

УДК 514.172.45
MSC2010 51M20, 52B10

© Н. Ю. Ероховец¹

k -пояса и рёберные циклы трёхмерных простых многогранников с не более чем шестиугольными гранями

В работе описана структура k -поясов простых трёхмерных многогранников с не более чем шестиугольными гранями. Как следствие этой структуры показано, что число дисков, которые могут быть ограничены простым рёберным циклом заданной длины на таких многогранниках, не являющихся нанотрубками, конечно.

Ключевые слова: k -пояс, рёберный цикл, диск, циклический рёберный разрез, трёхмерный многогранник, фуллерен.

1. Введение

В центре внимания статьи — простые трёхмерные многогранники с не более чем шестиугольными гранями. Если допускать только пятиугольные и шестиугольные грани, то этот класс многогранников включает в себя математические модели фуллеренов — сферических молекул углерода (Нобелевская премия по химии 1996 года Р. Кёрлу, Х. Крото, Р. Смолли «за открытие фуллеренов»). Если допускать только k -угольные и шестиугольные грани, $k = 3, 4, 5$, то мы получаем класс многогранников, встречающийся в литературе как $(k, 6)$ -клетки или $(k, 6)$ -фуллерены [1, 2].

С момента открытия фуллеренов в 1985 году было проведено много математических исследований в самых разных направлениях. В работах [3, 4] получены эффективные алгоритмы перечисления фуллеренов. Важную роль в этих алгоритмах играет задача перечисления дисков на фуллеренах, ограниченных простыми рёберными циклами. Один из подходов в изучении фуллеренов заключается в построении операций, которые заменяют один фуллереновый диск на другой с такой же границей. В работе [5] предьявлен один из первых примеров — операция Эндю–Крото (Рис. 1). В работах [6, 7, 8] показано, что для диска на фуллерене, содержащего не более одного пятиугольника, число граней однозначно определяется границей диска. В работе [9] доказано, что для дисков на фуллеренах с не более

¹Московский государственный университет имени М. В. Ломносова, 119991, ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы, 1. Электронная почта: erohovetsn@hotmail.com

чем пятью пятиугольниками, число граней диска ограничено сверху функцией от длины его границы. В работе [10] предъявлен бесконечный набор операций, при помощи которых любой фуллерен можно получить из додекаэдра. В работе [11] предъявлен набор из семи операций, при помощи которых можно получить любой фуллерен из додекаэдра, при этом в промежутках могут получаться многогранники, у которых все грани являются пятиугольниками или шестиугольниками, кроме не более чем одной особой грани, которая является четырёхугольником или семиугольником и граничит с пятиугольником. Исследованию дисков на фуллеренах также посвящены работы [12, 13].

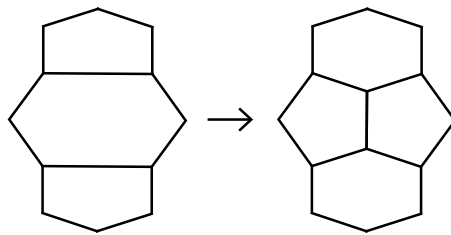


Рис. 1. Операция Эндо–Крото

Ещё одна важная задача заключается в изучении циклических k -рёберных разрезов — наборов \mathcal{E} рёбер, $|\mathcal{E}| = k$, удаление которых разбивает граф многогранника на две связные компоненты, каждая из которых содержит цикл, а удаление любого собственного подмножества в \mathcal{E} оставляет граф связным. В работе [14] было показано, что у фуллеренов нет циклических 3-рёберных разрезов. В работе [1] было показано, что у фуллеренов нет циклических 4-рёберных разрезов, и были классифицированы циклические 4-рёберные разрезы у многогранников с k - и 6-угольными гранями, $k = 3, 4$. В работе [15] были классифицированы циклические 5-рёберные разрезы, а в работах [16, 17] — циклические 5-, 6- и 7-рёберные разрезы фуллеренов. В работе [16] было показано, что произвольный циклический k -рёберный разрез получается из тривиального разреза, состоящего из рёбер, пересекающих заданную грань по вершинам, при помощи трёх операций.

Обзоры по математической теории фуллеренов представлены в [18, 19]. Связь математической теории фуллеренов с новыми материалами описана в [20].

В настоящей статье развит метод, который заключается в изучении k -поясов простых многогранников. k -поясом называется циклический набор двумерных граней, имеющий пустое пересечение, в котором пересекаются только последовательные грани. k -пояс канонически задаёт циклический k -рёберный разрез, состоящий из рёбер пересечений последовательных граней. Каждый циклический 3-рёберный разрез получается таким образом. Однако для произвольного k это не так.

Основной результат — теорема 3, в которой показано, что для класса простых трёхмерных многогранников с не более чем шестиугольными гранями, для каждого k существует конечный набор дисков такой, что либо k -пояс окружает один из этих дисков, либо многогранник является нанотрубкой. Этот результат обобщает результат работ [16, 17] о циклических 5-, 6- и 7-рёберных разрезах фуллеренов на

случай k -поясов с любым k и более широкого класса многогранников, в котором разрешаются также треугольные и четырёхугольные грани.

Как следствие теоремы 3 показано, что для любого k либо простой рёберный цикл длины k ограничивает диск из конечного набора, либо многогранник является нанотрубкой. Это обобщение результата работы [9] на более широкий класс многогранников. Методы доказательства позволяют алгоритмически строить указанные наборы дисков.

Автор благодарен В.М. Бухштаберу за постоянное внимание к работе.

2. Основные понятия

Для знакомства с теорией многогранников мы рекомендуем книги [21, 22].

Определение 1. *Выпуклым многогранником* $P \subset \mathbb{R}^n$ называется ограниченное пересечение конечного набора полупространств или, эквивалентно, выпуклая оболочка конечного набора точек.

Обозначим через $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_m\}$ множество всех гиперграней многогранника P . Для гиперграней F_i положим m_i — число её гиперграней, $\mathcal{H}_i = \text{aff}(F_i)$. Размерность многогранника определяется как $\dim P = \dim \text{aff}(P)$. Выпуклые n -мерные многогранники мы называем *n -многогранниками*. Для набора $S \subset \mathcal{F}$ положим $|S| = \bigcup_{F_i \in S} F_i$. Тогда $|\mathcal{F}| = \partial P$ — граница многогранника P .

Многогранник P называется *простым*, если в каждой его вершине сходится ровно $\dim(P)$ гиперграней.

Два многогранника P и Q *комбинаторно эквивалентны* ($P \simeq Q$), если существует биекция между множествами их граней, сохраняющая включение. *Комбинаторным многогранником* называется класс комбинаторной эквивалентности многогранников. В дальнейшем, если не оговорено противное, многогранником мы будем называть комбинаторный выпуклый 3-многогранник.

Для многогранника P обозначим через $f_i(P)$ число его i -мерных граней, а через $p_k(P)$ число его k -угольных двумерных граней.

Для 3-многогранника его 0-мерные грани мы будем называть *вершинами*, 1-мерные грани — *рёбрами*, а 2-мерные грани — просто *гранями*.

Обозначим через \mathfrak{P}_6 класс простых 3-многогранников с $p_k(P) = 0$, $k > 6$. Для трёхмерных симплекса и куба введём обозначения Δ^3 и I^3 соответственно.

Утверждение 1 (Формула Эйлера). *Пусть P — 3-многогранник. Тогда*

$$f_0 - f_1 + f_2 = 2.$$

Следствие 1. *Пусть P — простой 3-многогранник. Тогда*

$$3p_3 + 2p_4 + p_5 = 12 + \sum_{k \geq 7} (k - 6)p_k.$$

Определение 2. Положим $\pi(P) = 3p_3 + 2p_4 + p_5$.

Определение 3. Простые 3-многогранники, у которых все грани являются пятиугольниками или шестиугольниками, называются (*математическими*) *фуллеренами*.

Следствие 2. Пусть $P \in \mathfrak{F}_6$. Тогда $\pi(P) = 12$, в частности для фуллерена $p_5 = 12$.

Следующий результат известен. Для полноты приведём его доказательство.

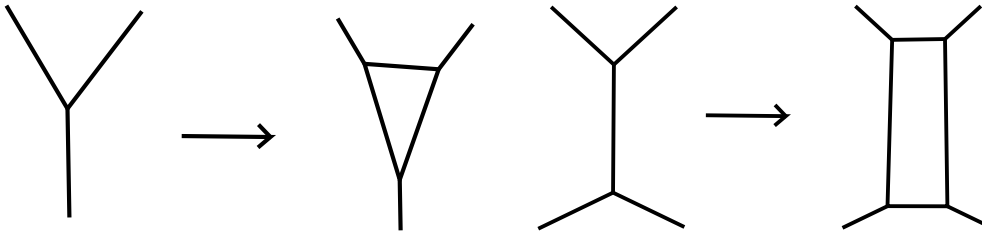


Рис. 2. Срезки вершины и ребра

Лемма 1. Если простой 3-многогранник $P \not\cong \Delta^3$ имеет треугольную или четырёхугольную грань F , то $P \simeq Q$, где Q получается срезкой вершины или ребра простого многогранника (Рис. 2), при которой возникает F .

Доказательство. Комбинаторный тип простого многогранника в \mathbb{R}^3 не меняется при небольших перемещениях плоскости \mathcal{H}_i , поэтому последовательно перемещая плоскости $\{\mathcal{H}_j\}_{j=1}^m$ так, чтобы после перемещения плоскость \mathcal{H}_i не была параллельна плоскостям \mathcal{H}_j , $j < i$, прямым $\mathcal{H}_j \cap \mathcal{H}_k$, $j < k < i$, и не проходила через точки $\mathcal{H}_j \cap \mathcal{H}_k \cap \mathcal{H}_l$, $j < k < l < i$, мы получим многогранник $P' \simeq P$, у которого любые плоскости $\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j, \mathcal{H}_k$, $i < j < k$, пересекаются в единственной точке, не лежащей в \mathcal{H}_l , $l \notin \{i, j, k\}$. В этом случае будем говорить что плоскости $\{\mathcal{H}_j\}_{j=1}^m$ *находятся в общем положении*.

Пусть треугольная грань $F_i \subset P'$ граничит с гранями F_j, F_k и F_l . Тогда $F_j \cap F_k \cap F_l = \emptyset$, иначе $P \simeq \Delta^3$. При помощи проективного преобразования, переводящего P' в некоторый многогранник Q и оставляющего плоскости $\{\mathcal{H}_r\}_{r=1}^m$ в общем положении, можно добиться того, чтобы Q и $\mathcal{H}_j \cap \mathcal{H}_k \cap \mathcal{H}_l$ лежали в разных полупространствах относительно \mathcal{H}_i . Удаляя плоскость \mathcal{H}_i , мы получаем многогранник Q' , срезка вершины которого даёт многогранник Q и грань F_i .

Пусть четырёхугольная грань $F_i \subset P'$ граничит с гранями F_j, F_k, F_l и F_r . Рассматривая точку $\mathcal{H}_j \cap \mathcal{H}_k \cap \mathcal{H}_l$ и ту из восьми частей пространства, в которой лежит P' , можно найти проективное преобразование, сохраняющее плоскости $\{\mathcal{H}_r\}_{r=1}^m$ в общем положении и переводящее P' в некоторый многогранник Q , у которого плоскости $\mathcal{H}_j, \mathcal{H}_k, \mathcal{H}_l$ и \mathcal{H}_r образуют симплекс, содержащий Q . Тогда плоскость \mathcal{H}_i имеет по две вершины этого симплекса с каждой стороны, иначе F_i является треугольником. Удаляя плоскость \mathcal{H}_i , мы получаем многогранник Q' , срезка ребра которого даёт многогранник Q и грань F_i . \square

Следствие 3. Любой многогранник $P \in \mathfrak{P}_6$ комбинаторно эквивалентен многограннику, получаемому из а) симплекса или многогранника из \mathfrak{P}_6 без треугольников последовательностью срезов вершин; б) симплекса или многогранника из \mathfrak{P}_6 без четырёхугольников последовательностью срезов рёбер; в) симплекса или фуллерена последовательностью срезов вершин и рёбер.

Доказательство. Результат получается из леммы 1 и того факта, что срезка ребра или вершины не уменьшает число сторон каждой грани. \square

Определение 4. Граф $\Gamma = (V, E)$ состоит из множества вершин V и множества рёбер E , являющихся неупорядоченными парами вершин.

Путьм в графе Γ называется последовательность вершин (v_1, \dots, v_l) , в которой v_i и v_{i+1} соединены ребром для $i = 1, \dots, l - 1$.

Циклом называется замкнутый путь (v_1, \dots, v_{l+1}) , где $v_{l+1} = v_1$. Будем обозначать цикл (v_1, \dots, v_l) . Цикл из более чем двух вершин называется *простым*, если он проходит через каждую вершину не более одного раза. Цикл называется *бесхордовым*, если у него нет *хорд* — рёбер графа, соединяющих вершины, которые не следуют друг за другом. Положим l_γ — число входящих в цикл γ рёбер.

Графом $G(P)$ многогранника P называется граф его вершин и рёбер. Пути и циклы в этом графе мы будем называть *рёберными*.

Мы будем неявно использовать следующую версию теоремы Жордана, которая может быть доказана непосредственно.

Теорема 1. Пусть P — простой 3-многогранник и $\gamma \subset G(P)$ — простой цикл. Тогда

- 1) множество $\partial P \setminus \gamma$ состоит из двух связных компонент C_1 и C_2 ;
- 2) пусть $\mathcal{D}_\alpha = \{F_j \in \mathcal{F} : \text{int } F_j \subset C_\alpha\} \subset \mathcal{F}$, $\alpha = 1, 2$. Тогда $\mathcal{D}_1 \sqcup \mathcal{D}_2 = \mathcal{F}$;
- 3) замыкание $\overline{C_\alpha}$ гомеоморфно диску, причём $\overline{C_\alpha} = |\mathcal{D}_\alpha|$.

Определение 5. Для диска D , ограниченного простым циклом $\gamma \subset G(P)$, мы будем обозначать через $p_k(D)$ число входящих в него k -угольников, $f_i(D)$ — число i -мерных граней, $\mu_k(D)$ — число вершин на γ индекса k в D . Множество всех дисков, возникающих таким образом на многогранниках из \mathfrak{P}_6 , будем обозначать \mathfrak{D}_6 .

Конструкция 1 (Нанотрубки). Рассмотрим замощение плоскости \mathbb{R}^2 правильными шестиугольниками. Для трёх шестиугольников с общей вершиной возьмём векторы \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 , соединяющие центр одного шестиугольника с центрами остальных шестиугольников. Для неотрицательных целых чисел (p, q) , $p \geq q$, рассмотрим вектор $\mathbf{c} = p\mathbf{a}_1 + q\mathbf{a}_2$. Факторизация плоскости по вектору \mathbf{c} задаёт разбиение цилиндра на шестиугольники. Рассмотрим замкнутую цепочку граней на цилиндре, которая получается, если от заданного шестиугольника пройти p раз вдоль вектора \mathbf{a}_1 и q раз вдоль вектора \mathbf{a}_2 в произвольном порядке. Граница этой цепочки состоит из двух простых рёберных циклов, которые получаются друг из друга переносом на вектор $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$. Если поверхность многогранника $P \in \mathfrak{P}_6$ комбинаторно

эквивалентна поверхности, получающейся разрезанием цилиндра вдоль двух таких параллельных циклов и заклеиванием циклов дисками из \mathfrak{D}_6 с $\pi = 6$, то P называется *нанотрубкой типа* (p, q) .

Нам потребуется следующий известный результат.

Лемма 2. Пусть γ — простой рёберный цикл в простом 3-многограннике P , ограничивающий диск D . Тогда

$$\pi(D) = 6 - \mu_2(D) + \mu_3(D) + \sum_{k \geq 7} (k - 6)p_k(D).$$

Доказательство. Для краткости будем опускать обозначение диска в его численных характеристиках. Вычисляя эйлерову характеристику, получаем: $\chi(D) = f_0 - f_1 + f_2 = 1$. Считая двумя способами числа пар (ребро, его вершина), имеем

$$2f_1 = 3(f_0 - \mu_2) + 2\mu_2 = 3f_0 - \mu_2.$$

Комбинируя две формулы, получаем $\frac{2f_1 + \mu_2}{3} - f_1 + f_2 = 1$, откуда $f_1 = 3f_2 - 3 + \mu_2$.

Считая двумя способами число пар (грань, её ребро), получаем

$$\sum_{k \geq 3} kp_k = 2(f_1 - l_\gamma) + l_\gamma = 2f_1 - l_\gamma = 2f_1 - \mu_2 - \mu_3$$

Подставляя сюда полученное ранее выражение для f_1 , имеем

$$\sum_{k \geq 3} kp_k = 6f_2 - 6 + 2\mu_2 - \mu_2 - \mu_3 = 6 \sum_{k \geq 3} p_k - 6 + \mu_2 - \mu_3,$$

откуда получается искомая формула. □

Следствие 4. Пусть $D \in \mathfrak{D}_6$. Тогда $\pi(D) = 6 - \mu_2(D) + \mu_3(D)$.

3. k -пояса

Определение 6. Пусть P — простой 3-многогранник. Толстым путём называется последовательность граней $(F_{i_1}, \dots, F_{i_k})$ такая, что $F_{i_j} \cap F_{i_{j+1}}$ — ребро для всех $j = 1, \dots, k - 1$. k -петлёй, $k \geq 2$, называется замкнутый толстый путь $\mathcal{L} = (F_{i_1}, \dots, F_{i_k}, F_{i_{k+1}})$, $F_{i_{k+1}} = F_{i_1}$. Мы будем обозначать её $(F_{i_1}, \dots, F_{i_k})$. По определению 1-петля \mathcal{L} состоит из одной грани F_{i_1} . k -петля называется *простой*, если она состоит из попарно различных граней.

Определение 7. Пусть γ — простой рёберный цикл. Обходя его в компоненте \mathcal{C}_α , мы получаем l_α -петлю $\mathcal{L}_\alpha \subset \mathcal{D}_\alpha$, $\alpha \in \{1, 2\}$. Будем говорить, что \mathcal{L}_α *примыкает* к γ . Также мы будем говорить, что диск, ограниченный γ , *примыкает* к γ .

l_1 -петля $\mathcal{L}_1 = (F_{i_1}, \dots, F_{i_{l_1}})$ *примыкает* к l_2 -петле $\mathcal{L}_2 = (F_{j_1}, \dots, F_{j_{l_2}})$ (по циклу γ), если эти петли примыкают к одному и тому же циклу γ . Если $l_2 = 1$, то \mathcal{L}_1 *окружает* грань F_{j_1} .

Пусть цикл γ имеет a_p^1 подряд идущих рёбер, соответствующих $F_{i_p} \in \mathcal{L}_1$, и a_q^2 подряд идущих рёбер, соответствующих $F_{j_q} \in \mathcal{L}_2$.

Лемма 3. Пусть петля \mathcal{L}_1 примыкает к петле \mathcal{L}_2 вдоль цикла γ . Тогда выполнено одно из следующих условий:

- 1) \mathcal{L}_α — 1-петля а \mathcal{L}_β — a_1^α -петля, $a_1^\alpha \geq 3$, для $\{\alpha, \beta\} = \{1, 2\}$;
- 2) $l_1, l_2 \geq 2$, $l_1 + l_2 = l_\gamma = \sum_{r=1}^{l_1} a_r^1 = \sum_{r=1}^{l_2} a_r^2$.

Доказательство. Если $l_2 = 1$, то γ является границей грани F_{j_1} , последовательные рёбра цикла γ принадлежат разным граням в \mathcal{L}_1 и $l_1 = a_1^2$. Аналогично для $l_1 = 1$.

Пусть $l_1, l_2 \geq 2$. Любое ребро цикла γ является пересечением 2-грани из \mathcal{L}_1 с 2-гранью из \mathcal{L}_2 . Последовательные рёбра в γ принадлежат одной и той же 2-грани в \mathcal{L}_α , тогда и только тогда, когда они принадлежат последовательным граням в \mathcal{L}_β , $\{\alpha, \beta\} = \{1, 2\}$, поэтому $l_\alpha = \sum_{r=1}^{l_\beta} (a_r^\beta - 1) = \sum_{r=1}^{l_\beta} a_r^\beta - l_\beta$. Имеем $l_\gamma = \sum_{r=1}^{l_\beta} a_r^\beta = l_1 + l_2$. \square

Определение 8. k -поясом, $k \geq 3$, простого многогранника называется k -петля $\mathcal{B} = (F_{i_1}, \dots, F_{i_k})$ такая, что $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} = \emptyset$, и если $F_{i_a} \cap F_{i_b} \neq \emptyset$, то $\{a, b\} \in \{\{1, 2\}, \dots, \{k-1, k\}, \{k, 1\}\}$. Простой 3-многогранник $P \neq \Delta^3$ без 3-поясов называется *флаговым* 3-многогранником.

Замечание 1. Для симплициального 3-многогранника P^* , двойственного к простому 3-многограннику P , понятие k -пояса отвечает понятию бесхордового рёберного k -цикла, не содержащегося в одной грани.

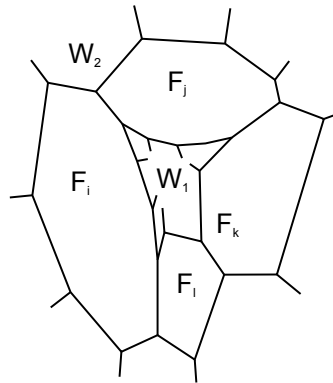


Рис. 3. 4-пояс

Лемма 4. Пусть $\mathcal{B} = (F_{i_1}, \dots, F_{i_k})$ — k -пояс. Тогда

- 1) \mathcal{B} не содержит треугольников;
- 2) $|\mathcal{B}|$ гомеоморфно цилиндру;
- 3) $\partial|\mathcal{B}|$ состоит из двух простых рёберных циклов γ_1 и γ_2 ;
- 4) $\partial P \setminus |\mathcal{B}|$ состоит из двух связных компонент \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 ;
- 5) пусть $\mathcal{W}_\alpha = \{F_j \in \mathcal{F} : \text{int } F_j \subset \mathcal{P}_\alpha\} \subset \mathcal{F}$, $\alpha = 1, 2$. Тогда $\mathcal{W}_1 \sqcup \mathcal{W}_2 \sqcup \mathcal{B} = \mathcal{F}$;

б) $\overline{\mathcal{P}_\alpha} = |\mathcal{W}_\alpha|$ гомеоморфно диску, $\alpha = 1, 2$;

γ) $\partial\mathcal{P}_\alpha = \partial\overline{\mathcal{P}_\alpha} = \gamma_\alpha$, $\alpha = 1, 2$.

Доказательство получается непосредственным применением теоремы 1.

Пусть грань $F_{i_j} \in \mathcal{B}$ имеет α_j рёбер в γ_α и β_j рёбер в γ_β , $\{\alpha, \beta\} = \{1, 2\}$. Тогда $\alpha_j, \beta_j \geq 1$ и $\alpha_j + \beta_j = m_{i_j} - 2$.

Лемма 5. Пусть $P \in \mathfrak{P}_6$ и пусть \mathcal{B}_k — k -пояс, состоящий из b_i i -угольников, $4 \leq i \leq 6$. Тогда выполнено одно из следующих условий:

1) \mathcal{B}_k окружает две k -угольные грани $F_s : \{F_s\} = \mathcal{W}_1$, и $F_t : \{F_t\} = \mathcal{W}_2$, и все 2-грани в \mathcal{B}_k — четырёхугольники;

2) \mathcal{B}_k окружает k -угольную грань $F_s : \{F_s\} = \mathcal{W}_\alpha$ и примыкает к l_β -петле $\mathcal{L}_\beta \subset \mathcal{W}_\beta$, $\beta = \{1, 2\} \setminus \{\alpha\}$, $l_\beta = b_5 + 2b_6 \geq 2$;

3) \mathcal{B}_k примыкает к l_1 -петле $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{W}_1$ и l_2 -петле $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{W}_2$, где

$$а) l_\alpha = \sum_{j=1}^k (\alpha_j - 1) \geq 2, \alpha = 1, 2;$$

$$б) l_1 + l_2 = b_5 + 2b_6 = 2k - 2b_4 - b_5 \leq 2k;$$

$$в) \min\{l_1, l_2\} \leq k - b_4 - \lceil \frac{b_5}{2} \rceil \leq k;$$

$$г) Если $l_1, l_2 \geq k$, то $l_1 = l_2 = k$, $b_4 = b_5 = 0$, $b_6 = k$.$$

Доказательство. Обходя цикл γ_α в \mathcal{P}_α , мы получаем l_α -петлю $\mathcal{L}_\alpha \subset \mathcal{W}_\alpha$.

Если \mathcal{B}_k окружает два k -угольника $F_s : \{F_s\} = \mathcal{W}_1$, и $F_t : \{F_t\} = \mathcal{W}_2$, то все грани в \mathcal{B}_k являются четырёхугольниками.

Если \mathcal{B}_k окружает k -угольник $F_s : \{F_s\} = \mathcal{W}_\alpha$ и примыкает к l_β -петле $\mathcal{L}_\beta \subset \mathcal{W}_\beta$, $l_\beta \geq 2$, то из леммы 3 получаем $l_\beta = \sum_{i=1}^k (m_{j_i} - 3 - 1) = \sum_{j=4}^6 j b_j - 4 \sum_{j=4}^6 b_j = b_5 + 2b_6$.

Если \mathcal{B}_k примыкает к l_1 -петле \mathcal{L}_1 и l_2 -петле \mathcal{L}_2 , $l_1, l_2 \geq 2$, то а) следует из леммы 3.

$$l_1 + l_2 = \sum_{i=1}^k (\alpha_i + \beta_i - 2) = \sum_{i=1}^k (m_{j_i} - 4) = \sum_{j=4}^6 j b_j - 4 \sum_{j=4}^6 b_j = b_5 + 2b_6 = 2k - 2b_4 - b_5.$$

Имеем $\min\{l_1, l_2\} \leq k - b_4 - \lceil \frac{b_5}{2} \rceil \leq k$

Если $l_1, l_2 \geq k$, то из б) получаем $l_1 = l_2 = k$, $b_4 = b_5 = 0$, $b_6 = k$. \square

Следствие 5. Пусть $P \in \mathfrak{P}_6$ и пусть l_1 -петля $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{D}_1$ примыкает к l_2 -петле $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{D}_2$ вдоль цикла γ , $l_1, l_2 \geq 2$. Тогда $\pi(\mathcal{D}_\alpha) = 6 - l_\beta + l_\alpha$.

Доказательство. Имеем $\mu_2(\mathcal{D}_\alpha) = l_\beta$, $\mu_3(\mathcal{D}_\alpha) = l_\alpha$. Теперь искомым результатом получается из следствия 4. \square

Определение 9. По аналогии с терминологией работ [15, 17] для циклических рёберных разрезов назовём k -пояс многогранника из \mathfrak{P}_6 невырожденным, если для каждой его части $\pi(\mathcal{W}_\alpha) = 6$. Если это условие не выполнено, то назовём k -пояс вырожденным.

Следствие 6. *Невырожденный k -пояс состоит из шестиугольников, и с каждой стороны к нему примыкает k -петля.*

Доказательство. Получается применением леммы 5 и следствия 5. □

Конструкция 2 (Семейство $\mathcal{S}_{(3,0)}$). Рассмотрим множество $\mathcal{Q}_{(3,0)}$ из трёх дисков, изображенных первыми на Рис. 4. Для каждого из них граничные грани имеют снаружи $(2, 2, 2)$ рёбер. Окружим один из дисков 3-поясом из шестиугольников.

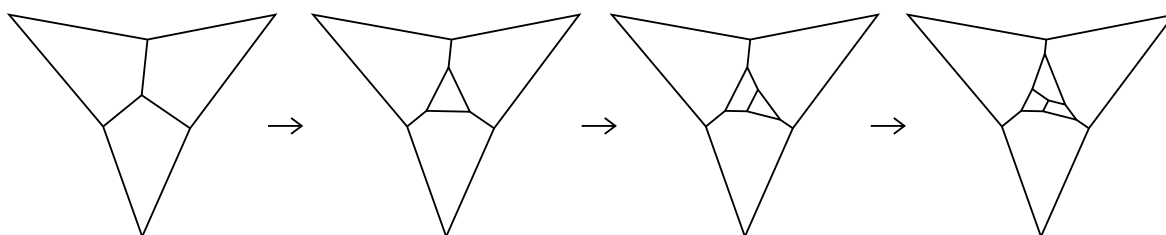


Рис. 4. Диски $\mathcal{Q}_{(3,0)}$, связанные срезками

Получим снова $(2, 2, 2)$ рёбер на границе. Таким образом, можно добавить $r \geq 0$ поясов шестиугольников, а в конце приклеить один из дисков из $\mathcal{Q}_{(3,0)}$. Получаем семейство $\mathcal{S}_{(3,0)}$ комбинаторных многогранников. При $r \geq 1$ каждый многогранник является нанотрубкой типа $(3, 0)$. Геометрически многогранники из $\mathcal{S}_{(3,0)}$ можно реализовать, многократно применяя описанные на рисунке срезки вершин и рёбер к противоположным вершинам куба.

Конструкция 3 (Семейство $\mathcal{S}_{(2,1)}$). Рассмотрим множество $\mathcal{Q}_{(2,1)}$ из трёх дисков, изображенных первыми на Рис. 5. Для каждого из них граничные грани имеют снаружи $(1, 2, 3)$ рёбер. Окружим один из дисков 3-поясом из шестиугольников. Получим снова $(1, 2, 3)$ рёбер на границе. Таким образом, можно добавить $r \geq 0$

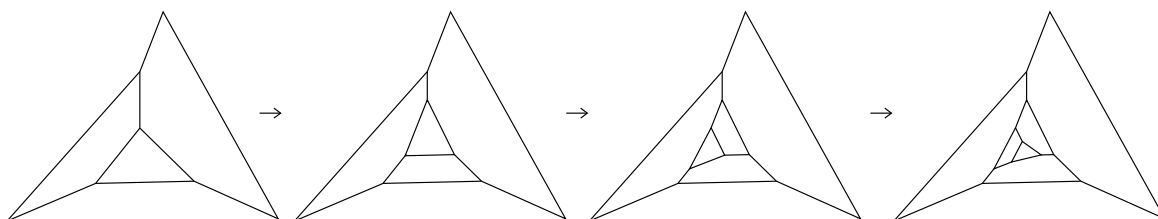


Рис. 5. Диски $\mathcal{Q}_{(2,1)}$, связанные срезками

поясов шестиугольников, а в конце приклеить один из дисков из $\mathcal{Q}_{(2,1)}$. Получаем семейство $\mathcal{S}_{(2,1)}$ комбинаторных многогранников. При $r \geq 1$ каждый многогранник является нанотрубкой типа $(2, 1)$. Геометрически многогранники из $\mathcal{S}_{(2,1)}$ можно реализовать, многократно применяя описанные на рисунке срезки вершин к двум вершинам v_1 и v_2 многогранника, получающегося срезкой двух разных вершин тетраэдра, таким что v_1 и v_2 не лежат в одной грани и каждая из них является пересечением треугольника, четырёхугольника и пятиугольника.

Положим $\mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_{(3,0)} \cup \mathcal{S}_{(2,1)}$, $\mathcal{Q}_3 = \mathcal{Q}_{(3,0)} \cup \mathcal{Q}_{(2,1)}$, $\mathcal{R}_3 = \{R_1, R_2\} \subset \mathcal{D}_6$, где R_1 — треугольник и R_2 — соседние треугольник и четырёхугольник.

Теорема 2. Пусть $P \in \mathfrak{P}_6$. Тогда

- 1) любой вырожденный 3-пояс в P примыкает к $R \in \mathcal{R}_3$;
- 2) если P имеет невырожденный 3-пояс, то $P \in \mathcal{S}_3$ для $r \geq 1$;
- 3) многогранник P принадлежит $\mathcal{S}_{(3,0)}$ или $\mathcal{S}_{(2,1)}$ тогда и только тогда, когда в нём имеется простой рёберный цикл, ограничивающий диск из $\mathcal{Q}_{(3,0)}$ или $\mathcal{Q}_{(2,1)}$ соответственно.

Доказательство. Пусть \mathcal{B} — 3-пояс многогранника $P \in \mathfrak{P}_6$. По лемме 5 он примыкает к l_α -петле \mathcal{L}_α и l_β -петле \mathcal{L}_β , где $1 \leq l_\alpha \leq l_\beta$. Если $l_\alpha = 1$, то \mathcal{B} окружает R_1 . Если $l_\alpha = 2$, то $\mathcal{L}_\alpha = (F_i, F_j)$. По лемме 3 имеем $3 + 2 = (m_i - 1) + (m_j - 1) = m_i + m_j - 2$, откуда $\{m_i, m_j\} = \{3, 4\}$ и \mathcal{B} окружает R_2 . Если $l_\alpha = 3$, то $l_\beta = 3$ по лемме 5, поэтому пояс является невырожденным, в частности состоит из шестиугольников.

Если $\mathcal{L}_\alpha = (F_i, F_j, F_k)$ не является 3-поясом, то $F_i \cap F_j \cap F_k$ — вершина и по лемме 3 получаем $3 + 3 = (m_i - 2) + (m_j - 2) + (m_k - 2)$, откуда $m_i + m_j + m_k = 12$. Решения этого уравнения среди натуральных чисел от 3 до 6 с точностью до перестановки имеют вид $(3, 3, 6)$, $(3, 4, 5)$, $(4, 4, 4)$. Первый случай невозможен, так как простой многогранник с двумя соседними треугольниками является симплексом. Во втором случае получаем первый диск из $\mathcal{Q}_{(2,1)}$, в третьем случае — первый диск из $\mathcal{Q}_{(3,0)}$.

Если \mathcal{L}_α является вырожденным поясом, то по доказанному он окружает R_1 или R_2 . Для 3-пояса \mathcal{L}_α , примыкающего к 3-поясу \mathcal{B} и окружающему треугольник, из леммы 5 следует, что $3 = b_5 + 2b_6$ и $b_4 + b_5 + b_6 = 3$, откуда получаем два решения $(b_4, b_5, b_6) \in \{(0, 3, 0), (1, 1, 1)\}$, что даёт вторые диски из $\mathcal{Q}_{(3,0)}$ и $\mathcal{Q}_{(2,1)}$. Для 3-пояса \mathcal{L}_α , примыкающего к R_2 и \mathcal{B} , из леммы 5 следует, что $5 = b_5 + 2b_6$ и $b_4 + b_5 + b_6 = 3$, откуда получаем $(b_4, b_5, b_6) = (0, 1, 2)$. В зависимости от расположения пятиугольника получаем третьи диски из $\mathcal{Q}_{(3,0)}$ и $\mathcal{Q}_{(2,1)}$.

Если \mathcal{L}_α — невырожденный пояс, то мы можем двигаться дальше. Таким образом, двигаясь в две стороны от \mathcal{B} , мы получаем цепочку из r три-поясов шестиугольников, которая заканчивается диском из $\mathcal{Q}_{(3,0)}$ или $\mathcal{Q}_{(2,1)}$. Так как числа внешних рёбер граничных граней дисков из разных наборов и отвечающих им поясов несовместны, на двух концах диски должны быть из одного набора, следовательно $P \in \mathcal{S}_{(3,0)} \cup \mathcal{S}_{(2,1)}$.

Если P имеет простой цикл γ , ограничивающий диск из набора $\mathcal{Q}_{(3,0)}$ или $\mathcal{Q}_{(2,1)}$, то с другой стороны к нему примыкает 3-петля \mathcal{L} . Если она является поясом, то повторяя рассуждения, приведённые выше, мы получаем, что либо пояс невырожденный и $P \in \mathcal{S}_{(3,0)} \cup \mathcal{S}_{(2,1)}$ для $r \geq 1$, либо он вырожденный и примыкает к R_1 или R_2 . В этом случае γ с другой стороны также ограничивает диск из \mathcal{Q}_3 . Так как диски из $\mathcal{Q}_{(3,0)}$ и $\mathcal{Q}_{(2,1)}$ имеют несовместные наборы чисел внешних рёбер граничных граней, P принадлежит соответствующему семейству $\mathcal{S}_{(3,0)}$ или $\mathcal{S}_{(2,1)}$ для $r = 0$. \square

Этот результат для случая многогранников с четырёхугольными и шестиугольными гранями следует из работы [1]. Для фуллеренов мы получаем результат, который следует из работы [14]. Другое доказательство дано в [23].

Следствие 7. *Фуллерены не имеют 3-поясов, то есть являются флаговыми многогранниками.*

Лемму 2.17 работы [23] можно сформулировать следующим образом.

Лемма 6. *Пусть $P \not\cong I^3$ — флаговый 3-многогранник и F — его четырёхугольная грань. Тогда $P \simeq Q$, где Q получается из флагового многогранника срезкой ребра, дающей грань F .*

Следствие 8. *Любой многогранник $P \in \mathfrak{F}_6 \setminus \mathcal{S}_{(3,0)}$ без треугольников комбинаторно эквивалентен многограннику, который получается из куба или фуллерена при помощи последовательности срезов рёбер.*

Доказательство. Из теоремы 2 многогранник $Q \in \mathfrak{F}_6$ без треугольников является флаговым тогда и только тогда, когда $Q \notin \mathcal{S}_{(3,0)}$. (Этот результат также напрямую следует из работы [1] о циклических рёберных разрезах). Тогда по лемме 6 если $P \not\cong I^3$ имеет четырёхугольную грань, то он комбинаторно эквивалентен многограннику, получающемуся из флагового многогранника P' срезкой ребра. Срезка ребра не уменьшает число сторон граней, поэтому $P' \in \mathfrak{F}_6 \setminus \mathcal{S}_{(3,0)}$ — многогранник без треугольников. Повторяя рассуждение, мы придём к кубу или фуллерену. \square

4. Основной результат

Сформулируем основной результат работы. При $k \leq 7$ в случае фуллеренов он выводится из работ [15, 16, 17] о циклических рёберных разрезах.

Теорема 3. 1) *Для любого $k \geq 3$ существуют*

- а) конечный набор $\mathcal{R}_k \subset \mathcal{D}_6$, $\pi(R) < 6$ для всех $R \in \mathcal{R}_k$;*
- б) конечный набор $\mathcal{Q}_k \subset \mathcal{D}_6$, $\pi(Q) = 6$ для всех $Q \in \mathcal{Q}_k$;*
- в) семейство $\mathcal{S}_k \subset \mathfrak{F}_6$, $\mathcal{S}_3 \subset \mathcal{S}_4 \subset \dots \subset \mathcal{S}_k$, где каждый многогранник в $\mathcal{S}_k \setminus \mathcal{S}_{k-1}$ состоит из последовательности $r \geq 0$ примыкающих друг к другу k -поясов шестиугольников и двух примыкающих к ним дисков из \mathcal{Q}_k*

такие, что для любого многогранника $P \in \mathfrak{F}_6$

- а) любой вырожденный k -пояс примыкает к диску из \mathcal{R}_k ;*
 - б) если P имеет невырожденный k -пояс, то он состоит из шестиугольников и $P \in \mathcal{S}_k$ для $r \geq 1$.*
- 2) *Все многогранники в \mathcal{S}_k , кроме конечного множества \mathcal{X}_k , являются нанотрубками.*

3) $P \in \mathcal{S}_k$ тогда и только тогда, когда в P есть простой рёберный цикл, ограничивающий диск из \mathcal{Q}_k .

Доказательство. 1) Докажем индукцией по k одновременно со следующей леммой.

Лемма 7. Для любого $k \geq 1$ существуют

- конечный набор $\widehat{\mathcal{R}}_k \subset \mathfrak{D}_6$, $\pi(R) < 6$ для всех $R \in \widehat{\mathcal{R}}_k$;
- конечный набор $\widehat{\mathcal{Q}}_k \subset \mathfrak{D}_6$, $\pi(Q) = 6$ для всех $Q \in \widehat{\mathcal{Q}}_k$

такие, что для любой k -петли \mathcal{L} многогранника из \mathfrak{P}_6 , примыкающей к l -петле \mathcal{B} , $k \leq l$, по циклу γ ,

1) при $k < l$ цикл γ ограничивает диск $R \in \widehat{\mathcal{R}}_k$, $\mathcal{L} \subset R$;

2) при $k = l$ либо \mathcal{L} является k -поясом, либо $P \in \mathcal{S}_{k-1}$ для $r \geq 1$, либо γ ограничивает диск $Q \in \widehat{\mathcal{Q}}_k$, $\mathcal{L} \subset Q$.

$\widehat{\mathcal{R}}_1$ состоит из k -угольников, $k \leq 6$, $\widehat{\mathcal{Q}}_1 = \emptyset$, $\mathcal{S}_0 = \emptyset$.

$\widehat{\mathcal{R}}_2$ состоит из всевозможных пар двух k_1 - и k_2 -угольников с общим ребром, $k_1 + k_2 \geq 7$, $\widehat{\mathcal{Q}}_2$ состоит из двух треугольников с общим ребром, $\mathcal{S}_1 = \emptyset$.

$\widehat{\mathcal{R}}_3$ состоит из троек k_1 -, k_2 - и k_3 -угольников с общей вершиной, $k_1 + k_2 + k_3 \geq 13$, треугольника, окружённого k_1 -, k_2 -, k_3 -угольниками с $k_1 + k_2 + k_3 \geq 16$, и смежных треугольника и четырёхугольника, окружённых тремя шестиугольниками; $\widehat{\mathcal{Q}}_3$ состоит из первых дисков множеств $\mathcal{Q}_{(3,0)}$ и $\mathcal{Q}_{(2,1)}$, $\mathcal{S}_2 = \{\Delta^3\}$, где $r = 0$.

Для $k = 3$ получаем теорему 2.

Пусть теорема и лемма верны для всех $k' < k$ и пусть k -петля $\mathcal{L} = (F_{i_1}, \dots, F_{i_k})$ примыкает к l -петле \mathcal{B} , $4 \leq k \leq l$ по циклу γ .

Если \mathcal{L} является k -поясом и $k < l$, то с другой стороны к \mathcal{L} примыкает некоторая l' -петля \mathcal{L}' по циклу γ' , где либо $l' = 1$, либо $l' \geq 2$ и $l' + l \leq 2k$. Тогда либо $l' = 1 < k$, либо $l' - k \leq k - l < 0$, поэтому из индукционного предположения γ' ограничивает диск $R \in \widehat{\mathcal{R}}_{l'}$. Добавим в $\widehat{\mathcal{R}}_k$ диски, получаемые из дисков в $\bigcup_{j=1}^{k-1} \widehat{\mathcal{R}}_j$ добавлением

примыкающего k -пояса. Таких дисков конечное число.

Пусть теперь петля \mathcal{L} не является k -поясом. Если она не является простой, то некоторая грань F_j входит в неё с разными индексами. Пусть $\{F_{i_{p_1}}, F_{i_{p_2}}, \dots, F_{i_{p_q}}, p_1 < \dots < p_q\}$ — все грани петли, совпадающие с F_j (Рис. 6). (Заметим, что последовательные грани петли не могут совпадать, поэтому, так как F_j имеет не более шести сторон, $q \leq 3$). Тогда грань F_j пересекает цикл γ по q связным участкам $\gamma_1, \dots, \gamma_q$. Пусть $\gamma = (\gamma_1, \eta_1, \gamma_2, \dots, \eta_{q-1}, \gamma_q, \eta_q)$ и $\partial F_j = (\gamma_1, \tau_1, \gamma_2, \dots, \tau_{q-1}, \gamma_q, \tau_q)$. Петля \mathcal{L} разбивается на q петель $\mathcal{L}_1 = (F_{i_{p_1}}, F_{i_{p_1}+1}, \dots, F_{i_{p_2}-1}), \dots, \mathcal{L}_q = (F_{i_{p_q}}, \dots, F_{i_k}, F_{i_1}, \dots, F_{i_{p_1}-1})$, каждая из которых примыкает к простому циклу $(\partial F_j \setminus \tau_j) \cup \eta_j$ и имеет длину $k_j \in \{2, \dots, k-2\}$. Цикл γ разбивает поверхность многогранника на два диска $|\mathcal{D}_1|$ и $|\mathcal{D}_2|$. Из условия $k \leq l$ и леммы 4 для диска $|\mathcal{D}_\alpha|$, $\mathcal{L} \subset \mathcal{D}_\alpha$ получаем: $\pi(\mathcal{D}_\alpha) = 6 - l + k \leq 6$. Тогда для любого простого цикла в $|\mathcal{D}_\alpha|$ имеем

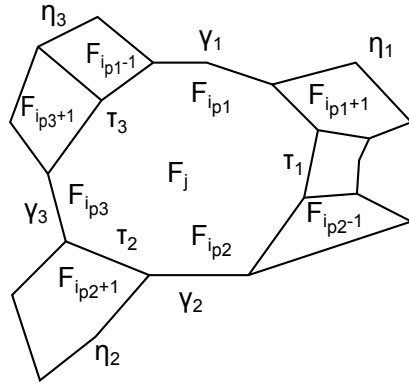


Рис. 6. Петля, не являющаяся простой

$\pi \leq \pi(\mathcal{D}_\alpha) \leq 6$ для связной компоненты, лежащей в $|\mathcal{D}_\alpha|$. Если $k < l$, то для каждой петли \mathcal{L}_j по индукционному предположению в лемме соответствующий цикл примыкает к $R \in \bigcup_{s=2}^{k-2} \widehat{\mathcal{R}}_s$, $\mathcal{L}_j \subset R$. Пусть теперь $k = l$. Тогда для любого j если \mathcal{L}_j является поясом, то по индукционному предположению в теореме либо $P \in \mathcal{S}_{k-2}$ для $r \geq 1$, если он невырожден, либо \mathcal{L}_j примыкает к диску из $\bigcup_{i=3}^{k-2} \mathcal{R}_i$, лежащему внутри $|\mathcal{D}_\alpha|$, если пояс вырожден. Если же \mathcal{L}_j не является поясом, то по индукционному предположению в лемме либо $P \in \mathcal{S}_{k-3}$ для $r \geq 1$, либо цикл примыкает к диску из $\bigcup_{i=2}^{k-2} \widehat{\mathcal{R}}_i \cup \bigcup_{i=2}^{k-2} \widehat{\mathcal{Q}}_i$, содержащему \mathcal{L}_j . Вариантов разбить петлю на меньшие петли конечно, поэтому мы получим конечный набор дисков для множеств $\widehat{\mathcal{R}}_k$ и $\widehat{\mathcal{Q}}_k$.

Если простая петля \mathcal{L} не является поясом, то пересекаются некоторые две её грани, не следующие друг за другом. Без ограничения общности можно считать, что это F_{i_1} и F_{i_p} (Рис. 7). Обозначим участок ∂F_{i_1} между $F_{i_1} \cap F_{i_k}$ и $F_{i_1} \cap F_{i_p}$, не

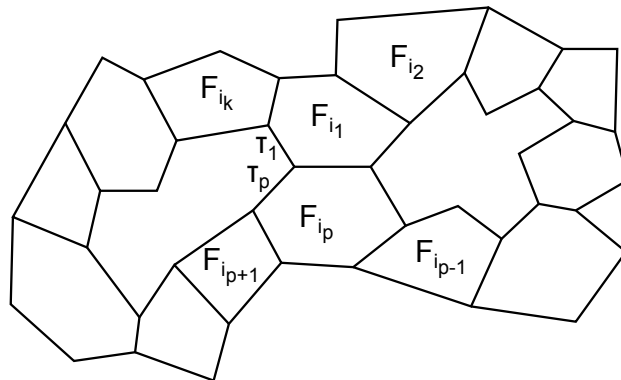


Рис. 7. Простая петля, не являющаяся поясом

включающий $F_{i_1} \cap F_{i_2}$, через τ_1 , а участок ∂F_{i_p} между $F_{i_p} \cap F_{i_{p+1}}$ и $F_{i_p} \cap F_{i_1}$, не включающий $F_{i_p} \cap F_{i_{p-1}}$, через τ_p . Простая петля $\mathcal{L}_1 = (F_{i_1}, \dots, F_{i_p})$ примыкает к простому рёберному циклу, составленному из частей $(\gamma \cap F_{i_1}, \gamma \cap F_{i_2}, \dots, \gamma \cap F_{i_p}, F_{i_p} \cap$

$F_{i_{p+1}}, \tau_p, \tau_1, F_{i_k} \cap F_{i_1}$). Аналогично простая петля $\mathcal{L}_2 = (F_{i_p}, \dots, F_{i_1})$ примыкает к простому рёберному циклу. Если k_1 и k_2 – длины петель, то $3 \leq k_1, k_2 \leq k-1$ и $k_1 + k_2 = k+2$. Снова мы имеем, что для каждого из полученных простых рёберных циклов в связной компоненте, лежащей в $|\mathcal{D}_\alpha|$, выполнено $\pi \leq \pi(\mathcal{D}_\alpha) \leq 6$. Проводя рассуждения, как в предыдущем случае, мы получаем конечный набор дисков для $\widehat{\mathcal{R}}_k$ и $\widehat{\mathcal{Q}}_k$. Таким образом, индукционный переход в лемме сделан.

Теперь предполагая, что лемма 7 верна для всех $k' \leq k$ и теорема верна для всех $k' < k$, сделаем индукционный переход в теореме.

Пусть \mathcal{B} – k -пояс. По лемме 5 к нему с двух сторон примыкают l_α -петля $\mathcal{L}_\alpha \subset \mathcal{W}_\alpha$ и l_β -петля $\mathcal{L}_\beta \subset \mathcal{W}_\beta$, $\{\alpha, \beta\} = \{1, 2\}$, $l_\alpha \leq l_\beta$, $l_\alpha = 1$ либо $l_\alpha + l_\beta \leq 2k$.

Если пояс вырожденный, то $l_\alpha < k$. В этом случае по лемме 7 мы получаем, что он примыкает к диску из $\widehat{\mathcal{R}}_{l_\alpha}$. Таким образом, $\mathcal{R}_k \subset \bigcup_{s=1}^{k-1} \widehat{\mathcal{R}}_s$ и состоит из дисков, примыкающих к k -поясам.

Если пояс невырожденный, то по следствию 6 он состоит из шестиугольников и $l_\alpha = l_\beta$. По лемме 7 либо \mathcal{L}_α является k -поясом, либо $P \in \mathcal{S}_{k-1}$ для $r \geq 1$, либо $\mathcal{W}_\alpha \in \widehat{\mathcal{Q}}_k$. Если \mathcal{L}_α является k -поясом, то либо он вырожден и по лемме 7 с другой стороны примыкает к диску из $\widehat{\mathcal{R}}_j$, $j < k$, либо он невырожден и с другой стороны примыкает к k -петле. Повторяя рассуждения, получаем, что либо $P \in \mathcal{S}_{k-1}$ для $r \geq 1$, либо \mathcal{W}_α состоит из цепочки примыкающих друг к другу k -поясов шестиугольников, заканчивающейся диском, который либо принадлежит $\widehat{\mathcal{Q}}_k$, либо получается из диска в $\bigcup_{j=1}^{k-1} \widehat{\mathcal{R}}_j$ добавлением примыкающего к нему пояса.

Все такие диски образуют конечное множество \mathcal{Q}_k . Двигаясь в другую сторону от \mathcal{B} , мы получаем аналогичную картину.

2) По построению каждый многогранник в \mathcal{S}_3 при $k \geq 1$ является нанотрубкой типа $(3, 0)$ или $(2, 1)$. Каждый многогранник из $\mathcal{S}_k \setminus \mathcal{S}_{k-1}$ состоит из последовательности r примыкающих друг к другу k -поясов шестиугольников, примыкающей с двух сторон к дискам из конечного набора \mathcal{Q}_k . Для k -пояса шестиугольников набор чисел $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ рёбер граней на одной границе однозначно задаёт набор $(6 - \alpha_1, \dots, 6 - \alpha_k)$ на другой границе, который, в свою очередь, однозначно задаёт набор чисел рёбер следующего k -пояса. Так как наборов чисел рёбер конечное число, либо на каком-то шаге невозможно построить новый k -пояс, либо два набора чисел рёбер с одной стороны разных поясов повторяются. Двигаясь в обратном направлении, мы получим, что и предшествующие им наборы также повторяются, в том числе первый набор. Итак, конечный набор всех различных типов k -поясов шестиугольников распадается в несвязное объединение циклических наборов поясов, переходящих друг в друга, и цепочек поясов, обрывающихся с двух сторон.

Для k -пояса шестиугольников $(F_{i_1}, \dots, F_{i_k})$ при переходе от F_j к F_{j+1} возможны следующие ситуации: либо F_{j+1} и F_{j-1} граничат с F_j по противоположным рёбрам, тогда мы «идём прямо». Либо рёбра $F_{j-1} \cap F_j$ и $F_j \cap F_{j+1}$ идут через один в ∂F_j . Тогда мы «поворачиваем направо или налево». Чтобы получить нанотрубку, надо найти такой s -пояс шестиугольников, чтобы при обходе его граней повороты чередовались, а между ними может быть любое число прямых отрезков.

Рассмотрим бесконечный цилиндр, который получается повторением цикли-

ческого набора k -поясов бесконечное число раз. Назовём l -петлю разделяющей цилиндр, если ломаная, состоящая из отрезков, соединяющих середины последовательных граней, разделяет цилиндр на две бесконечные части. Рассмотрим l -петлю, разделяющую цилиндр такую, что l минимально. Если она не является простой и какую-то грань мы проходим дважды, то петля распадается на две петли, хотя бы одна из которых разделяет цилиндр, поэтому можно найти петлю короче. Если простая петля не является поясом, то какие-то две грани, не следующие друг за другом, пересекаются. В этом случае мы снова получаем две более короткие петли, и хотя бы одна из них разделяет цилиндр. Таким образом, мы получаем l -пояс $(F_{i_1}, \dots, F_{i_l})$. Если в нём есть два последовательных поворота в одну и ту же сторону (Рис. 8), скажем, после граней F_{i_t} и F_{i_r} направо, то петля $(F_{i_1}, \dots, F_{i_{t-1}}, F_{j_t}, \dots, F_{j_{r-1}}, F_{i_{r+1}}, \dots, F_{i_l})$, где $(F_{j_t}, \dots, F_{j_{r-1}})$ — грани, примыкающие «справа» к граням $(F_{i_t}, \dots, F_{i_{r-1}})$, также разделяет цилиндр и имеет меньшую длину. Таким образом, мы нашли нужный пояс. Если многогранник P из

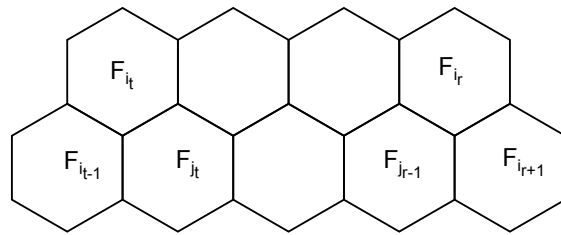


Рис. 8. Два последовательных поворота в одну сторону

серии содержит пояс из циклического набора и имеет достаточно много k -поясов шестиугольников, то на нём присутствует найденный l -пояс, поэтому P является нанотрубкой. Таким образом, множество $\mathcal{X}_k \subset \mathcal{S}_k$ состоит из конечного набора многогранников, которые составлены либо из поясов, не входящих в циклические наборы, либо из малого числа поясов.

3) Пусть в P есть простой рёберный цикл γ , ограничивающий диск $Q \subset \mathcal{Q}_k$. Так как $\pi(Q) = 6$, с другой стороны к циклу примыкает k -петля \mathcal{L} . Если она не является k -поясом, то по лемме 7 либо $P \in \mathcal{S}_{k-1} \subset \mathcal{S}_k$ для $r \geq 1$, либо γ примыкает к $Q' \in \widehat{\mathcal{Q}}_k$, $\mathcal{L} \subset Q'$, и $P \in \mathcal{S}_k \setminus \mathcal{S}_{k-1}$ для $r = 0$. Пусть теперь \mathcal{L} является k -поясом. Если он вырожден, то по лемме 7 с другой стороны \mathcal{L} примыкает к $R \in \bigcup_{s=1}^{k-1} \widehat{\mathcal{R}}_s$. Тогда по построению γ примыкает к $Q' \in \mathcal{Q}_k$, $\mathcal{L} \subset Q'$ и $P \in \mathcal{S}_k \setminus \mathcal{S}_{k-1}$ для $r = 0$. Если же пояс невырожден, то $P \in \mathcal{S}_k$ для $r \geq 1$ по доказанному.

Таким образом, теорема доказана. □

В работе [9] показано, что для диска D на фуллерене, ограниченного простым рёберным циклом γ с $p_5(D) < 6$, число граней в D ограничено сверху функцией от l_γ . Из этого следует, что число дисков на фуллеренах, содержащих меньше 6 пятиугольников и ограниченных простым рёберным циклом фиксированной длины, конечно. Как следствие в [9] доказано, что для заданного типа нанотрубок-фуллеренов число дисков с пятиугольником на границе, которые могут быть ис-

пользованы для построения нанотрубки, конечно. Мы получаем аналогичный результат для многогранников из \mathfrak{F}_6 как следствие теоремы 3.

Теорема 4. Пусть $P \in \mathfrak{F}_6$ и γ — простой рёберный цикл длины $l_\gamma = k$. Тогда выполнено одно из следующих условий:

- 1) γ примыкает к диску из $\bigcup_{j=1}^{\frac{k-1}{2}} \widehat{\mathcal{R}}_j \cup \mathcal{Q}_{\frac{k}{2}}$, где в объединении участвуют только множества с целыми индексами;
- 2) $k = 2t$ чётно, $\pi(\mathcal{D}_\alpha) = \pi(\mathcal{D}_\beta) = 6$ и либо $P \in \mathcal{S}_{t-1}$ для $r \geq 1$, либо $\mathcal{S}_t \setminus \mathcal{S}_{t-1}$ для $r \geq 2$ и γ примыкает с двух сторон к невырожденным t -поясам.

Доказательство. К γ примыкают l_α -петля $\mathcal{L}_\alpha \subset \mathcal{D}_\alpha$ и l_β -петля $\mathcal{L}_\beta \subset \mathcal{D}_\beta$, $l_\alpha \leq l_\beta$. Если $l_\alpha = 1$, то γ примыкает к диску из $\widehat{\mathcal{R}}_1$. Пусть $l_\alpha \geq 2$. По лемме 3 имеем $l_\alpha + l_\beta = k$. Если $l_\alpha < l_\beta$, то $l_\alpha \leq \frac{k-1}{2}$ и γ примыкает к диску из $\widehat{\mathcal{R}}_{l_\alpha}$ по лемме 7. Пусть $l_\alpha = l_\beta = t$. Тогда $\pi(\mathcal{D}_\alpha) = \pi(\mathcal{D}_\beta) = 6$, $k = 2t$ и по лемме 7 либо γ примыкает к диску из $\widehat{\mathcal{Q}}_t \subset \mathcal{Q}_t$, либо $P \in \mathcal{S}_{t-1}$ для $r \geq 1$, либо \mathcal{L}_α и \mathcal{L}_β являются поясами. Если \mathcal{L}_α — невырожденный пояс, то $P \in \mathcal{S}_t$ по теореме 3, а если \mathcal{L}_α — вырожденный пояс, то он примыкает к l' -петле \mathcal{L}' , $l' < l_\alpha$, поэтому по лемме 7 и к диску $R \in \widehat{\mathcal{R}}_{l'}$, $\mathcal{L}' \subset R$. Тогда γ примыкает к диску, получаемому из R добавлением пояса \mathcal{L}_α . Этот диск по построению лежит в \mathcal{Q}_t . Аналогично рассматривается пояс \mathcal{L}_β . Если \mathcal{L}_α и \mathcal{L}_β — невырожденные t -пояса и $P \notin \mathcal{S}_{t-1}$, то $r \geq 2$ из доказательства теоремы 3. \square

Список литературы

- [1] T. Došlić, “Cyclical edge-connectivity of fullerene graphs and $(k, 6)$ -cages”, *Journal of Mathematical Chemistry*, **33**:2 (2003), 103—112.
- [2] A. R. Ashrafi, Z. Mehranian, “Topological Study of $(3, 6)$ - and $(4, 6)$ -Fullerenes”, *Topological Modelling of Nanostructures and Extended Systems, Series Carbon Materials: Chemistry and Physics*. V. 7, 2013, 487—510.
- [3] G. Brinkman, A. W. Dress, “A constructive enumeration of fullerenes”, *J. Algorithms*, **23**:2 (1997), 345—358.
- [4] G. Brinkmann, J. Goedgebeur and B. D. McKay, “The Generation of Fullerenes”, *Journal of Chemical Information and Modeling*, **52**:11 (2012), 2910—2918.
- [5] M. Endo, H. W. Kroto, “Formation of carbon nanofibers”, *J. Phys. Chem.*, **96** (1992), 6941—6944.
- [6] G. Brinkmann, G. Caporossi and P. Hansen, “A survey and new results on computer enumeration of polyhex and fusene hydrocarbons”, *J. Chem. Inf. Comput. Sci.*, **43** (2003), 842—851.
- [7] G. Brinkmann, O. Delgado Friedrichs and U. von Nathusius, “Numbers of faces and boundary encodings of patches”, *Graphs and discovery, DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.*, **69** (2005), 27—38.
- [8] G. Brinkmann, J. E. Graver and C. Justus, “Numbers of Faces in Disordered Patches”, *J. Math. Chem.*, **45** (2009), 263—278.
- [9] J. Bornhöft, G. Brinkmann, J. Greinus, “Pentagon-hexagon-patches with short boundaries”, *European Journal of Combinatorics*, **24** (2003), 517—529.
- [10] M. Hasheminezhad, H. Fleischner, B. D. McKay, “A universal set of growth operations for fullerenes”, *Chemical Physics Letters*, **464** (2008), 118—121.
- [11] V. M. Buchstaber, N. Yu. Erokhovets, “Construction of fullerenes”, *arXiv 1510.02948v1[math.CO]*, 2015.

- [12] J. E. Graver, C. M. Graves, “Fullerene patches I”, *Ars Mathematica Contemporanea*, **3** (2010), 109–120.
- [13] J. E. Graver, C. M. Graves, S. J. Graves, “Fullerene patches II”, *Ars Mathematica Contemporanea*, **7** (2004), 405–421.
- [14] Т. Došlić, “On lower bounds of number of perfect matchings in fullerene graphs”, *Journal of Mathematical Chemistry*, **24** (2008), 359–364.
- [15] К. Kutnar, D. Marušič, “On cyclic edge-connectivity of fullerenes”, *Discr. Appl. Math.*, **156** (2008), 1661–1669.
- [16] F. Kardoš, R. Skrekovski, “Cyclic edge-cuts in fullerene graphs”, *J. Math. Chem*, **22** (2008), 121–132.
- [17] F. Kardoš M. Krnc, B. Lužar, R. Skrekovski, “Cyclic 7-edge-cuts in fullerene graphs”, *Journal of Mathematical Chemistry*, **47:2** (2010), 771–789.
- [18] М. Деза, М. Дюгур Сикирич, М. И. Штогрин, “Фуллерены и диск-фуллерены”, *УМН*, **68:4(412)** (2013), 69–128.
- [19] P. Schwerdtfeger, L. N. Wirz and J. Avery, “The topology of fullerenes”, *WIREs Comput Mol Sci*, 2015 doi:10.1002/wcms.1207.
- [20] Э. Э. Лорд, А. Л. Маккей, С. Ранганатан, *Новая геометрия для новых материалов*, Физматлит, М, 2010.
- [21] V. Grünbaum, *Convex polytopes (Graduate texts in Mathematics 221)*, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [22] Г. М. Циглер, *Теория многогранников*, МЦНМО, М, 2014.
- [23] В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, “Усечения простых многогранников и приложения”, *Труды МИАН им. В.А.Стеклова*, **289** (2015), 115–144.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 30 октября 2015 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Президента РФ (грант МК-2014.600.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 14-01-31398-мол-а и 14-01-92612-КО-а). Результаты были получены при развитии идей, возникших во время участия в Программе по комбинаторной и топической гомотопии в Сингапуре (август 2015)

Erokhovets N. Yu. k -belts and edge-cycles of three-dimensional simple polytopes with at most hexagonal facets. Far Eastern Mathematical Journal. 2015. V. 15. № 2. P. 197–213.

ABSTRACT

We describe the structure of k -belts on simple 3-polytopes with at most hexagonal facets. As a corollary we prove that the number of patches that can be bounded by a simple edge-cycle of given length on such polytopes different from nanotubes, is finite.

Key words: k -belt, simple edge-cycle, patch, cyclic edge-cut, three-dimensional polytope, fullerene.