

где $y_n(\lambda, \cdot)$ есть решение уравнения (13) при начальных условиях $y(0) = 0$ и $y'(0) = 1$. Как легко проверяется прямым вычислением, для всех $k = 0, ..., n-1$ справедливы равенства

$$\begin{pmatrix} \omega_{k+1,n}(\lambda) \\ \omega^+_{k+1,n}(\lambda) \end{pmatrix} = \frac{1}{2n} \begin{pmatrix} 2n - \lambda & 2 - \lambda/(2n) \\ -\lambda^2 & 2n + \lambda - \lambda^2/(2n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_{k,n}(\lambda) \\ \omega^+_{k,n}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Это немедленно влечёт выполнение тождества

$$\begin{pmatrix} \omega_{n,n}(\lambda) \\ \omega^+_{n,n}(\lambda) \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{2n} \begin{pmatrix} 2n - \lambda & 2 - \lambda/(2n) \\ -\lambda^2 & 2n + \lambda - \lambda^2/(2n) \end{pmatrix} \right]^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а тогда и равномерную на каждом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ сходимость функциональной последовательности $\{y_n(\cdot, 1)\}_{n=1}^{\infty}$ к функции $\omega \in C(\mathbb{R})$ вида

$$\omega(\lambda) \rightleftharpoons \begin{cases} 1 & \text{при } \lambda = 0, \\ \dfrac{2\sin(\lambda/2)}{\lambda} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Последнее означает справедливость доказываемого утверждения. □

Отметим без доказательства, что несколько более детальное исследование позволило бы установить, что m-ые снизу положительные собственные значения граничных задач (13), (14) при $n \to \infty$ в точности стремятся к величине $2\pi m$.

3.2. Обозначим через $\rho_{N,n}$, где N, $n \geqslant 1$, обобщённые функции вида

$$\rho_{N,n} \rightleftharpoons \sum_{k=1}^{n} \left(\boldsymbol{\delta}_{(n+k-1/2)/(2^N n)} - \boldsymbol{\delta}_{(n+k)/(2^N n)}\right).$$

Тривиальным образом, согласно 2.1.1, имеют место равенства

$$\|\rho_{N,n}\|^2_{\mathfrak{D}^*} = 2^{-N-1},$$

означающие сходимость ряда

$$\rho_\nu \rightleftharpoons \sum_{N=1}^{\infty} \rho_{N,\nu_N}$$

в пространстве $\mathfrak{D}^*$ независимо от выбора последовательности $\nu \rightleftharpoons \{\nu_N\}_{N=1}^{\infty}$. Символы $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{D}^*$ здесь использованы для обозначения тех же пространств, что и в параграфе 2.

Вариационные принципы для уравнения Штурма – Лиувилля с сингулярным весом (см., например, [4], [5]) показывают, что m-ое снизу положительное собственное значение граничной задачи

$$-y'' - \lambda\rho_\nu y = 0, \tag{15}$$
$$y(0) = y'(1) = 0 \tag{16}$$

заведомо мажорируется m-ым снизу положительным собственным значением граничной задачи

$$-y'' - \lambda\rho_{N,\nu_N} y = 0,$$
$$y(2^{-N}) = y(2^{-N+1}) = 0.$$

Тем самым, согласно 3.1.1, выбором последовательности $\{\nu_N\}_{N=1}^{\infty}$ можно добиться того, чтобы при всяком $m \geqslant 10$ соответствующее собственное значение задачи (15), (16) мажорировалось величиной $2\pi m \ln m$. Это означает отсутствие безусловной сходимости ряда из величин, обратных к собственным значениям задачи (15), (16), а потому и неядерность определяемого обобщённой функцией ρ_ν мультипликатора класса $\mathfrak{B}(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^*)$.

Автор выражает признательность проф. А. И. Назарову и проф. И. А. Шейпаку за ценные обсуждения.

Список литературы

[1] И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов*, Наука, М., 1977.

[2] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965.

[3] М. И. Нейман-заде, А. А. Шкаликов, “Операторы Шрёдингера с сингулярными потенциалами из пространств мультипликаторов”, *Матем. заметки*, **66**:5 (1999), 723–733.

[4] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак, “Самоподобные функции в пространстве $L_2[0,1]$ и задача Штурма – Лиувилля с сингулярным индефинитным весом”, *Матем. сб.*, **197**:11 (2006), 13–30.

[5] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак, “Индефинитная задача Штурма – Лиувилля для некоторых классов самоподобных весов”, *Труды МИАН им. В.А. Стеклова*, **255** (2006), 88–98.

[6] M. A. Lifshits, “On the lower tail probabilities of some random series”, *Ann. Prob.*, **25**:1 (1997), 424–442.

[7] А. И. Назаров, “Логарифмическая асимптотика малых уклонений для некоторых гауссовских процессов в L_2-норме относительно самоподобной меры”, *Записки науч. семин. ПОМИ*, **311** (2004), 190–213.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 10 апреля 2015 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 13-01-00705-а)

Vladimirov A. A. Some remarks on integral parameters of Wiener process. Far Eastern Mathematical Journal. 2015. V. 15. № 2. P. 156–165.

ABSTRACT

It is shown that if generalized function $\rho \in W_2^{-1}[0,1]$ is a multiplier of trace-class from space $W_2^1[0,1]$ to space $W_2^{-1}[0,1]$ then the distribution of stochastic variable $\int_0^1 \rho\xi^2\,dt$ (where ξ is a Wiener process) is determined by the spectrum of the boundary problem

$$-y'' = \lambda\rho y, \qquad y(0) = y'(1) = 0,$$

as in the case when ρ is a measure. An example of generalized function $\rho \in W_2^{-1}[0,1]$ that is not a multiplier of trace-class from $W_2^1[0,1]$ to $W_2^{-1}[0,1]$ is also given.

Key words: *generalized function, multiplier, Wiener process, operator of trace-class.*