Дальневосточный математический журнал. 2015. Том 15. № 2. С. 192–196

УДК 517.521
MSC2010 54C05

© А. П. Девятков[1]

Предельные множества сходящейся последовательности непрерывных отображений

Показано, что полное предельное множество сходящейся последовательности непрерывных отображений полного метрического пространства X в метрическое пространство Y является вырожденным на остаточном множестве точек X.

Ключевые слова: *предельное множество последовательности функций, непрерывная сходимость, множество первой категории.*

Рассмотрим последовательность $\mathcal{F} = (f_n)_{n=1}^{\infty}$ функций $f_n\colon X \to Y$, отображающих метрическое пространство X в метрическое пространство Y. Введём понятие предельного множества последовательности функций (см. [1]).

Пусть $A \subset X$ — непустое подмножество пространства X, $\overline{A}$ — замыкание множества A, и $x_0 \in \overline{A}$.

Предельным множеством последовательности функций $\mathcal{F} = (f_n)_{n=1}^{\infty}$ в точке x_0 относительно множества A назовём совокупность $C(\mathcal{F}, A, x_0)$ точек $y \in Y$ таких, что существует последовательность точек $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset A$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$, и подпоследовательность функций $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$, для которых $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x_k) = y$.

Данное определение является обобщением хорошо известного понятия предельного множества для одной функции $f\colon X \to Y$ (см. [2]–[4]). Напомним его.

Предельным множеством функции f в точке x_0 относительно множества A называется совокупность $C(f, A, x_0)$ точек $y \in Y$ таких, что существует последовательность точек $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset A$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = y$.

В предлагаемой заметке основным объектом изучения будут поточечно сходящиеся последовательности непрерывных отображений. Мы покажем, что совокупность тех $x \in X$, в которых предельное множество такой последовательности состоит более чем из одной точки, в определенном смысле мало — имеет первую категорию по Бэру.

[1]Тюменский государственный университет, 625002, г. Тюмень, ул. Семакова, 10. Электронная почта: anglin@mail.ru

Прежде чем сформулировать соответствующую теорему, докажем простое утверждение о связи между предельными множествами одной функции и последовательности функций.

Предложение 1. *Предельное множество сходящейся последовательности функций всегда содержит предельное множество предельной функции.*

Доказательство. Пусть последовательность отображений $\mathcal{F} = (f_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится в каждой точке $x \in X$ и $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ — предельная функция. Если $y \in C(f, A, x_0)$, то существует последовательность точек $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset A$ такая, что $x_k \to x_0$ и $f(x_k) \to y$. В каждой точке x_k, $k = 1, 2, \ldots$, согласно условию имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_k) = f(x_k)$. Поэтому можно подобрать последовательность номеров $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ такую, что $\rho(f_{n_k}(x_k), f(x_k)) < 1/k$, где ρ — расстояние в пространстве Y. Из этого неравенства получаем $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x_k) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = y$, и, следовательно, $y \in C(\mathcal{F}, A, x_0)$. Итак, из условия $y \in C(f, A, x_0)$ мы получили, что $y \in C(\mathcal{F}, A, x_0)$, т.е. $C(f, A, x_0) \subset C(\mathcal{F}, A, x_0)$. $\square$

Из предложения 1 вытекает, что в случае $x_0 \in A$ предельное множество $C(\mathcal{F}, A, x_0)$ сходящейся последовательности функций $\mathcal{F} = (f_n)_{n=1}^{\infty}$ всегда не пусто — оно содержит по крайней мере одну точку $f(x_0)$, где f — предельная функция.

Предельное множество $C(\mathcal{F}, X, x_0)$ относительно всего пространства X называется *полным предельным множеством.* Полное предельное множество мы будем кратко обозначать $C(\mathcal{F}, x_0)$ или даже просто $C(x_0)$.

Предельное множество, состоящее из одной точки, называется *вырожденным.*

Основным результатом данной заметки является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть задана последовательность $\mathcal{F} = (f_n)_{n=1}^{\infty}$ непрерывных отображений $f_n \colon X \to Y$ полного метрического пространства X в метрическое пространство Y. Если в каждой точке $x \in X$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, то полное предельное множество $C(\mathcal{F}, x_0)$ рассматриваемой последовательности функций вырожденно для всех $x_0 \in X$, за исключением точек некоторого множества первой категории в X.*

Доказательство. Везде далее полное предельное множество $C(\mathcal{F}, x)$ обозначаем $C(x)$. Покажем сначала, что для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого непустого открытого множества $U \subset X$ найдется непустое открытое множество $V \subset U$ такое, что для всех $x \in V$ будет выполнено $\operatorname{diam} C(x) < \varepsilon$.

Предположим противное. Тогда найдутся число $\varepsilon_0 > 0$ и непустое открытое множество $U_0 \subset X$ такие, что для любого непустого открытого множества $V \subset U_0$ существует точка $x \in V$, в которой $\operatorname{diam} C(x) \geqslant \varepsilon_0$. Возьмем произвольную последовательность чисел $\eta_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, с условием $\lim\limits_{k\to\infty} \eta_k = 0$ (например, $\eta_k = 1/k$). Согласно сделанному предположению, найдется точка $x_0 \in U_0$, в которой $\operatorname{diam} C(x_0) \geqslant \varepsilon_0$. Выберем какую-либо точку $y_0 \in C(x_0)$. Используя определение предельного множества и учитывая непрерывность функций f_n, мы можем найти открытый шар $V_1 = B(a_1, r_1) \subset U_0$ с центром в точке $a_1 \in U_0$ и с радиусом $r_1 < \eta_1$, а также номер n_1 так, чтобы для всех $x \in \overline{V}_1$ было выполнено $\rho(f_{n_1}(x), y_0) \leqslant \eta_1$. Здесь ρ — метрика в пространстве Y.

Пусть уже построены точка $y_{k-1} \in Y$, шар $V_k = B(a_k, r_k) \subset U_0$ и номер n_k, $k = 1, 2, \ldots$ Опишем построение точки $y_k \in Y$, шара V_{k+1} и номера n_{k+1}. Согласно предположению, найдется точка $x_k \in V_k$, в которой $\operatorname{diam} C(x_k) \geqslant \varepsilon_0$. Из этого неравенства вытекает, что мы можем выбрать точку $y_k \in C(x_k)$ так, чтобы $\rho(y_k, y_{k-1}) \geqslant \varepsilon_0/4$. Используя определение предельного множества и учитывая непрерывность функций f_n, мы можем найти открытый шар $V_{k+1} = B(a_{k+1}, r_{k+1}) \subset V_k$ с центром в точке $a_{k+1} \in V_k$ и с радиусом $r_{k+1} < \eta_{k+1}$, а также номер $n_{k+1} > n_k$ так, чтобы для всех $x \in \overline{V}_{k+1}$ было выполнено $\rho(f_{n_{k+1}}(x), y_k) \leqslant \eta_{k+1}$.

Выполняя описанные построения для всех $k = 1, 2, \ldots$, мы получим последовательность точек $(y_k)_{k=0}^{\infty} \subset Y$ с условием $\rho(y_k, y_{k-1}) \geqslant \varepsilon_0/4$, последовательность вложенных шаров

$$X \supset V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_k \supset \ldots$$

с радиусами $r_k < \eta_k \to 0$ и возрастающую последовательность номеров

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots \ ,$$

причём для всех $x \in \overline{V}_k$ будут выполнены неравенства $\rho(f_{n_k}(x), y_{k-1}) \leqslant \eta_k$.

Так как X — полное пространство, то, согласно принципу вложенных шаров, существует точка $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \overline{V}_k$. Для этой точки неравенства $\rho(f_{n_k}(x), y_{k-1}) \leqslant \eta_k$ выполнены при всех $k = 1, 2, \ldots$. Но последовательность $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ расходится в силу условия $\rho(y_k, y_{k-1}) \geqslant \varepsilon_0/4$, а значит, такова и последовательность $(f_{n_k}(x))_{k=1}^{\infty}$. Мы получили противоречие с поточечной сходимостью исходной последовательности функций $\mathcal{F} = (f_n)_{n=1}^{\infty}$.

Итак, наше предположение неверно, и для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого непустого открытого множества $U \subset X$ найдется непустое открытое подмножество $V \subset U$ такое, что для всех $x \in V$ будет выполнено $\operatorname{diam} C(x) < \varepsilon$. Но это означает, что множества $E_\varepsilon = \{x \in X : \operatorname{diam} C(x) \geqslant \varepsilon\}$ нигде не плотны в X при всех $\varepsilon > 0$. Следовательно, множество $E = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_{1/m}$ является множеством первой категории в X. Если теперь $x \in X \setminus E$, то $\operatorname{diam} C(x) < 1/m$ для всех $m = 1, 2, \ldots$, т.е. $\operatorname{diam} C(x) = 0$ и предельное множество $C(x)$ вырожденно (напомним, что оно заведомо не пусто). Теорема доказана. □

Рассмотрим отдельно случай, когда пространство Y компактно.

Следуя Г. Хану (см., напр., [5]), будем говорить, что последовательность функций $\mathcal{F} = (f_n)_{n=1}^{\infty}$ *непрерывно сходится в точке* x_0, если для любой последовательности точек $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n)$.

Предложение 2. *Последовательность отображений $\mathcal{F} = (f_n)_{n=1}^{\infty}$ метрического пространства X в компактное метрическое пространство Y непрерывно сходится в точке x_0 тогда и только тогда, когда полное предельное множество $C(\mathcal{F}, x_0)$ вырожденно.*

Доказательство. Действительно, пусть $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = y_0$ для любой последовательности точек $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Покажем, что тогда предельное множество $C(\mathcal{F}, x_0)$ состоит из единственной точки y_0.

Если $y \in C(\mathcal{F}, x_0)$, то $y = \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x_k)$ для некоторой последовательности точек $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset X$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$, и подпоследовательности функций $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$. Будем смотреть на числовую последовательность $(f_{n_k}(x_k))_{k=1}^{\infty}$ как на подпоследовательность последовательности $(f_n(x'_n))_{n=1}^{\infty}$, в которой для промежуточных номеров $n_k \leqslant n < n_{k+1}$ положим $x'_n = x_k$, $k = 1, 2, \ldots$ При этом по-прежнему будет выполнено $(x'_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$, $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = x_0$. Так как по предположению $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x'_n) = y_0$, то и $y = \lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x_k) = y_0$. Итак, из условия $y \in C(\mathcal{F}, x_0)$ следует, что $y = y_0$. Обратное включение $y_0 \in C(\mathcal{F}, x_0)$ очевидно.

Пусть теперь предельное множество $C(\mathcal{F}, x_0)$ одноточечно. Тогда при $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, последовательность $(f_n(x_n))_{n=1}^{\infty} \subset Y$ может иметь не более одной предельной точки, а значит, должна сходиться, в силу компактности пространства Y. $\square$

Если учесть предложение 2, то теорема 1 в случае компактного пространства Y приводит к следующему утверждению

Теорема 2. *Пусть задана последовательность $\mathcal{F} = (f_n)_{n=1}^{\infty}$ непрерывных отображений $f_n\colon X \to Y$ полного метрического пространства X в компактное метрическое пространство Y. Тогда поточечная сходимость последовательности $\mathcal{F}$ влечет непрерывную сходимость последовательности $\mathcal{F}$ в каждой точке $x_0 \in X$, за исключением точек некоторого множества первой категории в X.*

Список литературы

[1] В. И. Кругликов, “Предельные множества последовательности функций”, *Докл. РАН*, **357**:1 (1997), 16–18.

[2] К. Носиро, *Предельные множества*, ИЛ, М., 1963.

[3] Э. Коллингвуд, А. Ловатер, *Теория предельных множеств*, Мир, М., 1971.

[4] А. Ловатер, “Граничное поведение аналитических функций”, *Итоги науки и техники. Математический анализ.* Т. 10, ВИНИТИ, 1973, 99–259.

[5] S. Stoilow, “Asupra convergentei continue”, *Studii şi Cercetări Mat.*, **7** (1956), 247–250.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 21 июля 2015 г.

Devyatkov A. P. Cluster sets of a convergent sequence of continuous mappings. Far Eastern Mathematical Journal. 2015. V. 15. № 2. P. 192–196.

ABSTRACT

It is shown that the full cluster set of the pointwise convergent sequence of continuous mappings from complete metric space X to a metric space Y is degenerate on a residual set of points of X.
Key words: *cluster set of sequence of functions, continuous convergence, meagre set.*