

УДК 531.36, 531.53  
MSC2010 70E55, 70H12, 70H14

© М. А. Гузев, А. А. Дмитриев<sup>1</sup>

## Стабильность связанных маятников

Рассматривается система двух связанных маятников и модифицированная система маятников, стержни которых пересекаются и скользят без трения друг относительно друга. Маятники расположены в фиксированной вертикальной плоскости однородного поля тяжести и их взаимодействие описывается потенциалом, зависящим от расстояния. Для обеих систем показано, что существуют симметричные и несимметричные равновесные состояния относительно вертикальной оси. Устойчивость состояний зависит от параметров, определяемых потенциалом взаимодействия и расстоянием между точками подвеса. Для потенциалов Гука и Кулона построены области устойчивости в плоскости этих параметров.

Ключевые слова: *связанные маятники, равновесие, стабильность.*

## Введение

Механические осцилляторы часто используются для модельного рассмотрения различных физических процессов и явлений. Хорошо известна модель симпатичных маятников [1]: так называют два связанных маятника, имеющих одинаковую длину и одинаковую массу материальных точек, прикрепленных к каждому из концов, взаимодействие между точками осуществляется пружиной. Случай малых линейных колебаний в окрестности положения равновесия подробно изучен и описан в научной литературе [1].

В современных условиях исследователь, используя поисковые системы типа Google, Yandex и др., может найти достаточно много работ, где представлены различные свойства систем осцилляторного типа. Несмотря на изученность модели связанных маятников, новые результаты о её свойствах по-прежнему появляются в научном информационном пространстве. В частности, влияние симметрии начальной конфигурации системы на частоты нормальных колебаний изучено в

---

<sup>1</sup>Институт прикладной математики ДВО РАН, 690041, Владивосток, ул. Радио, 7. Электронная почта: guzev@iam.dvo.ru, dmitriev@iam.dvo.ru

статье [2], где авторы определили начальный угол, приводящий к независимому набору частот системы. В линейном приближении были изучены нормальные колебания для системы маятников, связанных жестким стержнем [3]. Авторы [3] рассмотрели также модифицированную модель, в которой стержни пересекаются, и показали наличие устойчивого равновесия для случая, когда маятники расположены несимметрично относительно вертикальной оси. Исследование поведения системы двух связанных маятников при других условиях можно найти, например, в [4–6].

Физически интересные эффекты наблюдаются для перевернутых маятников. Хорошо известно, что если подвес совершает принудительные колебания в вертикальном направлении при достаточно больших значениях частоты и амплитуды осцилляций, то тенденция к опрокидыванию отсутствует, т. е. наблюдается явление динамической стабилизации перевернутого положения. Теоретическое предсказание этого явления впервые было сделано в [7], а физическое объяснение динамической стабилизации перевернутого маятника предложено П. Л. Капицей [8]. Эта система, получившая название «маятник Капицы», привлекла внимание многих исследователей, а подробную библиографию исследований на эту тему можно найти в [9].

Уточненный критерий динамической стабилизации перевернутого маятника был предложен в [10]. Исследование устойчивости двух перевернутых маятников, связанных линейной упругой пружиной, выполнено в [11]. Характерной особенностью поведения этой системы является существование бифуркационных режимов. В частности, при рассмотрении взаимодействующих маятников в поле силы тяжести отношение потенциальной энергии маятника к эффективной энергии пружины определяет бифуркационный параметр  $\beta$  системы. В зависимости значений параметра выделяют различные положения равновесия системы и семейства движений [11].

Эффекты критического поведения системы связанных маятников важны для понимания физической природы разных явлений. На уровне макромасштаба эти эффекты играют существенную роль в изучении хрупкости и нестабильности горных пород [12], а на уровне микромасштаба они влияют на формирование полосы пропускания для фотонных кристаллов, которые представляют собой решетки связанных осцилляторов [13]. Следует также указать на применение результатов исследования поведения перевернутых маятников в микротехнике при создании приборов с целью вращения малых тел или отдельных микромолекул [14].

Приведенный краткий обзор литературы показывает, что модель связанных маятников широко используется при параметризации внутренних взаимодействий в системах. Целью данной работы является изучение устойчивости равновесных решений системы двух связанных маятников, зависящих от энергетического параметра  $\beta$  и кинематического параметра  $\mu$ , определяемого отношением расстояния между точками подвеса маятников к длине маятника. Сразу отметим, что в поле зрения нашего исследования будут включены как модель симпатичных маятников [1], так и модифицированная модель двух связанных маятников [3].

# 1. Постановка задачи

## 1.1. Основные уравнения

Рассмотрим два математических маятника длины  $l$  и массы  $m$  в однородном поле тяжести. Предполагается, что точки подвеса  $O_1$  и  $O_2$  маятников расположены на неподвижной горизонтальной прямой, а расстояние между точками подвеса постоянно и равно  $a$ . Невесомая упругая пружина связывает массы, так что расположение точек прикрепления  $B_1, B_2$  совпадает с положением масс. Предполагается, что движение маятников происходит в фиксированной вертикальной плоскости, проходящей через отрезок  $O_1 O_2$  (рис. 1).

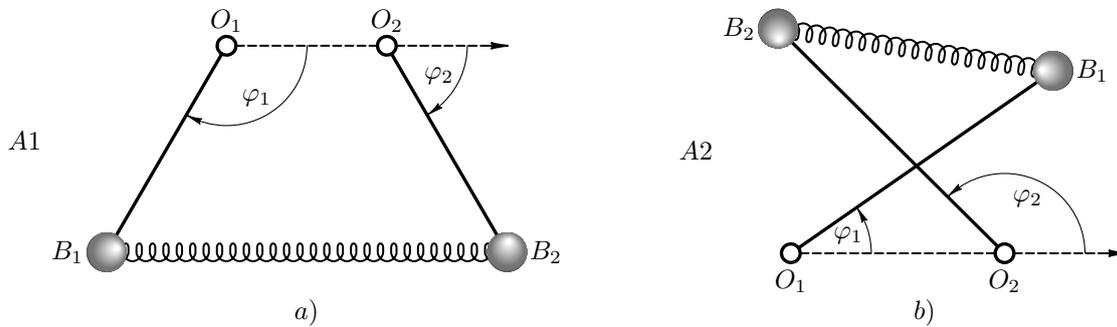


Рис. 1. Модель симпатичных маятников (а) и модифицированная модель маятников (б).  
( $O_1 B_1 = O_2 B_2 = l$ ,  $O_1 O_2 = a$ ,  $B_1 B_2 = d$ ).

Положение маятников зададим углами  $\varphi_1, \varphi_2$ , которые они составляют с горизонтальной прямой, и будем представлять маятники расположенными в фиксированной вертикальной плоскости, проходящей через горизонтально находящиеся точки подвеса. Кинетическая энергия маятников равна [1]

$$T = \frac{ml^2}{2} (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2). \quad (1)$$

Потенциальная энергия  $U$  складывается из энергии силы тяжести материальных точек и энергии их взаимодействия [1]. Для маятников потенциальная энергия  $U$  дается формулой

$$U = kf \left( \frac{d}{l} \right) - mgl(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2). \quad (2)$$

Величина  $d$  равна длине пружины

$$d = \sqrt{[a + l(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)]^2 + l^2(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)^2}.$$

Функция  $f$  определяет вид потенциальной энергии взаимодействия маятников, параметр  $k$  характеризует размерность энергии, а углы  $\varphi_1, \varphi_2$  принадлежат интервалу  $(-\pi, \pi)$ . Из (1)–(2) следует, что лагранжиан системы маятников равен

$$L = T - U = \frac{ml^2}{2} (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) - kf \left( \frac{d}{l} \right) + mgl(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2). \quad (3)$$

Переходя к безразмерной переменной времени  $\tau = t\sqrt{2g/l}$  и лагранжиану  $\Lambda = L/2mgl$ , запишем формулу (3) в виде

$$\begin{aligned}\Lambda &= \frac{1}{2}(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) - \Pi, & \Pi &= \Pi(\varphi_1, \varphi_2) = \beta f(s) - \frac{1}{2}(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2), \\ s^2 &= \left[ \mu + \frac{1}{2}(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1) \right]^2 + \frac{1}{4}(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)^2, \\ \mu &= \frac{a}{2l}, & \beta &= \frac{k}{2mgl}.\end{aligned}\quad (4)$$

Дифференциальные уравнения движения маятников в форме уравнений Лагранжа второго рода имеют вид

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\varphi}_i} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \varphi_i} \Leftrightarrow \ddot{\varphi}_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_i}, \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

В данной работе мы ограничимся случаем, когда  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  имеют одинаковые знаки. Маятники могут располагаться как ниже горизонтальной линии подвеса — область A1 (рис. 1 а), так и выше этой горизонтальной линии — область A2 (рис. 1 б). При одновременной замене знаков величина  $s$  не изменяется, а знак «минус» при разности синусов переходит в «плюс». Кроме того,  $\Pi(\pi - \varphi_2, \pi - \varphi_1) = \Pi(\varphi_1, \varphi_2)$ , т. е. функция  $\Pi$  симметрична относительно прямой  $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$ , поэтому значения углов  $\varphi_1, \varphi_2$  можно рассматривать лишь в треугольнике

$$\Delta = \{(\varphi_1, \varphi_2) : 0 \leq \varphi_1 \leq \pi, 0 \leq \varphi_2 \leq \pi - \varphi_1\}$$

в качестве области определения этой функции, если ввести коэффициент  $\varepsilon$ , полагая, что области A1 он равен +1, а области A2 — -1, при этом потенциал  $\Pi$  запишется в виде

$$\Pi(\varphi_1, \varphi_2) = \beta f(s) - \frac{\varepsilon}{2}(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2).$$

Для модели симпатичных маятников сумма проекций длин стержней на ось точек подвеса меньше  $a$ , что приводит к условию

$$l[\cos \varphi_1 + \cos(\pi - \varphi_2)] \leq a. \quad (6)$$

Однако рассматриваемая лагранжева система уравнений (5) допускает решения, соответствующие модифицированной модели, в которой стержни маятников пересекаются, но скользят без трения относительно друг друга. Так как движение маятников предполагается в фиксированной вертикальной плоскости, то для обеспечения такого движения можно предполагать, например, что стержни маятников скреплены невесомым кольцом. Для такой модели сумма проекций длин стержней на ось точек подвеса больше  $a$ , при этом в условии (6) знак неравенства изменится на противоположный. На рис. 1 б) изображена модифицированная модель в области A2.

Равновесные положения системы маятников характеризуются условием  $\ddot{\varphi}_i = 0$ , тогда, как следует из (5), они определяются критическими точками её потенциальной энергии:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} = \beta f'(s) \frac{\partial s}{\partial \varphi_1} - \frac{\varepsilon}{2} \cos \varphi_1 = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} = \beta f'(s) \frac{\partial s}{\partial \varphi_2} - \frac{\varepsilon}{2} \cos \varphi_2 = 0. \quad (7)$$

## 1.2. Переход к переменным $x, y$

Введем вместо углов  $\varphi_1, \varphi_2$  координаты  $x, y$ , полагая  $x = \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$ ,  $y = \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ . При таком преобразовании рассматриваемой областью определения потенциала  $\Pi$  является треугольник  $\Delta = \{(x, y) : |x| \leq y, 0 \leq y \leq 1\}$ . Отметим, что использованное преобразование координат является суперпозицией линейного преобразования  $\theta_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$ ,  $\theta_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$  ( $|\theta_1| \leq \theta_2, 0 \leq \theta_2 \leq \pi/2$ ) и преобразования  $x = \sin \theta_1$ ,  $y = \sin \theta_2$ . Якобиан  $J = 1/2 \cos \theta_1 \cos \theta_2$  этого преобразования обращается в нуль при  $\theta_1 = \pm\pi/2$  и  $\theta_2 = \pi/2$ . Первое условие приводит к соотношению  $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm\pi$ . Так как  $\varphi_1, \varphi_2$  принадлежат треугольнику  $\Delta$ , то  $\varphi_1 = \pi, \varphi_2 = 0$  или  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi$ . Поскольку в этих точках  $\partial s / \partial \varphi_1 = \partial s / \partial \varphi_2 = 0$ , то условие равновесия (7) не выполняется. Второе условие означает, что преобразование  $(\varphi_1, \varphi_2) \rightarrow (x, y)$  вырождено на отрезке прямой  $y = 1, |x| < 1$ , поэтому мы будем рассматривать соответствующие положения равновесия фактически в координатах  $\theta_1, \theta_2$ , используя  $x$  и  $y$  в качестве замены переменных при решении уравнений (7).

Линейное преобразование приводит потенциал  $\Pi$  к виду

$$\Pi(\theta_1, \theta_2) = \beta f(s) - \varepsilon \cos \theta_1 \sin \theta_2, \quad s^2 = \sin^2 \theta_1 + 2\mu \sin \theta_1 \sin \theta_2 + \mu^2.$$

В силу (7) критические точки определяются системой уравнений

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial x} \cos \theta_1 = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_2} = \frac{\partial \Pi}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \theta_2} = \frac{\partial \Pi}{\partial y} \cos \theta_2 = 0. \quad (8)$$

Система (8) распадается на две системы уравнений

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0, \quad \cos \theta_2 = 0, \quad (9)$$

и

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y} = 0. \quad (10)$$

В (9) условие  $\cos \theta_2 = 0$  означает, что  $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$  и  $y = 1$ . Следуя [11] положения равновесия маятников, для которых выполнено это условие, будем называть симметричными положениями равновесия второго типа. Если  $\varphi_1 = \varphi_2$ , то такие положения равновесия будем называть симметричными положениями равновесия первого типа, при этом  $\sin \theta_1 = 0$  или  $x = 0$ .

Для симметричных положений равновесия первого типа  $x=0$  и  $\partial \Pi / \partial y = -\varepsilon \neq 0$ , поэтому равновесия определяются из системы (9) и условия  $s = \mu$ . Отсюда следует, что критические точки потенциала  $\Pi$  являются решениями уравнения

$$f'(\mu) = 0. \quad (11)$$

Для симметричных положений равновесия второго типа справедливо условие  $\cos \theta_2 = 0$  или  $y = 1$ , поэтому  $s = |x + \mu|$  и  $\partial \Pi / \partial x = 0$ . Отсюда и из (4) получаем уравнения для критических точек потенциала  $\Pi$

$$\beta \operatorname{sign}(x + \mu) f'(s) + \varepsilon \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = 0. \quad (12)$$

Несимметричные положения равновесия определяются системой (10). В координатах  $x, y$  функция  $\Pi$  запишется в виде

$$\Pi(x, y) = \beta f(s) - \varepsilon \sqrt{1 - x^2} \cdot y, \quad s^2 = x^2 + 2\mu xy + \mu^2. \quad (13)$$

Для частных производных при  $s \neq 0$  справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial x} &= \beta \frac{f'(s)}{s} (x + \mu y) + \varepsilon \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} y, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial y} &= \beta \mu \frac{f'(s)}{s} x - \varepsilon \sqrt{1 - x^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Исключив  $f'(s)/s$  в (14), получим

$$\begin{aligned} \beta \mu \frac{f'(s)}{s} x - \varepsilon \sqrt{1 - x^2} &= 0, \\ \mu y + x(1 - x^2) &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя второе уравнение системы (15) в выражение для  $s$  из (13), приходим к равенству

$$s^2 = 2x^4 - x^2 + \mu^2.$$

При исследовании несимметричных положений равновесия это равенство позволяет ограничиться решениями лишь первого уравнения системы (15). В дальнейшем мы будем ссылаться на систему (15), подразумевая только первое уравнение.

Условие (6) для симпатичных маятников приобретает вид

$$\mu + xy \geq 0, \quad (16)$$

а в случае модифицированной модели —

$$\mu + xy < 0. \quad (17)$$

### 1.3. Матрицы вторых производных для положений равновесия

Поведение потенциала  $\Pi$  в окрестности критической точки определяется матрицей  $\Pi''$  вторых частных производных. Напомним, что критическая точка функции двух переменных будет экстремальной, если диагональные элементы матрицы имеют одинаковые знаки и её определитель положителен. В противном случае критическая точка седловая.

Для вторых частных производных в критической точке справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_1^2} &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} \cos^2 \theta_1 - \frac{\partial \Pi}{\partial x} \sin \theta_1, & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_2^2} &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} \cos^2 \theta_2 - \frac{\partial \Pi}{\partial y} \sin \theta_2 \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y} \cos \theta_1 \cos \theta_2. \end{aligned}$$

Вторые частные производные по  $x$  и  $y$  равны:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} &= \beta \left[ g(s)(x + \mu y)^2 + \frac{f'(s)}{s} \right] + \varepsilon \frac{y}{(1-x^2)^{3/2}}, \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y} &= \beta \mu \left[ g(s)(x + \mu y)x + \frac{f'(s)}{s} \right] + \varepsilon \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} &= \beta g(s)(\mu x)^2,\end{aligned}\tag{18}$$

где  $g(s) = \frac{1}{s} \left( \frac{f'(s)}{s} \right)' = \frac{1}{s^2} \left[ f''(s) - \frac{f'(s)}{s} \right]$ .

В симметричном равновесном состоянии  $\cos \theta_2 = \frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0$  и  $y = \sin \theta_2 = 1$ , поэтому

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_1^2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} \cos^2 \theta_1, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_2^2} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}.$$

Поведение потенциала  $\Pi$  в окрестности критической точки определяется знаками выражений  $\Pi_{11} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}$  и  $\Pi_{22} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial \Pi}{\partial y}$ . Учитывая, что  $s = |\mu + x|$ , и выразив  $\beta f'(s)$  из равенства (12), вычислим  $\Pi_{22}$ :

$$\Pi_{22} = -\beta \mu \frac{f'(s)}{s} x + \varepsilon \sqrt{1-x^2} = \varepsilon \mu \frac{\text{sign}(x + \mu)x^2}{|x + \mu|\sqrt{1-x^2}} + \varepsilon \sqrt{1-x^2} = \varepsilon \frac{\mu + x(1-x^2)}{(\mu + x)\sqrt{1-x^2}}.$$

Следовательно, для решения  $\tilde{x}$  уравнения (12) справедливы равенства

$$\Pi_{11} = \beta f''(|\mu + \tilde{x}|) + \frac{\varepsilon}{(1-\tilde{x}^2)^{3/2}} \quad \text{и} \quad \Pi_{22} = \varepsilon \frac{\mu + \tilde{x}(1-\tilde{x}^2)}{(\mu + \tilde{x})\sqrt{1-\tilde{x}^2}}.\tag{19}$$

Поведение потенциала  $\Pi$  в окрестности критической точки в несимметричном положении равновесия определяется равенствами (18) с учётом (15).

Для вторых частных производных в точке  $x$ , являющейся решением уравнения (15), получим формулы

$$\begin{aligned}\Pi_{11} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} &= \beta g(s)x^6 + \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{1-2x^2}{x\sqrt{1-x^2}}, & \Pi_{22} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} &= \beta g(s)(\mu x)^2, \\ \Pi_{12} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y} &= \beta \mu g(s)x^4 + \frac{\varepsilon}{x\sqrt{1-x^2}},\end{aligned}\tag{20}$$

используя которые несложно установить, что

$$\det \Pi'' = \varepsilon \beta \mu g(s) \frac{x(1-4x^2)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{x^2(1-x^2)}.\tag{21}$$

## 2. Симметричные положения равновесия

### 2.1. Симпатичные маятники

#### Равновесия первого типа.

Из равенств  $\sin \theta_1 = 0$  и  $\cos \theta_2 = 0$  вытекает, что  $\varphi_1 = \varphi_2 = \pm\pi/2$ . Условие  $f'(s) = 0$  является необходимым и достаточным, чтобы точка  $\varphi_1 = \varphi_2 = \pm\pi/2$  была критической точкой потенциала  $\Pi$ .

Действительно, из равенства  $\partial\Pi/\partial x = 0$  следует, что  $x = 0$ . Так как  $\partial\Pi/\partial y \neq 0$ , то  $\cos \theta_2 = 0$ , т. е.  $y = 1$ . Тогда  $s = \mu$ , следовательно,

при всех значениях параметров  $\mu$  и  $\beta$  точка  $\varphi_1 = \varphi_2 = \pm\pi/2$  будет критической тогда и только тогда, когда справедливо (11). Если эта точка критическая, то  $\Pi_{11} = \beta f''(\mu) + \varepsilon$  и  $\Pi_{22} = \varepsilon$ , поэтому в области  $A1$   $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$  является точкой минимума потенциала  $\Pi$  (устойчивым положением равновесия) при  $\beta f''(\mu) + 1 > 0$  и седловой точкой при  $\beta f''(\mu) + 1 < 0$ , а в области  $A2$   $\varphi_1 = \varphi_2 = -\pi/2$  — точкой максимума потенциала  $\Pi$  при  $\beta f''(\mu) - 1 < 0$  и седловой точкой при  $\beta f''(\mu) - 1 > 0$ .

Других положений равновесия первого типа потенциал  $\Pi$  не имеет.

#### Равновесия второго типа.

Для положений равновесия второго типа  $s = \mu + x$ . Критические точки являются решениями уравнения

$$\beta f'(\mu + x) + \varepsilon k(x) = 0, \quad \text{где} \quad k(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (22)$$

Функция  $k(x)$  является нечётной, положительной, возрастающей и выпуклой на интервале  $(0, 1)$ . Так как  $k(x)$  принимает все вещественные значения, то в случае, когда  $f'(s)$  непрерывна на  $(0, 1 + \mu]$  и

$$\beta f'(0) > k(\mu) \quad (\text{область } A1) \quad \text{или} \quad f'(0) < -k(\mu) \quad (\text{область } A2), \quad (23)$$

уравнение (22) имеет по крайней мере одно решение. Очевидно, что условия (23) гарантируют существование решений уравнения (22), но не являются единственно возможными.

Устойчивость положения равновесия определяется выражениями (19).

На отрезке  $[-1, 0]$   $x(1-x^2) > x$  и  $x(1-x^2) \geq 0$  при  $x \geq 0$ , поэтому  $\Pi_{22} > 0$  в области  $A1$  для любого решения  $\tilde{x}$  уравнения (18). Следовательно, для модели симпатичных маятников в области  $A1$  симметричные положения равновесия устойчивы тогда и только тогда, когда  $\Pi_{11} > 0$ . В частности, это справедливо, если функция  $f''(s)$  положительна при  $0 < s < 1 + \mu$ .

В области  $A2$   $\Pi_{22} < 0$ , поэтому в этой области симметричные положения равновесия неустойчивы.

### 2.2. Модифицированная модель

Модифицированная модель маятников реализуется, если  $-1 < x < -\mu$ ,  $s = -(x + \mu)$ , а уравнение (12) приобретает вид

$$-\beta f'(-(\mu + x)) + \varepsilon k(x) = 0. \quad (24)$$

В критической точке величины  $\Pi_{11}$ ,  $\Pi_{22}$  задаются формулами (19). Знак  $\Pi_{22}$  зависит от корней уравнения

$$p(x, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \mu + x(1 - x^2) = 0. \quad (25)$$

Кубическая парабола  $p(x, \mu)$  на интервале  $(-1, 0)$  принимает максимальное значение  $\mu_* \stackrel{\text{def}}{=} 2/3\sqrt{3}$  при  $x_* \stackrel{\text{def}}{=} -1/\sqrt{3}$ . При  $0 < \mu < \mu_*$  уравнение (25) имеет два решения

$$x_1(\mu) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\phi(\mu) + \frac{\pi}{6}\right), \quad x_2(\mu) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \phi(\mu)\right),$$

где

$$\phi(\mu) = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{\mu}{\mu_*}\right).$$

Пусть  $\mu^* \stackrel{\text{def}}{=} 1/2\sqrt{2}$  и  $x^* \stackrel{\text{def}}{=} -1/\sqrt{2}$ . Так как  $x^* < x_*$ ,  $p(-1, \mu) = p(0, \mu) = \mu$ ,  $p(-\mu, \mu) = \mu^3 > 0$  и  $p(-2\mu, \mu) = \mu(8\mu^2 - 1) < 0$  при  $\mu < \mu^*$ , то для корней уравнения (25) справедливы неравенства

$$\begin{aligned} -1 < x_1(\mu) < x^* < -2\mu < x_2(\mu) < -\mu, & \text{если } 0 < \mu < \mu^*, \\ -2\mu < x^* < x_1(\mu) < x_2(\mu) < -\mu, & \text{если } \mu^* < \mu < \mu_*, \end{aligned}$$

причём  $x_1(\mu^*) = x^*$  и  $p(x^*, \mu^*) = 0$ . Если  $\mu$  изменяется в интервале  $(0, \mu_*)$ , то  $\phi(\mu)$  принимает значения от  $\pi/6$  до 0, корень  $x_1(\mu)$  пробегает интервал  $(-1, x^*)$ , а  $x_2(\mu) \in (0, x_*)$ .

В области  $A1$ , если  $\mu_* \leq \mu$ , то  $\Pi_{22} < 0$ , т. е. соответствующее решению  $\tilde{x}$  уравнения (24) положение равновесия (если оно существует) неустойчиво.

Если  $0 < \mu < \mu_*$  и  $\Pi_{11} > 0$ , то симметричное положение равновесия соответствующее решению  $\tilde{x}$  уравнения (24), удовлетворяющего условию

$$x_1(\mu) < \tilde{x} < x_2(\mu), \quad (26)$$

устойчиво.

В области  $A2$  при  $\mu_* < \mu$  и решении  $\tilde{x}$  уравнения (24), принадлежащего интервалу  $(-1, -\mu)$ , величина  $\Pi_{22}$  больше нуля. Если  $0 < \mu \leq \mu_*$ , то  $\Pi_{22}$  положительно в случае, когда  $-1 < \tilde{x} < x_1(\mu)$  или  $x_2(\mu) < \tilde{x} < 0$ .

Следовательно, в области  $A2$ , если  $\Pi_{11} > 0$ , то симметричные положения равновесия, соответствующие решениям  $\tilde{x}$  уравнения (24), принадлежащих интервалам  $(-1, x_1(\mu)) \cup (x_2(\mu), 0)$  при  $0 < \mu < \mu_*$ , или удовлетворяющих условию  $-1 < \tilde{x} < -\mu$  при  $\mu_* < \mu < 1$ , устойчивы. Если  $\Pi_{11} < 0$  или для решения уравнения (24) справедливо неравенство (26), то соответствующее положение равновесия неустойчиво.

### 3. Несимметричные положения равновесия

Несимметричные положения равновесия определяются уравнением (15).

Очевидно, что равенство  $\mu y + x(1 - x^2) = 0$  возможно лишь при  $x < 0$ , так как  $\mu > 0$  и  $y > 0$ .

Отметим, что  $p(x, \mu y) = \mu y + x(1 - x^2)$ , т. е. уравнение (25) отличается от второго уравнения в (15) лишь сомножителем  $y$  при  $\mu$ .

Несложно установить, что треугольник  $\Delta$  пересекается с кубической параболой  $p(x, \mu y)$  при

$$\begin{aligned} -\sqrt{1-\mu} \leq x \leq x_1(\mu) \quad \text{и} \quad x_2(\mu) \leq x \leq 0, \quad \text{если} \quad 0 < \mu < \mu_*, \\ -\sqrt{1-\mu} \leq x \leq 0, \quad \text{если} \quad \mu_* \leq \mu < 1, \end{aligned} \quad (27)$$

следовательно, *несимметричные положения равновесия могут существовать лишь при  $0 < \mu < 1$  и определяются решениями  $\tilde{x}$  системы уравнений (15), удовлетворяющих условиям (27).*

Неравенство (16), определяющее модель симпатичных маятников, можно записать в виде

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad y \geq -x \quad \text{при} \quad -1 < x \leq 0.$$

Действительно, так как  $y > 0$  и  $x < 0$ , умножив неравенство (16) на  $y$ , получим

$$y(\mu + xy) = x(x^2 - 1) + xy^2 = x(x^2 + y^2 - 1) \geq 0, \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

С другой стороны, умножив неравенство (16) на  $\mu$  и учитывая второе уравнение в системе (15), приходим к неравенству

$$\mu^2 - x^2(1 - x^2) \geq 0. \quad (28)$$

Решив биквадратное уравнение, определим точки пересечения единичной окружности с кубической параболой  $p(x, \mu y)$ :

$$\hat{x}_1(\mu) = -\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \mu^2}}, \quad \hat{x}_2(\mu) = -\sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \mu^2}}.$$

Симпатичным маятникам соответствует часть кубической параболы  $p(x, \mu y)$ , значения  $x$  которой удовлетворяют неравенствам

$$\hat{x}_2(\mu) \leq x \leq 0 \quad \text{при} \quad 0 < \mu < 1/2 \quad \text{и} \quad -\sqrt{1-\mu} \leq x \leq 0 \quad \text{при} \quad 1/2 \leq \mu < 1. \quad (29)$$

Модифицированная модель маятников характеризуется неравенством (28) с противоположным знаком. Этой модели соответствуют части кубической параболы  $p(x, \mu y)$ , значения  $x$  которой удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} -\sqrt{1-\mu} \leq x \leq x_1(\mu), \quad x_2(\mu) \leq x \leq \hat{x}_2(\mu) \quad \text{при} \quad 0 < \mu < \mu_*, \\ -\sqrt{1-\mu} \leq x \leq \hat{x}_2(\mu) \quad \text{при} \quad \mu_* \leq \mu < 1/2. \end{aligned} \quad (30)$$

*Если  $\mu \geq 1/2$ , то модифицированная модель маятников не реализуется.*

Пусть  $x$  — решение системы уравнений (15) и  $s^2 = 2x^4 - x^2 + \mu^2$ .

*Если  $g(s) < 0$ , то  $\Pi_{22} < 0$ , следовательно, при любых значениях параметров  $\mu, \beta$  соответствующее этому решению несимметричное состояние равновесия неустойчиво.*

При  $g(s) > 0$  неравенство  $\det \Pi'' > 0$  может быть выполнено, если

$$\varepsilon x(1 - 4x^2) > 0. \quad (31)$$

Из неравенства

$$\beta g(s) > \frac{\varepsilon \sqrt{1-x^2}}{\mu x^3(1-x^2)(1-4x^2)} > 0$$

вытекает, что

$$\Pi_{11} > \frac{\varepsilon}{\mu} \left[ \frac{x^3 \sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)(1-4x^2)} + \frac{1-2x^2}{x\sqrt{1-x^2}} \right] = \frac{\varepsilon}{\mu} \frac{(1-3x^2)^2}{x(1-4x^2)\sqrt{1-x^2}} > 0,$$

следовательно, устойчивость несимметричных положений равновесия потенциала  $\Pi$  при условии  $g(s) > 0$  обеспечивается неравенством  $\det \Pi'' > 0$ .

Обозначим левую часть первого уравнения системы (15) через  $h(x)$  и вычислим её производную, учитывая, что  $s^2 = 2x^4 - x^2 + \mu^2$  и  $h(x) = 0$  в критической точке:

$$h'(x) = \beta \mu \left[ g(s)(4x^2 - 1)x^2 + \frac{f'(s)}{s} \right] + \frac{\varepsilon x}{\sqrt{1-x^2}} = -\beta \mu g(s)(1-4x^2)x^2 + \varepsilon \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

Сравнивая  $h'(x)$  и (21) легко видеть, что

$$\det \Pi'' = -\frac{\varepsilon}{x\sqrt{1-x^2}} h'(x).$$

Граница области устойчивости определяется из системы уравнений  $h(x) = 0$ ,  $h'(x) = 0$ .

Подставив  $\varepsilon \sqrt{1-x^2}$  из равенства  $h(x) = 0$  в  $h'(x)$ , получим

$$h'(x) = \frac{\beta \mu}{1-x^2} \left[ g(s)(4x^2 - 1)(1-x^2)x^2 + \frac{f'(s)}{s} \right].$$

Таким образом, граница области устойчивости определяется решением  $\tilde{x}(\mu)$  уравнения

$$\Gamma(x, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} g(s)(4x^2 - 1)(1-x^2)x^2 + \frac{f'(s)}{s} = 0 \quad (32)$$

и определяет функцию  $\varrho(\mu)$  при подстановке  $\tilde{x}(\mu)$  в  $h(x)$ .

С другой стороны, равенство  $\Gamma(x, \mu) = 0$  означает, что решение  $\tilde{x}(\mu)$  уравнения (32) является точкой локального экстремума функции  $h(x)$  и точкой бифуркации решений системы уравнений (15), в которой оно, как правило, распадается на два решения  $\tilde{x}_- < \tilde{x}_+$ , одно из которых устойчиво.

Учитывая, что  $x < 0$ , приходим к выводу, что *несимметричное равновесное состояние маятников, определяемое решением  $\tilde{x}$  системы уравнений (15), будет устойчиво в области  $A_1$ , если  $\Gamma(x, \mu) > 0$ , а в области  $A_2$ , если  $\Gamma(x, \mu) < 0$ . Кроме того, из неравенства (31) следует, что устойчивым состояниям в области  $A_1$  соответствуют решения, удовлетворяющие неравенству  $-1 < \tilde{x} < -1/2$ , а в области  $A_2$  —  $-1/2 < \tilde{x} < 0$ .*

Так как  $\Pi_{22} > 0$  в случае, когда  $g(s) > 0$ , то неустойчивые положения равновесия являются седловыми критическими точками потенциала  $\Pi$ .

В заключение этого пункта отметим, что

$$\begin{aligned} \text{при } x = \hat{x}_{1,2} \quad s = \hat{x}_{1,2}^2(\mu) \quad \text{и} \quad k(x) = -\frac{\hat{x}_{1,2}^2(\mu)}{\mu}, \\ \text{при } x = \sqrt{1-\mu} \quad s = \sqrt{1-3\mu(1-\mu)} \quad \text{и} \quad k(x) = -\sqrt{\frac{1-\mu}{\mu}}. \end{aligned} \quad (33)$$

## 4. Потенциал Гука

В безразмерных координатах потенциал Гука можно записать в виде  $f(s) = \frac{1}{2}(s - \mu)^2$ , причём  $f'(s) = s - \mu$ ,  $f''(s) = 1$  и  $g(s) = \mu/s^3$ . Для графического изображения областей устойчивости удобнее заменить параметр  $\beta$  на  $\nu = 1/\beta$ .

### 4.1. Симметричные положения равновесия

#### Равновесия симпатичных маятников.

Так как  $f'(\mu) = 0$ , то при всех значениях параметров  $\mu$  и  $\nu$  для равновесий первого типа точка  $\varphi_1 = \varphi_2 = \pm\pi/2$  является критической. В области  $A1$  она будет точкой минимума потенциала  $\Pi$ , т. е. устойчивым состоянием равновесия, а в области  $A2$  — седловой точкой при  $0 < \nu < 1$  и точкой максимума при  $\nu > 1$ .

В случае симпатичных маятников второго типа уравнение (12) запишется в виде

$$x \left( \sqrt{1 - x^2} + \varepsilon\nu \right) = 0. \quad (34)$$

Ясно, что при  $x \neq 0$  и  $\varepsilon = 1$  оно не имеет решений, следовательно, в области  $A1$  устойчивым состоянием равновесия симпатичных маятников второго типа является точка  $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$ . Других симметричных равновесных состояний они не имеют.

При  $\varepsilon = -1$ ,  $x \neq 0$  и  $0 < \nu < 1$  уравнение (34) допускает два решения —  $\tilde{x}_{1,2} = \pm\sqrt{1 - \nu^2}$ , причём из условия (16) вытекает, что решение  $\tilde{x}_2 = -\sqrt{1 - \nu^2}$  допустимо, если  $\mu^2 + \nu^2 \geq 1$ .

В области  $A2$  симпатичные маятники при условии  $\mu^2 + \nu^2 \geq 1$  имеют три симметричных равновесных состояния, определяемые значениями  $\tilde{x}$ , равными  $-\sqrt{1 - \nu^2}$ ,  $0$ ,  $\sqrt{1 - \nu^2}$  и два симметричных равновесных состояния —  $0$ ,  $\sqrt{1 - \nu^2}$  при  $\mu^2 + \nu^2 < 1$ .

Так как  $\Pi_{22} < 0$ , то эти состояния неустойчивы. В точках  $\tilde{x}_{1,2}$  величина  $\Pi_{11} = \beta(1 - \beta) < 0$ , поэтому критические точки, определяемые  $\tilde{x}_{1,2}$ , являются точками максимума. Точка  $\tilde{x} = 0$  определяет седловую критическую точку потенциала  $\Pi$ .<sup>1</sup>

#### Равновесия модифицированной модели маятников.

Уравнение (24) модифицированной модели маятников приобретает вид

$$h(x, \mu, \nu) \stackrel{\text{def}}{=} 2\mu + x + \varepsilon\nu k(x) = 0, \quad x \in (-1, -\mu). \quad (35)$$

#### Область $A1$ .

Функция  $h(x, \mu, \nu)$  в области  $A1$  возрастает по  $x$ , стремится к  $-\infty$  при  $x \rightarrow -1$  и положительна в точке  $x = -\mu$  при  $\mu^2 + \nu^2 \leq 1$ . Следовательно, при таких значениях  $\mu$ ,  $\nu$  уравнение (35) имеет единственное решение. Отметим, что  $-\nu k(x)$  является положительной убывающей функцией, а  $\mu + x$  — возрастающей, отсюда следует, что корень  $\tilde{x}$  уравнения (35) — возрастающая функция по  $\nu$  и убывающая

<sup>1</sup>В работе [11] рассматривается поведение маятников в окрестности точки  $\tilde{x} = 0$  при жестком ограничении  $\varphi_1 + \varphi_2 = -\pi$ . В этом случае точка  $\varphi_1 = \varphi_2 = -\pi/2$  устойчива.

по  $\mu$ . Так как  $\Pi_{11} > 0$ , то в области  $A1$  симметричное равновесное состояние модифицированной модели маятников будет устойчивым, если  $\mu^2 + \nu^2 \leq 1$ ,  $0 < \mu < \mu_*$  и для решения уравнения выполнено условие (26).

Область существования симметричных равновесных состояний определена неравенством

$$\nu \leq \sqrt{1 - \mu^2}.$$

Область устойчивых состояний определена кривой  $\varrho(\mu)$ , заданной функциями

$$\nu_{1,2}(\mu) = -\frac{2\mu + x_{1,2}(\mu)}{k(x_{1,2}(\mu))}.$$

Вне области устойчивых состояний критическая точка потенциала  $\Pi$  седловая.

Ветвь  $\nu_1(\mu)$  кривой  $\varrho(\mu)$  определена при  $\mu \in (\mu^*, \mu_*)$  и выпукла, причём  $\nu_1(\mu^*) = 0$  и  $\nu_1(\mu_*) = \nu_2(\mu_*) = \sqrt{2/27}$ . Ветвь  $\nu_2(\mu)$  определена при  $\mu \in (0, \mu_*)$ , вогнута, и  $\nu_2(0) = 1$ . Следовательно, устойчивые состояния могут быть лишь при  $0 < \mu < \mu_*$ .

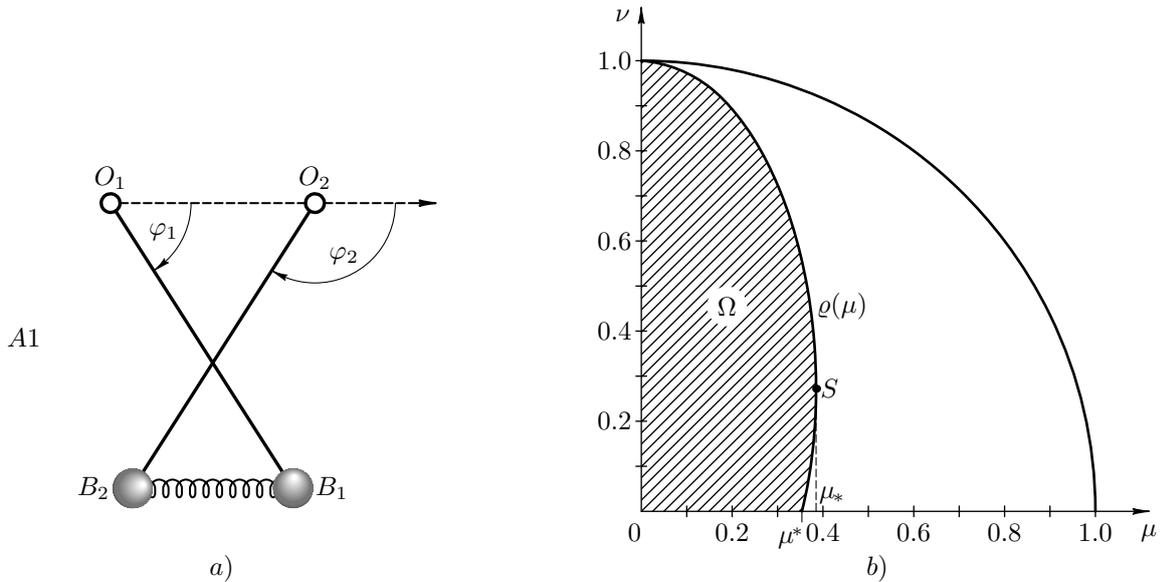


Рис. 2.

На рис. 2 а) изображено симметричное положение равновесия модифицированной модели в области  $A1$ . На рис. 2 б) — область существования симметричных равновесных состояний и область устойчивых состояний равновесия  $\Omega$ ,  $S$  — точка склейки кривых  $\nu_1(\mu)$  и  $\nu_2(\mu)$ .

**Область  $A2$ .**

Функция  $k(x)$  вогнута на интервале  $(-1, 0)$ , поэтому при  $\varepsilon = -1$  графики  $\nu k(x)$  и функции  $2\mu + x$  или пересекаются в двух точках при некоторых значениях параметров, или касаются в точке, являющейся точкой бифуркации параметров  $\mu, \nu$ , или не пересекаются. Точка бифуркации параметров находится из равенств  $\nu k'(x) = 1$  и  $\nu k(x) = 2\mu + x$ , используя которые несложно установить, что

$$\nu(\mu) = (1 - (2\mu)^{2/3})^{3/2} \quad \text{и} \quad \check{x}(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} -(2\mu)^{1/3}, \quad 0 < \mu < \frac{1}{2},$$

причём  $\check{x}(\mu)$  является точкой минимума функции  $h(x, \mu, \nu)$ . Таким образом, уравнение (35) имеет два решения, удовлетворяющих неравенству

$$\tilde{x}_- < \check{x}(\mu) < \tilde{x}_+ < -2\mu < x_2(\mu), \quad \text{если } 0 < \nu < \nu(\mu),$$

и не имеет решений, если  $\nu(\mu) < \nu$ , т. е. область существования решений определена неравенством

$$0 < \nu < (1 - (2\mu)^{2/3})^{3/2}. \quad (36)$$

Неравенство  $\tilde{x}_+ < -2\mu$  вытекает из неравенств  $h(-2\mu, \mu, \nu) > 0$ ,  $h(\check{x}(\mu), \mu, \nu) < 0$ .

Так как  $\Pi_{11} = 1 - \nu k'(x)$ , то  $\Pi_{11} = 0$  в точке  $x_0 = -\sqrt{1 - \nu^{2/3}}$ . Значение функции  $h(x_0, \mu, \nu)$  равно  $2\mu - (1 - \nu^{2/3})^{3/2}$ , причём неравенство  $2\mu - (1 - \nu^{2/3})^{3/2} < 0$  равносильно (36). Так как  $h(0, \mu, \nu) = 2\mu$ , то для корней уравнения (35) справедливы неравенства  $\tilde{x}_- < x_0 < \tilde{x}_+$ , из которых непосредственно вытекает, что  $\Pi_{11} < 0$  в точке  $\tilde{x}_-$  и  $\Pi_{11} > 0$  в точке  $\tilde{x}_+$  при всех допустимых значениях параметров  $\mu, \nu$ .

Граница области устойчивости определяется корнем  $x_1(\mu)$  ( $\Pi_{22} = 0$ ) и, в силу (27), определена кривой

$$\varrho(\mu) = \nu_1(\mu) = \frac{2\mu + x_1(\mu)}{k(x_1(\mu))}, \quad \mu \in (0, \mu_*).$$

Заметим, что функция  $\nu_1(\mu)$  положительна при  $-1 < x < -2\mu^*$  и отрицательна при  $-2\mu^* < x < \mu_*$ .

Симметричное положение равновесия в области A2 модифицированной модели маятников может быть устойчивым лишь при условии  $-1 < \check{x} < x_1(\mu)$ , т. е., если  $\check{x}(\mu) \leq x_1(\mu)$ . Равенство  $\check{x}(\mu) = x_1(\mu)$  справедливо, если  $x_1^3(\mu) = -2\mu$ , или  $x_1^3(\mu) - x_1(\mu) + x_1(\mu) = -2\mu$ . Учитывая, что  $x_1(\mu)$  — корень уравнения (25), получим  $x_1(\mu) = -3\mu$ , что приводит к равенству  $\arccos z = 3 \arcsin z - \pi/2$  при  $z = \mu/\mu_*$ . Так как  $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$ , то последнее уравнение равносильно  $2z - 4z^3 = 0$ , корни которого очевидны. Следовательно, равенство  $\check{x}(\mu) = x_1(\mu)$  выполнено при  $\check{\mu} = \mu_*/\sqrt{2}$ .

Несложно установить, что  $\varrho(\check{\mu}) = \nu(\check{\mu}) = \mu_*/2$ , причём  $\varrho(\mu) \leq \nu(\mu)$ . Из равенства  $\check{x}(\check{\mu}) = x_1(\check{\mu})$  вытекает, что  $\check{x}(\mu) < x_1(\mu)$ , если  $\check{\mu} < \mu$ . Отсюда следует, что граница области устойчивости для  $\tilde{x}_+$  определяется частью кривой  $\varrho(\mu)$  при  $\check{\mu} < \mu < \mu_*$ , а положение равновесия, соответствующее решению  $\tilde{x}_+$  будет устойчиво, если  $\varrho(\mu) < \nu < \nu(\mu)$  при  $\check{\mu} < \mu < \mu_*$  и  $0 < \nu < \nu(\mu)$  при  $\mu_* < \mu < 1/2$  (область  $\Omega_+$  на рис 3b)).

Значение  $\Pi_{22}$  отрицательно, если выполнено неравенство (26). Для корня  $\tilde{x}_-$  это означает, что  $x_1(\mu) < \tilde{x}_-$ , из которого вытекает, что  $h(x_1(\mu), \mu, \nu) > 0$  или  $\varrho(\mu) < \nu$ .<sup>2</sup> Следовательно, критическая точка потенциала  $\Pi$  будет точкой максимума, если  $\varrho(\mu) < \nu < \nu(\mu)$  при  $0 < \mu < \check{\mu}$  (область  $\Omega_-$  на рис 3b)).

*В области A2 состояния равновесия модифицированной модели маятников определяются двумя решениями  $x_-, x_+$  уравнения (35), которые существуют при параметрах  $\mu, \nu$ , удовлетворяющих условию (36).*

*Если параметры  $\mu, \nu$  принадлежат области  $\Omega_+$ , то соответствующее решению  $x_+$  положение равновесия модифицированной модели маятников устойчиво, в противном случае критическая точка седловая.*

*Если параметры  $\mu, \nu$  принадлежат области  $\Omega_-$ , то соответствующая решению  $x_-$  критическая точка потенциала  $\Pi$  является точкой максимума, в противном случае она седловая.*

<sup>2</sup>Так как  $x_1(\mu) < -2\mu$ , то неравенство  $2\mu + x_1(\mu) > \nu k(x_1(\mu))$  равносильно  $\varrho(\mu) < \nu$ .

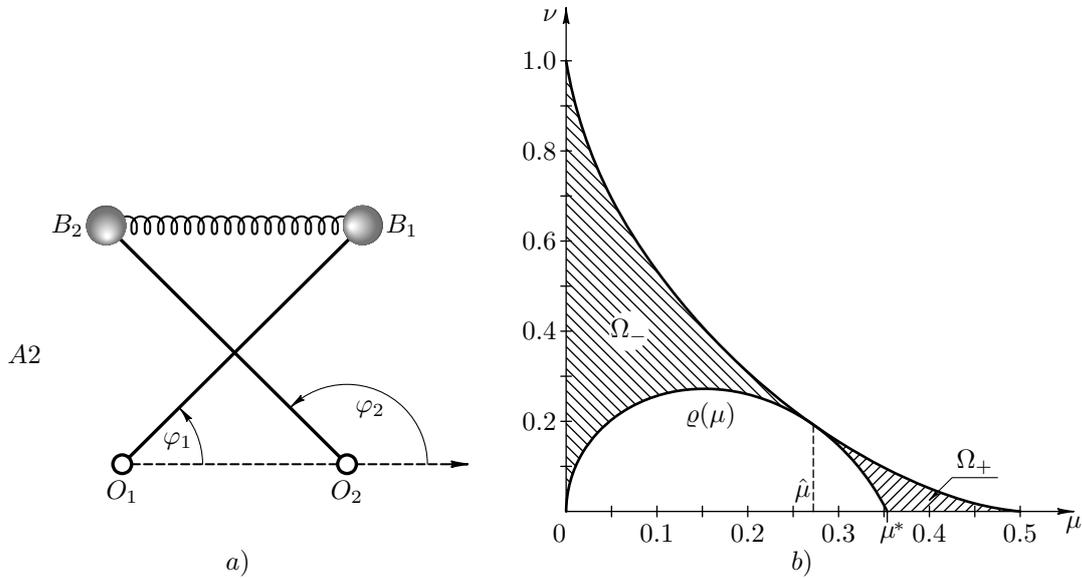


Рис. 3.

Если параметры  $\mu, \nu$  удовлетворяют неравенству  $\nu < \rho(\mu)$ , соответствующая решению  $\tilde{x}$  уравнения (35) критическая точка потенциала  $\Pi$  — седловая.

### 4.2. Несимметричные положения равновесия

Несимметричные положения равновесия определяются уравнением

$$h(x, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \mu \left(1 - \frac{\mu}{s}\right) k(x) = \varepsilon \nu, \quad s^2 = 2x^4 - x^2 + \mu^2, \quad x \in (-1, 0). \quad (37)$$

Так как  $k(x) < 0$ , то функция  $h(x, \mu)$  положительна, если  $s < \mu$ , т. е. при  $x^* < x < 0$ , причём  $h(x^*, \mu) = h(0, \mu) = 0$ . Следовательно, уравнение (37) имеет решения на интервале  $(x^*, 0)$  в случае, когда  $\varepsilon = 1$ , и на интервале  $(-1, x^*)$  в случае, когда  $\varepsilon = -1$ .

Функция  $g(s)$  равна  $\mu/s^3$  и положительна. Учитывая, что для выяснения условий устойчивости важен знак  $\Pi''$ , функцию (32), определяющую границу устойчивости системы маятников, можно записать в виде

$$\Gamma(x, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \mu x^2(1 - x^2)(4x^2 - 1) + s^2(s - \mu), \quad (38)$$

причём  $h'(x, \mu) = \mu k'(x) \Gamma(x, \mu) / s^3$ .

Очевидно, что  $s < \mu$  при  $x^* < x < 0$ , поэтому  $\Gamma(x, \mu) < 0$  при  $-1/2 < x < 0$ , откуда следует, что  $h(x, \mu)$  убывает на этом интервале. Кроме того, из равенств (33) вытекает, что

$$h(\hat{x}_2(\mu), \mu) = \mu - \hat{x}_2^2(\mu), \quad 0 < \mu \leq \mu_*, \quad (39)$$

$$h(-\sqrt{1 - \mu}, \mu) = \left( \frac{\mu}{\sqrt{1 - 3\mu(1 - \mu)}} - 1 \right) \sqrt{\mu(1 - \mu)}, \quad 0 < \mu < 1. \quad (40)$$

**Равновесия симпатичных маятников.**

Область существования решений определяется неравенствами (29).

**Область A1.**

Несложно установить, что функция  $h(x, \mu)$  убывает по  $x$  при  $0 < \mu < \sqrt{3/4}$  и  $3/4 < \mu < 1$ , так как  $-1/2 < \hat{x}_2(\mu)$  в первом случае и  $-1/2 < -\sqrt{1-\mu}$  во втором.

С другой стороны,  $h(0, \mu) = h(x^*, \mu) = 0$ , следовательно, найдутся значения  $\mu_{\min}$  и  $\mu_{\max}$ , при которых функция  $h(x, \mu)$  имеет максимум на соответствующем интервале. Значения  $\mu_{\min}$ ,  $\mu_{\max}$  вычисляются как решения уравнений

$$\Gamma(\hat{x}_2(\mu), \mu) = 0 \quad \text{и} \quad \Gamma(-\sqrt{1-\mu}, \mu) = 0,$$

соответственно и равны  $\mu_{\min} \approx 0.452258$ ,  $\mu_{\max} \approx 0.693692$ . Если  $\mu$  принадлежит интервалу  $(\mu_{\min}, \mu_{\max})$ , то уравнение (37) имеет два решения, в противном случае — одно. Кроме того, область допустимых параметров  $\mu, \nu$  ограничена максимумом  $\varrho(\mu)$  функции  $h(x, \mu)$ , совпадающим с границей устойчивости равновесных состояний, если  $\mu \in (\mu_{\min}, \mu_{\max})$ , ограничена кривой (39), если  $\mu \in (0, \mu_{\min}]$  и кривой (40), если  $\mu \in [\mu_{\max}, 1)$ .

Так как функция  $h(x, \mu)$  убывает при  $0 < \mu < \mu_{\min}$  и  $\mu_{\max} < \mu < 1$ , то равновесные состояния неустойчивы при

$$0 < \nu < h(\hat{x}_2(\mu), \mu), \quad 0 < \mu < \mu_{\min}, \quad 0 < \nu < h(-\sqrt{1-\mu}, \mu), \quad \mu_{\max} < \mu < 1. \quad (41)$$

При  $\mu_{\min} \leq \mu \leq \mu_{\max}$ , если  $\nu$  удовлетворяет неравенствам (41), то равновесные состояния неустойчивы. При  $\nu = h(\hat{x}_2(\mu), \mu)$  или  $\nu = h(-\sqrt{1-\mu}, \mu)$  возникают два решения  $\tilde{x}_- < \tilde{x}_+$  уравнения (33), причём  $\tilde{x}_+$  соответствует неустойчивому состоянию равновесия и является непрерывным продолжением единственного решения ( $h(x, \mu)$  убывает при  $x$  правее точки максимума), а  $\tilde{x}_-$  — устойчивому. Эти свойства сохраняются при  $h(\hat{x}_2(\mu), \mu) \leq \nu < \varrho(\mu)$  при  $\mu_{\min} \leq \mu \leq 1/2$  и  $h(-\sqrt{1-\mu}, \mu) \leq \nu < \varrho(\mu)$  при  $1/2 \leq \mu \leq \mu_{\max}$ . Точки  $(\mu, \nu = \varrho(\mu))$  являются точками бифуркации.

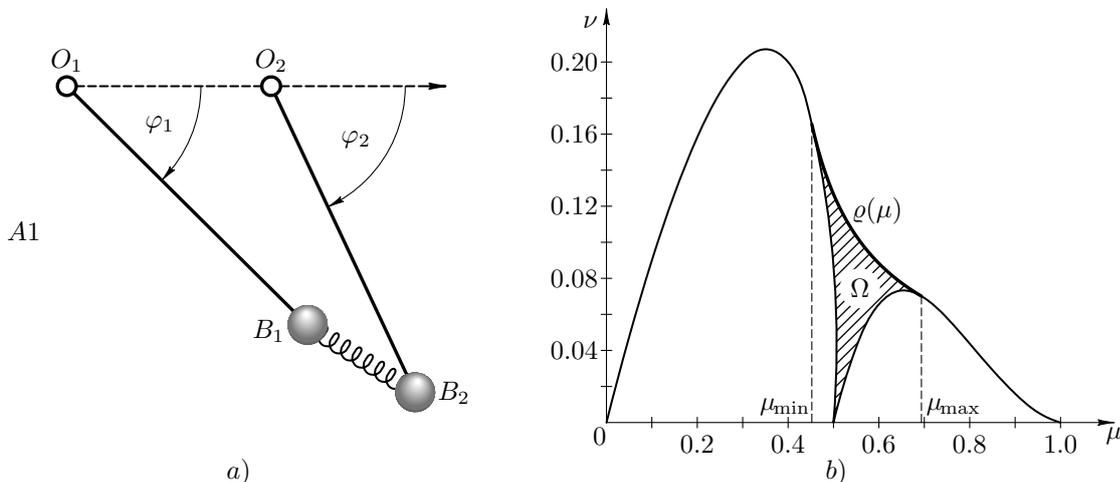


Рис. 4.

На рис. 4 а) изображено несимметричное положение равновесия симпатичных маятников в области  $A1$ . На рис. 4 б) — область существования несимметричных равновесных состояний и область устойчивых состояний равновесия  $\Omega$ , совпадающая с областью существования двух решений уравнения (37).

#### Область $A2$ .

При  $\varepsilon = -1$  решения уравнения (37) существуют, если  $-1 < x < x^*$  ( $s > \mu$ ).

Так как  $x^* \leq \hat{x}_2(\mu)$  и  $x^* \leq -\sqrt{1-\mu}$ , то в области  $A2$  симпатичные маятники несимметричных положений равновесия не имеют.

#### Равновесия модифицированной модели маятников.

Модифицированная модель реализуется, если выполнены неравенства (30).

#### Область $A1$ .

В этой области решения уравнения (37) существуют, если  $x^* < x < 0$ . Так как  $\hat{x}_1(\mu) < x^* < x_2(\mu)$  при  $0 < \mu < \mu^*$ ,  $-\sqrt{1-\mu} < x^*$  при  $\mu < 1/2$  и  $x^* \leq x_1(\mu) < x_2(\mu)$  при  $\mu^* \leq \mu < \mu_*$ , то область существования решений определяется неравенствами:

- i)*  $x_2(\mu) \leq x \leq \hat{x}_2(\mu)$  при  $0 < \mu < \mu_*$ ,
- ii)*  $x^* \leq x < \hat{x}_2(\mu)$  при  $\mu_* \leq \mu < 1/2$ ,
- iii)*  $x^* \leq x < x_1(\mu)$  при  $\mu^* \leq \mu < \mu_*$ .

Отметим, что случай *iii)* определяет область параметров, связанную с второй ветвью кубической параболы  $p(x, \mu y)$ .

В случае *i)* и *ii)* вычисленные значения  $\mu_{\min}$ ,  $\mu_{\max}$ , определяющие границы области монотонности функции  $h(x, \mu)$  равны  $\mu_{\min} \approx 0.378424$  и  $\mu_{\max} \approx 0.452258$ . Значение  $\mu_{\max}$  совпадает с  $\mu_{\min}$  симпатичных маятников, так как является решением уравнения  $\Gamma(\hat{x}_2(\mu), \mu) = 0$ . Значение  $\mu_{\min}$  вычисляется из условия  $\Gamma(x_2(\mu), \mu) = 0$ .

При  $0 < \mu < \mu_{\min}$  и  $\mu_{\max} < \mu < 1/2$  функция  $h(x, \mu)$  убывает. Границы изменения параметра  $\nu$  определяются условиями  $h(\hat{x}_2(\mu), \mu) < \nu < h(x_2(\mu), \mu)$ , если  $0 < \mu < \mu_{\min}$ , и  $0 < \nu < h(\hat{x}_2(\mu), \mu)$ , если  $\mu_{\max} < \mu < 1/2$  (напомним, что  $h(x^*, \mu) = 0$ ).

При  $\mu_{\min} \leq \mu \leq \mu_{\max}$  функция  $h(x, \mu)$  имеет максимум  $\varrho(\mu)$  в некоторой точке  $x_m$ , принадлежащей соответствующему интервалу, возрастает при  $x < x_m$  и убывает при  $x_m < x$ . Границы изменения параметра  $\nu$  определяются условиями  $h(\hat{x}_2(\mu), \mu) < \nu < \varrho(\mu)$ , если  $\mu_{\min} \leq \mu < \mu_*$ , и  $0 < \nu < \varrho(\mu)$ , если  $\mu_* \leq \mu < \mu_{\max}$ . В этой области уравнение имеет два решения  $\tilde{x}_- < \tilde{x}_+$ , если  $h(x_2(\mu), \mu) < \nu < \varrho(\mu)$  при  $\mu_{\min} \leq \mu < \mu_*$  и  $h(\hat{x}_2(\mu), \mu) < \nu < \varrho(\mu)$  при  $\mu_* \leq \mu < \mu_{\max}$ . В случае *iii)* функция  $h(x, \mu)$  возрастает, единственное решение уравнения (37) существует при  $0 < \nu < h(x_1(\mu), \mu)$ . Заметим, что  $\Gamma(x^*, \mu) = \mu/4$  и при  $\mu = \mu_*$  ветви функции  $h(x, \mu)$  *ii)* и *iii)* склеиваются.

Так как область устойчивости равновесных состояний определяется из условия роста функции  $h(x, \mu)$ , то для таких состояний справедливы следующие соотношения между параметрами  $\mu$ ,  $\nu$ :

$$0 < \nu < h(x_1(\mu), \mu) \quad (\mu^* \leq \mu < \mu_*),$$

$$h(x_2(\mu), \mu) < \nu < \varrho(\mu) \quad (\mu_{\min} \leq \mu < \mu_*), \quad h(\hat{x}_2(\mu), \mu) < \nu < \varrho(\mu) \quad (\mu_* \leq \mu < \mu_{\max}).$$

На рис. 5 а) изображено несимметричное положение равновесия модифицированной модели маятников в области  $A1$ . На рис. 5 б) — область существования несимметричных равновесных состояний и область устойчивых состояний равновесия

$\Omega$ , включающая в себя область существования двух решений  $\Omega_2$ . В области  $\Omega_2$

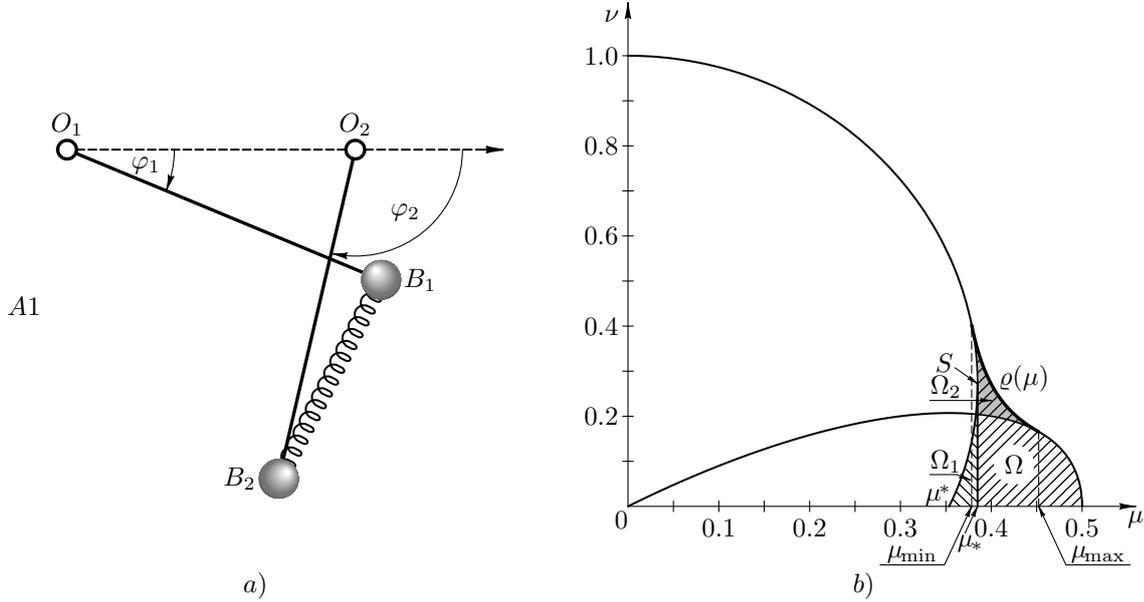


Рис. 5.

устойчиво равновесие, соответствующее решению  $\tilde{x}_-$ . В области  $\Omega_1$  (единственное) решение уравнения (37) определяет точку максимума потенциала  $\Pi$ ,  $S$  — точка склейки ветвей функции  $h(x, \mu)$  *ii*) и *iii*).

**Область A2.**

Модифицированная модель маятников реализуется, если  $s > \mu$ . Это условие выполнено, если

$$-\sqrt{1-\mu} < x < x_1(\mu) \text{ при } 0 < \mu < \mu^* \text{ и } -\sqrt{1-\mu} < x < x^* \text{ при } \mu^* \leq \mu < 1/2.$$

Так как  $x < -1/2$  и  $s > \mu$ , то  $\Gamma(x, \mu) > 0$ , т. е. функция  $h(x, \mu)$  возрастает. Область существования решений определена неравенствами

$$\begin{aligned} -h(x_1(\mu), \mu) < \nu < -h(-\sqrt{1-\mu}, \mu) & \text{ при } 0 < \mu < \mu^*, \\ 0 < \nu < -h(-\sqrt{1-\mu}, \mu) & \text{ при } \mu^* \leq \mu < 1/2. \end{aligned}$$

Так как  $\Gamma(x, \mu) > 0$ , то в области A2 равновесные состояния являются седловыми критическими точками потенциала  $\Pi$ .

### 5. Потенциал Кулона

В безразмерных координатах потенциал Кулона запишем в виде  $f(s) = 1/s$ . Очевидно, что  $f'(s) = -1/s^2$ ,  $f''(s) = 2/s^3 > 0$  и  $g(s) = 3/s^5 > 0$ .

## 5.1. Симметричные положения равновесия

**Равновесия симпатичных маятников.** Уравнение (22) приобретает вид

$$h(x, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} (x + \mu)^2 k(x) = \varepsilon \beta, \quad -\mu < x \leq 1. \quad (42)$$

**Область A1.**

Функция  $h(x, \mu)$  при  $-\mu < x < 0$  меньше нуля, поэтому при  $\varepsilon = 1$  уравнение (42) имеет решения при  $x \geq 0$ . При таких значениях  $x$   $h(x, \mu)$  возрастает:

$$h'(x, \mu) = (x + \mu)k'(x)[2x(1 - x^2) + x + \mu] > 0$$

и изменяется от 0 до  $+\infty$ . Следовательно, уравнение (42) имеет единственное решение  $0 < \tilde{x} < 1$  при любых положительных значениях параметров  $\mu, \beta$ . Так как  $f''(\tilde{x}) > 0$ , то из (19) вытекает, что  $\Pi_{11} > 0$  и, как установлено в п. 2.1, в области A1  $\Pi_{22} > 0$ .

Таким образом, в области A1 равновесные состояния симпатичных маятников устойчивы при всех значениях параметров  $\mu > 0, \beta > 0$ .

**Область A1.**

В области A2 ( $\varepsilon = -1$ ) уравнение (42) имеет решения при  $-\mu < x < 0$ .

Число решений в этом случае зависит от корней производной функции  $h(x, \mu)$ , т. е. от корней кубической параболы  $q(x, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \mu + x(3 - 2x^2)$ :

$$\bar{x}_2(\mu) = -\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{6} + \bar{\phi}(\mu)\right), \quad \bar{x}_1(\mu) = -\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \bar{\phi}(\mu)\right), \quad \bar{\phi}(\mu) = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}}\right).$$

Так как при  $x < 0$  корни  $q(x, 0)$  равны 0 и  $-\sqrt{3/2}$ ,  $\min q(x, 0) = q(x^*, 0) = -\sqrt{2}$ ,  $q(-1, \mu) = \mu - 1$  и  $q(-\mu, \mu) = 2\mu(\mu^2 - 1)$ , то при  $0 < \mu < 1$  справедливы неравенства  $\bar{x}_2(\mu) < -1 < -\mu < \bar{x}_1(\mu)$ , а при  $1 \leq \mu < \sqrt{2}$   $-1 \leq \bar{x}_2(\mu) < x^* < \bar{x}_1(\mu)$

Функция  $h(x, \mu)$  равна нулю при  $x = -\mu$  и  $x = 0$ , принимает минимальное значение в точке  $\bar{x}_1(\mu)$ . Следовательно, при  $0 < \mu \leq 1$  уравнение (42) имеет два решения  $\tilde{x}_- < \bar{x}_1(\mu) < \tilde{x}_+$ , если  $0 < \beta < h(-\bar{x}_1(\mu), \mu)$  и одно решение  $\bar{x}_1(\mu)$ , если  $h(-\bar{x}_1(\mu), \mu) = \beta$ . Точка  $(\mu, h(-\bar{x}_1(\mu), \mu))$  является точкой бифуркации.

Если  $1 < \mu < \sqrt{2}$ , то  $h(x, \mu)$  принимает максимальное и минимальное значения в точках  $\bar{x}_2(\mu)$  и  $\bar{x}_1(\mu)$ , соответственно. Отсюда вытекает, что уравнение (42) имеет три решения  $\tilde{x} < \bar{x}_2(\mu) < \tilde{x}_- < \bar{x}_1(\mu) < \tilde{x}_+$ , если  $h(-\bar{x}_2(\mu), \mu) < \beta < h(-\bar{x}_1(\mu), \mu)$ , два решения, если  $\beta = h(-\bar{x}_2(\mu), \mu)$  или  $\beta = h(-\bar{x}_1(\mu), \mu)$ , и одно решение, если  $\beta$  не удовлетворяет этим условиям.

Если  $\sqrt{2} < \mu$ , то уравнение (42) имеет одно решение при любом  $\beta > 0$ .

Напомним, что все состояния равновесия в области A2 неустойчивы ( $\Pi_{22} < 0$ ). Для уточнения поведения функции  $\Pi$  в соответствующих критических точках подставим в выражение  $\Pi_{11}$  значение  $\beta = -h(x, \mu)$ . В результате получим

$$\Pi_{11} = -\frac{2k(x)}{x + \mu} - k'(x) = -\frac{k'(x)}{x + \mu}(-2x^3 + 3x + \mu) = -\frac{k'(x)}{x + \mu}q(x, \mu).$$

Так как  $k'(x)$  и  $x + \mu$  положительны и  $q(x, \mu) < 0$  при  $\bar{x}_2(\mu) < x < \bar{x}_1(\mu)$ , то при  $0 < \mu \leq 1$  критическая точка, соответствующая  $\tilde{x}_+$ , является точкой максимума, а  $\tilde{x}_-$  — седловая. При  $1 < \mu < \sqrt{2}$  точки  $\tilde{x}$  и  $\tilde{x}_+$  определяют максимумы  $\Pi$ ,  $\tilde{x}_-$  — седловую точку. Соответствующая единственному решению уравнения (42) критическая точка седловая.

**Равновесия модифицированной модели маятников.**

Рассмотрим уравнение (42) при  $-1 < x < -\mu$ .

Так как  $h(x, \mu) < 0$ , то при  $\varepsilon = 1$  уравнение (42) решений не имеет, поэтому в области A1 у модифицированной модели состояний равновесия нет.

**Область A2.**

Функция  $-h(x, \mu)$  на интервале  $(-1, -\mu)$  положительна, при  $x = -\mu$  равна нулю и стремится к  $+\infty$  при  $x \rightarrow -1$ . Следовательно, уравнение (42) имеет одно решение, т. е. область существования равновесных состояний является полуполосой  $0 < \mu < 1, \beta > 0$ .

Область устойчивости определяется из неравенств (19)

$$P_{11} = -\frac{2\beta}{(x + \mu)^3} - k'(x) > 0, \quad P_{22} = -\frac{\mu + x(1 - x^2)}{(x + \mu)\sqrt{1 - x^2}} > 0,$$

при условии, что  $x$  — решение (42). Подставив из этого уравнения  $\beta$  в  $P_{11}$ , получим неравенство

$$\frac{2}{x + \mu}k(x) - k'(x) > 0,$$

или

$$k'(x) \left( \frac{x - 2x^3 - \mu}{x + \mu} \right) > 0.$$

Так как  $x + \mu < 0$ , то  $P_{11}$  положительно, если  $r(x, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} 2x^3 - x + \mu > 0$ . Кубическая парабола  $r(x, \mu)$  обращается в нуль на интервале  $(-1, -\mu)$  в единственной точке

$$\bar{x}(\mu) = -\sqrt{\frac{2}{3}} \cos \left( \phi \left( \frac{\sqrt{2}\mu}{\mu_*} \right) \right)$$

и больше нуля при  $\bar{x}(\mu) < x < -\mu$ .

Кроме того,  $x_1(\mu) < \bar{x}(\mu)$  при  $0 < \mu < \bar{\mu} \approx 0.272166$  и  $\bar{x}(\mu) < x_2(\mu)$  при  $\bar{\mu} < \mu < \mu_*$ .

Функция  $\varepsilon h(x, \mu)$  убывает, поэтому из этих неравенств вытекает, что состояние равновесия в области A2 устойчиво (область  $\Omega_+$  на рис. 6), если

- i)  $0 < \beta < h(x_2(\mu), \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \beta_2(\mu)$  при  $0 < \mu \leq \mu_*$ ,
- ii)  $\beta_1(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} h(x_1(\mu), \mu) < \beta < h(\bar{x}(\mu), \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \beta_3(\mu)$  при  $\bar{\mu} < \mu < \mu_*$ ,
- iii)  $0 < \beta < h(\bar{x}(\mu), \mu)$  при  $\mu_* \leq \mu < 1$ .

Если  $\beta_3(\mu) < \beta < \beta_1(\mu)$ , то соответствующая решению  $\tilde{x}$  уравнения (42) критическая точка определяет максимум потенциала  $\Pi$  (область  $\Omega_-$  на рис. 6). При остальных значениях параметров  $\mu, \beta$  критическая точка потенциала  $\Pi$  — седловая.

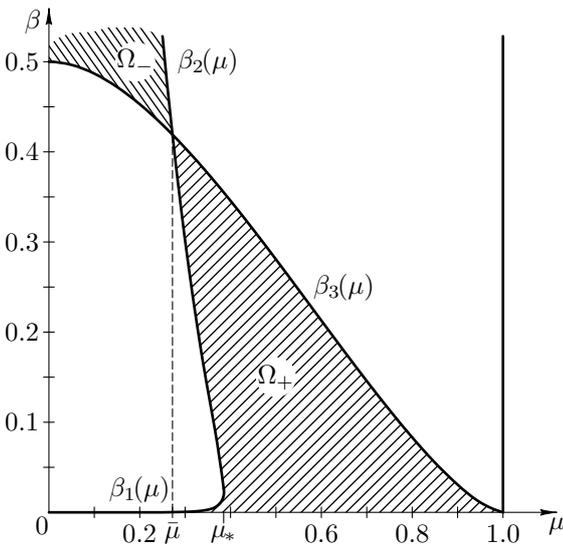


Рис. 6.

## 5.2. Несимметричные положения равновесия

Для потенциала Кулона система уравнений (15) сводится к решению уравнения

$$\varepsilon h(x, \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon \left( -\frac{s^3}{\mu k(x)} \right) = \beta, \quad s^2 = 2x^4 - x^2 + \mu^2. \quad (43)$$

Очевидно, что функция  $h(x, \mu)$  больше нуля при  $x < 0$ , следовательно в области  $A_2$  не существует положений равновесия как в случае симпатичных, так и в случае модифицированной модели маятников.

### Область $A_1$ .

Уравнение (32), определяющее границу области устойчивости, учитывая, что  $s > 0$ , запишем в виде

$$\Gamma(x, \mu) = 3(4x^2 - 1)(1 - x^2)x^2 - s^2 = -x^2(12x^4 - 13x^2 + 2) - \mu^2,$$

причём несложно установить, что  $\text{sign } h'(x, \mu) = -\text{sign } \Gamma(x, \mu)$ . Полином от  $x$ , входящий в определение функции  $\Gamma(x, \mu)$ , обозначим через  $\Gamma(x)$ . При  $-1 < x < 0$  функция  $\Gamma(x)$  имеет два корня

$$x'_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{13 + \sqrt{73}}{6}} \approx -0.947453 \quad \text{и} \quad x'_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{13 - \sqrt{73}}{6}} \approx -0.43089,$$

причём  $\Gamma(0) = 0$ ,  $\Gamma(-1) = -1$  и  $\Gamma(x) > 0$  при  $x'_1 < x < x'_2$ .

Так как  $\Gamma'(x) = -4x(18x^4 - 13x^2 + 1)$ , то  $\Gamma(x)$  имеет два экстремальных значения

$$x_{mx} = -\frac{1}{6}\sqrt{13 + \sqrt{97}} \approx -0.796675 \quad \text{и} \quad x_{mn} = -\frac{1}{6}\sqrt{13 - \sqrt{97}} \approx -0.295858.$$

Максимум функции  $\Gamma(x)$  достигается в точке  $x_{mx}$ , а минимум — в точке  $x_{mn}$ :

$$\Gamma(x_{mx}) = \frac{793 + 97\sqrt{97}}{1944} \approx 0.899351 \quad \text{и} \quad \Gamma(x_{mn}) = \frac{793 - 97\sqrt{97}}{1944} \approx -0.0835078.$$

Вычисленные значения позволяют полностью описать поведение функции  $\Gamma(x, \mu)$ , а именно: пусть  $\mu_{mx} = \sqrt{\Gamma(x_{mx})} \approx 0.948341$  и  $\check{x}_1(\mu)$ ,  $\check{x}_2(\mu)$  корни уравнения  $\Gamma(x, \mu) = 0$ , тогда

$$\Gamma(x, \mu) > 0 \quad \text{при} \quad \check{x}_1(\mu) < x < \check{x}_2(\mu), \quad \text{если} \quad 0 < \mu < \mu_{mx},$$

и  $\Gamma(x, \mu) < 0$ , если эти условия не выполнены. Отметим, что  $x'_1 < \check{x}_1(\mu) < \check{x}_2(\mu) < x'_2$ .

### Равновесия симпатичных маятников.

Для симпатичных маятников решения уравнения (43) удовлетворяют неравенствам (29). При выполнении этих неравенств границы области существования корней пробегает отрезок  $[-1/\sqrt{2}, 0]$  дважды: при  $x = \hat{x}_2(\mu)$  ( $0 \leq \mu \leq 1/2$ ) и при  $x = -\sqrt{1 - \mu}$  ( $1/2 \leq \mu \leq 1$ ).

Функция  $h(x, \mu)$  стремится к  $+\infty$  при  $x \rightarrow 0$  и  $h'(x, \mu) = 0$  тогда и только тогда, когда  $\Gamma(x, \mu) = 0$ . При  $0 < \mu \leq 1/2$  наибольшее значение  $\mu$ , при котором  $h(x, \mu)$  монотонно возрастает, определяется из уравнения  $\Gamma(\hat{x}_2(\mu), \mu) = 0$ . Обозначив  $\hat{x}_2(\mu)$

через  $z$  и учитывая, в силу равенств (33), что  $s^2 = z^4$ , приходим к уравнению  $z^2(12z^4 - 14z^2 + 3) = 0$ , решая которое несложно найти, что

$$\mu_{\min} = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{11 + \sqrt{13}}{2}} \approx 0.450394 \quad \text{и} \quad \hat{x}_2(\mu_{\min}) = -\frac{\sqrt{13} - 1}{2\sqrt{6}} \approx -0.531856 < x'_2.$$

При  $1/2 \leq \mu < 1$  наименьшее значение  $\mu$ , при котором  $h(x, \mu)$  монотонно возрастает, вычисляется из решения уравнения

$$\Gamma(-\sqrt{1 - \mu}, \mu) = 1 - 12\mu(1 - \mu)^2 = 0$$

и равно  $\mu_{\max} \approx 0.638824$ , причём  $\sqrt{1 - \mu_{\max}} < x'_2$ . Так как функция  $\Gamma(x)$  монотонно убывает при  $-1/\sqrt{2} < x < x'_2$ , то  $h(x, \mu)$  имеет одну экстремальную точку  $\tilde{x}(\mu)$  при  $\mu_{\min} < \mu < \mu_{\max}$ , определяемую как решение уравнения  $\Gamma(x, \mu) = 0$ , причём  $\Gamma(x, \mu) > 0$  при  $x < \tilde{x}(\mu)$ . Функция  $\varrho(\mu) = h(\tilde{x}(\mu), \mu)$  является границей области устойчивости симпатичных маятников.

Если  $x = \hat{x}_2(\mu)$ , то

$$\hat{\beta}_2(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} h(\hat{x}_2(\mu), \mu) = \hat{x}_2^4(\mu) = \hat{x}_2^2(\mu) - \mu^2.$$

Если  $x = -\sqrt{1 - \mu}$ , то

$$\beta_{sq}(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} h(-\sqrt{1 - \mu}, \mu) = \sqrt{\frac{[1 - 3\mu(1 - \mu)]^3}{\mu(1 - \mu)}}.$$

При  $0 < \mu \leq \mu_{\min}$  граница области существования одного решения уравнения (43) определяется неравенством  $\hat{\beta}_2(\mu) \leq \beta < +\infty$ , а при  $\mu_{\max} \leq \mu < 1$  — неравенством  $\beta_{sq}(\mu) \leq \beta < +\infty$ .

Таким образом, областью существования решений является (рис. 7)

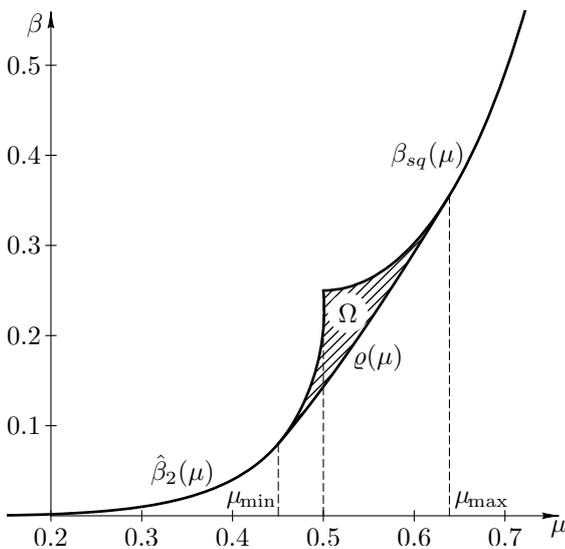


Рис. 7.

$$\hat{\beta}_2(\mu) \leq \beta \quad (0 < \mu \leq \mu_{\min}),$$

$$\beta_{sq}(\mu) \leq \beta \quad (\mu_{\max} \leq \mu < 1)$$

и  $\varrho(\mu) \leq \beta$ . Точка  $(\mu, \varrho(\mu))$  является точкой бифуркации и единственности уравнения (43), в которой решение распадается на два —

$$\tilde{x}_- < \tilde{x}(\mu) < \tilde{x}_+.$$

Область устойчивости симпатичных маятников, совпадающая с областью существования двух решений, ограничена кривыми

$$\hat{\beta}_2(\mu) \quad (\mu_{\min} < \mu < 1/2),$$

$$\beta_{sq}(\mu) \quad (1/2 < \mu < \mu_{\max}) \quad \text{и} \quad \varrho(\mu),$$

причём устойчивым состоянием является решение, отвечающее  $\tilde{x}_-$  уравнения

(43). Точка  $\tilde{x}_+$  и все единственные решения уравнения (43) определяют седловые критические точки потенциала  $\Pi$ .

**Несимметричные положения равновесия модифицированной модели в области  $A_1$**  определяются решениями уравнения (43), удовлетворяющими неравенствам (30). При  $0 < \mu < \mu_*$  решения принадлежат двум непересекающимся интервалам  $(-\sqrt{1-\mu}, x_1(\mu))$  и  $(x_2(\mu), \hat{x}_2(\mu))$ .

Уравнение  $\Gamma(x_1(\mu), \mu) = 0$  имеет решение  $\mu_{\min}^* \approx 0.098079$ , кроме того, уравнение  $\Gamma(-\sqrt{1-\mu}, \mu) = 0$  допускает второе решение  $\mu_{\max}^* \approx 0.103741$ , определяющее области существования двух решений уравнения (43) при  $0 < \mu < \mu_*$  на первом отрезке. Так как знак производной функции  $h(x, \mu)$  противоположен знаку  $\Gamma(x, \mu)$ , то  $h(x, \mu)$  возрастает на  $(-\sqrt{1-\mu}, x_1(\mu))$ , если  $0 < \mu \leq \mu_{\min}^*$ , и убывает, если  $\mu_{\max}^* \leq \mu \leq \mu_*$ . При  $\mu_{\min}^* < \mu < \mu_{\max}^*$   $h(x, \mu)$  имеет максимум. Решение  $\tilde{x}(\mu)$  уравнения  $\Gamma(x, \mu) = 0$  определяет функцию  $\varrho^*(\mu) = h(\tilde{x}(\mu), \mu)$ , являющуюся границей области существования двух решений  $x_-^*$ ,  $x_+^*$  (и устойчивости соответствующих состояний равновесия). Производная функции  $h(x, \mu)$  изменяет знаки с «+» на «-», поэтому  $\Gamma(x_+^*, \mu) > 0$ , т. е. устойчиво состояние равновесия, отвечающее решению  $x_+^*$ .

На втором интервале уравнение  $\Gamma(x_2(\mu), \mu) = 0$  имеет решение при  $\mu_{\min}^{**} \approx 0.376764$ , а значение  $\mu_{\max}^{**}$  совпадает с  $\mu_{\min} \approx 0.450394$  симпатичных маятников и принадлежит интервалу  $(-\sqrt{1-\mu}, \hat{x}_1(\mu))$ . Функция  $h(x, \mu)$  возрастает на  $(x_2(\mu), \hat{x}_2(\mu))$  при  $0 < \mu \leq \mu_{\min}^{**}$ , убывает на  $(-\sqrt{1-\mu}, \hat{x}_2(\mu))$  при  $\mu_{\max}^{**} \leq \mu < 1/2$ . Если  $\mu_{\min}^{**} < \mu < \mu_{\max}^{**}$ , то определена граница  $\varrho^{**}(\mu)$  области существования двух решений  $x_-^{**}$ ,  $x_+^{**}$  уравнения (43), причём  $\Gamma(x_-^{**}, \mu) > 0$ , т. е. устойчиво состояние равновесия, отвечающее решению  $x_-^{**}$ .

Границы интервалов определяют функции

$$\beta_{sq}(\mu) = h(-\sqrt{1-\mu}, \mu), \quad \beta_1(\mu) = h(x_1(\mu), \mu), \quad \beta_2(\mu) = h(x_2(\mu), \mu)$$

и  $\hat{\beta}_2(\mu) = h(\hat{x}_2(\mu), \mu)$ . Графики  $\beta_{sq}(\mu)$ ,  $\beta_1(\mu)$  пересекаются в точке  $\mu_0 \approx 0.100762$ , что соответствует  $\mu$ , при котором функция  $h(x, \mu)$  принимает равные значения на интервале  $(-\sqrt{1-\mu_0}, x_1(\mu_0))$ .

Область существования решений определена граничными значениями в неравенствах (30) с учётом поведения функции  $h(x, \mu)$ , а именно при  $0 < \mu < \mu_*$  и  $x \in (-\sqrt{1-\mu}, x_1(\mu))$

$$\begin{aligned} \beta_{sq}(\mu) \leq \beta \leq \beta_1(\mu), & \quad 0 < \mu < \mu_{\min}^*, \\ \beta_{sq}(\mu) \leq \beta \leq \varrho^*(\mu), & \quad \mu_{\min}^* \leq \mu < \mu_0, \\ \beta_1(\mu) \leq \beta \leq \varrho^*(\mu), & \quad \mu_0 \leq \mu < \mu_{\max}^*, \\ \beta_1(\mu) \leq \beta \leq \beta_{sq}(\mu), & \quad \mu_{\max}^* \leq \mu < \mu_*. \end{aligned}$$

При  $0 < \mu < \mu_*$  и  $x \in (x_2(\mu), \hat{x}_2(\mu))$  или  $\mu_* \leq \mu < 1/2$  и  $x \in (-\sqrt{1-\mu}, \hat{x}_2(\mu))$

$$\begin{aligned} \beta_2(\mu) \leq \beta \leq \hat{\beta}_2(\mu) & \quad 0 \leq \mu < \mu_{\min}^{**}, \\ \varrho^{**}(\mu) \leq \beta \leq \hat{\beta}_2(\mu) & \quad \mu_{\min}^{**} \leq \mu < \mu_*, \\ \varrho^{**}(\mu) \leq \beta \leq \beta_{sq}(\mu) & \quad \mu_* \leq \mu < \mu_{\max}^{**}, \\ \beta_2(\mu) \leq \beta \leq \hat{\beta}_{sq}(\mu) & \quad \mu_{\max}^{**} \leq \mu < 1/2. \end{aligned}$$

В случае интервала  $(-\sqrt{1-\mu}, x_1(\mu))$  ( $\mu_{\min}^* < \mu < \mu_{\max}^*$ ) неравенства, границы которых содержат функцию  $\varrho^*(\mu)$ , определяют область устойчивых равновесий.

Область устойчивых равновесий при  $\mu_{\min}^{**} < \mu < \mu_{\max}^{**}$  определена неравенствами

$$\varrho^{**}(\mu) \leq \beta \leq \beta_2(\mu) \quad (\mu_{\min}^{**} \leq \mu < \mu_*) \quad \text{и} \quad \varrho^{**}(\mu) \leq \beta \leq \hat{\beta}_2(\mu) \quad (\mu_* \leq \mu < \mu_{\max}^{**}).$$

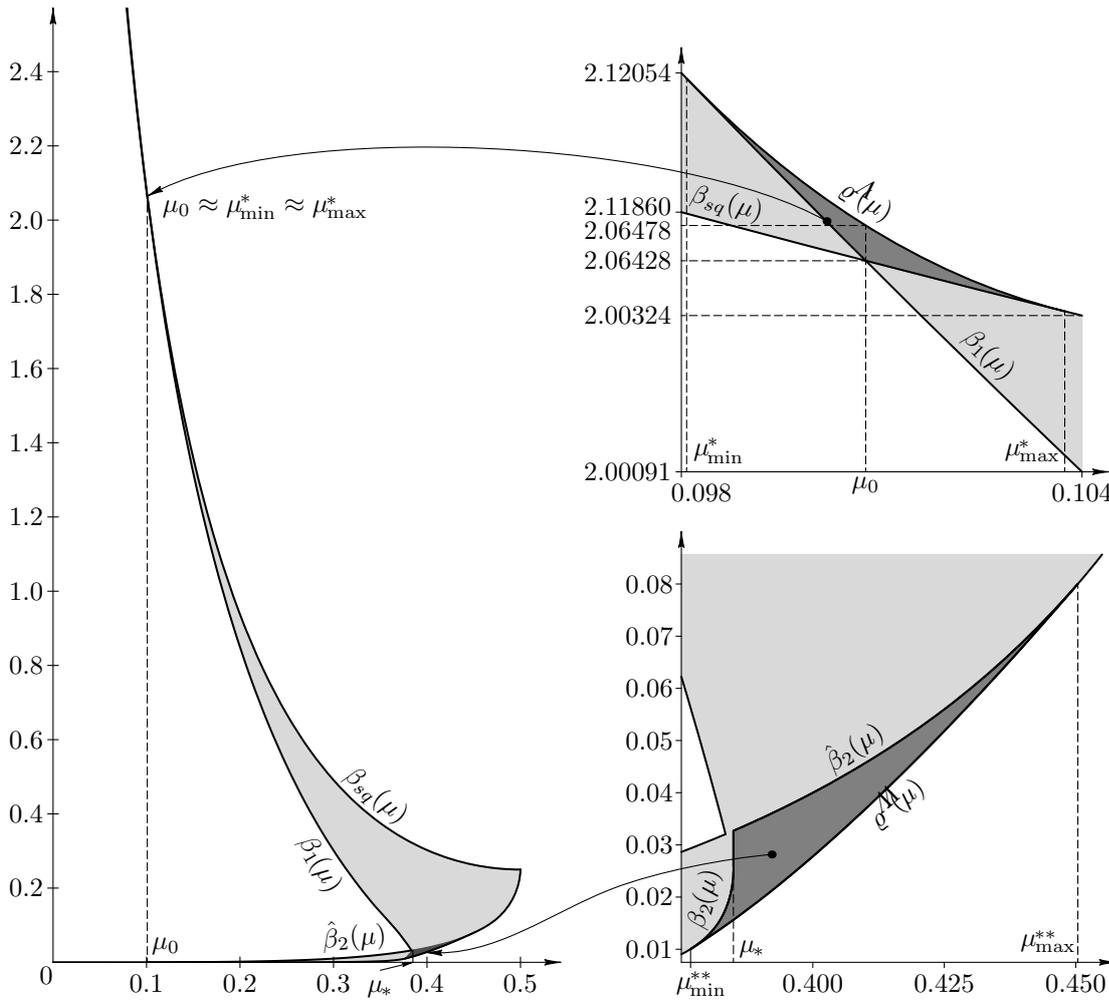


Рис. 8.

На рис. 8 изображена область существования несимметричных положений равновесия модифицированной модели в области  $A1$  (отмечена светло-серым цветом) и области устойчивости в окрестности точек  $\mu_0$  и  $\mu_*$  (тёмно-серый цвет). Обратим внимание читателя на то, что область устойчивости в окрестности точки  $\mu_0$  является узкой полосой, шириной порядка 0.006 и высотой — 0.2 (изображена без соблюдения масштаба).

## Заключение

Первоначально мотивацией для выполнения данной работы было желание исследовать решения лагранжевой системы, соответствующей физической модели

классических симпатичных маятников, в зависимости от двух параметров модели. Но при переходе к лагранжевой формулировке уравнений возникла задача исследования физического смысла решений построенной математической модели. Оказалось, что полученные результаты справедливы для модифицированной модели маятников.

Изучение явления устойчивости для системы двух связанных маятников показало, что естественные переменные модели, в которых удобно выполнять анализ этого явления, — набор безразмерных параметров  $\mu$ ,  $\beta$ . Они имеют разную физическую природу, поскольку  $\mu$  зависит от геометрических размеров системы, а  $\beta$  определяется отношением энергии взаимодействия системы во внешнем поле к характерной внутренней энергии системы.

Приложение полученных результатов для маятников, связанных потенциалом Гука и Кулона выявило, что область устойчивости является трудно выделяемой для некоторых ситуаций, поэтому исследователи долгое время не обращали на них внимание. Здесь следует указать на существование устойчивых несимметричных равновесных решений для рассматриваемой системы, хотя с точки зрения физики несимметричные решения возникают в динамическом случае при отклонении системы от состояния симметричного равновесия. Наличие двух параметров в модели позволяет управлять системой, обеспечивая выбор режима устойчивости или неустойчивости.

## Список литературы

- [1] Зоммерфельд А., *Механика*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевск, 2001.
- [2] Maianti M., Pagliara S., Galimberti G., “Mechanics of two pendulums coupled by a stressed spring”, *Am. J. Phys.*, **77**:9 (2009), 834–838.
- [3] Ramachandran P., Krishna S. G., Ram Y. M., “Instability of a constrained pendulum system”, *Am. J. Phys.*, **79**:4 (2011), 395–400.
- [4] Koluda P., Perlikowski P., Czolczynski K., Kapitaniak T., “Synchronization configurations of two coupled double pendula”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **19**:8 (2014), 977–990.
- [5] Huynh H. N., Chew L. Y., “Two-coupled pendulum system: bifurcation, chaos and the potential landscape approach”, *Int. J. Bifurcation Chaos*, **20**:8 (2010), 2427–2442.
- [6] Huynh H. N., Nguyen T. P. T., Chew L. Y., “Numerical simulation and geometrical analysis on the onset of chaos in a system of two coupled pendulums”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **18**:2 (2013), 291–307.
- [7] A. Stephenson, “On an induced stability”, *Phil. Mag.*, **15** (1908), 233–236.
- [8] Капица П. Л., “Маятник с вибрирующим подвесом”, *Успехи физических наук*, **44**:5 (1951), 7–20.
- [9] И. И. Блехман, *Вибрационная механика*, «Наука», М., 1994.
- [10] Butikov E. I., “An improved criterion for Kapitza’s pendulum stability”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44**:29 (2011), 7–20.
- [11] Маркеев А. П., “О движении связанных маятников”, *Нелинейная динамика*, **9**:1 (2013), 27–38.
- [12] Tarasov B. G., Guzev M. A., “Mathematical Model of Fan-head Shear Rupture Mechanism”, *Key Engineering Materials*, **592**:11 (2013), 121–124.

- [13] Baboly M. G., Su M. F., Reinke C. M., Alaie S., Goettler D. F., El-Kady I., Leseman Z. C., “The effect of stiffness and mass on coupled oscillations in a phononic crystal”, *AIP Advances*, **3** (2013), 112121, 1–7.
- [14] Lipfert J., Hao X., Dekker N. H., “Quantitative Modeling and Optimization of Magnetic Tweezers”, *Biophysical Journal*, **96**:12 (2009), 5040–5049.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 26 октября 2015 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-12404 офи\_м2).

---

*Guzev M. A., Dmitriev A. A.* Stability of coupled oscillators. Far Eastern Mathematical Journal. 2015. V. 15. № 2. P. 166–191.

#### ABSTRACT

We study a system of two coupled oscillators and a modified system of these oscillators whose rods intersect and slide without friction relative to each other. The oscillators posed vertically in a uniform gravity field and its interaction is described by a potential depending on distance. We demonstrate that both systems have symmetrical and asymmetrical equilibrium states. Stability of the states depend on the interaction energy and distance between the oscillators' suspension centers. Stability regions for Hooke and Coulomb potentials are calculated in the parameter plane. Key words: *coupled oscillators, equilibrium, stability*