Дальневосточный математический журнал. 2015. Том 15. № 2. С. 214–221

УДК 511.9, 511.36
MSC2010 11H06, 11J70, 52C07

© А. А. Илларионов[1]

О распределении целочисленных длин ребер полиэдров Клейна

Исследуется вопрос о частоте встречаемости ребер заданной целочисленной длины трехмерных полиэдров Клейна.

Ключевые слова: *полиэдр Клейна, многомерная непрерывная дробь*

1. Введение

Любое вещественное α единственным образом раскладывается в непрерывную (цепную) дробь:

$$\alpha = [q_0; q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots] = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ldots + \cfrac{1}{q_n + \ldots}}},$$

где $q_0 = [\alpha]$ (целая часть) и $q_n = q_n(\alpha) \in \mathbb{N}$ (неполные частные).

Рассмотрим геометрическое обобщение конструкции непрерывных дробей, предложенное Ф. Клейном [1]. Пусть Γ — s-мерная (полная) решетка, т.е.

$$\Gamma = \left\{ k_1 a^{(1)} + \ldots + k_s a^{(s)} : \quad k_i \in \mathbb{Z},\ i = \overline{1,s} \right\},$$

где $a^{(i)}$ $(i = \overline{1,s})$ — линейно независимые векторы из $\mathbb{R}^s$ (базис Γ).

Многогранниками (полиэдрами) Клейна решетки Γ будем называть множества вида $K_\theta(\Gamma)$, где $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_s)$, $\theta_i = \pm 1$, которые определяются как выпуклая оболочка ненулевых узлов Γ, содержащихся в s-гранном угле

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^s : \quad x_i \theta_i \geq 0, \quad i = \overline{1,s} \right\}.$$

Конструкция Клейна мотивирована следующими соображениями. Для любого $\alpha \in (0,1)$ определим решетку Γ_α, состоящую из узлов $\gamma = (Q, \alpha \cdot Q - P)$, $Q, P \in \mathbb{Z}$. По

[1] Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН, Хабаровск, ул. Дзержинского, 54. Электронная почта: illar_a@list.ru

классической теореме Лагранжа о наилучших приближениях множество вершин многоугольников Клейна решетки Γ_α состоит из узлов

$$\pm(0,1), \quad \pm(Q_n, \alpha Q_n - P_n), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где $P_n/Q_n = [q_0, q_1, \ldots, q_n]$ — n-я подходящая дробь для α. Пусть

$$a = (Q_{n-1}, \alpha Q_{n-1} - P_{n-1}) \quad \text{и} \quad \tilde{a} = (Q_{n+1}, \alpha Q_{n+1} - P_{n+1})$$

— две соседние вершины, т.е. отрезок $[a, \tilde{a}]$ является стороной многоугольника Клейна решетки Γ_α. Пусть $(a+b)$ — ближайший к a узел Γ_α, лежащий на $[a, \tilde{a}]$ (т.е. $[a, \tilde{a}] \cap \Gamma$ состоит из узлов вида $\gamma = a + mb$, $m \in \mathbb{Z}_+$). Тогда $b = (Q_n, \alpha Q_n - P_n)$, причем

$$q_{n+1}(\alpha) = \#(\Gamma \cap [a, \tilde{a}]) - 1, \tag{1.1}$$

то есть «целочисленная» длина отрезка $[a, \tilde{a}]$ равна соответствующему неполному частному. Здесь и далее $\#X$ — количество элементов конечного множества X.

Литература, посвященная полиэдрам Клейна, довольно обширная. Задачи Арнольда о полиэдрах Клейна можно найти в [2, 3], достаточно полный обзор известных результатов содержится в монографии [4], некоторые дополнительные ссылки имеются в [5].

Будем использовать следующие обозначения:

$\mathcal{L}_s(N)$ — множество целочисленных s-мерных решеток определителя N;

$E(\Gamma)$ — множество одномерных граней (ребер) полиэдров Клейна решетки Γ;

$l(E) = l(E; \Gamma) = \#(E \cap \Gamma) - 1$ — целочисленная длина ребра $E \in E(\Gamma)$;

$E(\Gamma; k)$ — множество ребер $E \in E(\Gamma)$ таких, что $l(E) = k$.

Согласно (1.1) вопрос о распределении целочисленных длин ребер двумерных полиэдров Клейна эквивалентен вопросу о распределении неполных частных непрерывных дробей. Используя известные результаты о частоте встречаемости заданного натурального в качестве неполного частного (см. [6]) и о среднем значении суммы неполных частных (см. [7, 8]) можно вывести следующие оценки (можно получить и асимптотические формулы со степенным понижением в остатке):

$$(s=2) \qquad \frac{1}{\#\mathcal{L}_2(N)} \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_2(N)} \#E(\Gamma; k) \asymp \frac{\ln N}{k^2}, \tag{1.2}$$

$$(s=2) \qquad \frac{1}{\#\mathcal{L}_2(N)} \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_2(N)} \sum_{E \in E(\Gamma)} l(E) \asymp \ln^2 N. \tag{1.3}$$

Таким образом, в двумерном случае частота встречаемости ребер длины k убывает асимптотически как $1/k^2$ при $k \to +\infty$, а «средняя» длина ребра полигона Клейна есть величина порядка $\ln N$ (т.к. типичное количество ребер есть величина порядка $\ln N$). Отметим, что согласно результатам [9] типичная целочисленная длина ребра многранника Клейна для «почти всех» решеток из $\mathcal{L}_2(N)$ есть величина порядка

$\ln\ln N$. Возникает вопрос: как ведут себя аналогичные характеристики (например, частота встречаемости ребер фиксированной длины, граней фиксированной целочисленной площади) в более высоких размерностях?

В [5] была доказана следующая асимптотическая формула для среднего числа ребер целочисленной длины k *трехмерных* полиэдров Клейна:

$$\frac{1}{\#\mathcal{L}_3(N)} \sum_{\Gamma\in\mathcal{L}_3(N)} \#E(\Gamma;k) = \left(C(k) + O_k\left(\frac{\ln\ln N}{\ln N}\right)\right)\cdot \ln^2 N \quad \text{при } k>1, \tag{1.4}$$

где постоянная $C(k)$ зависит только от k, причем

$$C(k) = \frac{6}{\zeta(2)\zeta(3)}\cdot\frac{1}{k^3} + O\left(\frac{1}{k^4}\right).$$

К сожалению, (1.4) не позволяет в полной мере судить о поведении типичного $\#E(\Gamma;k)$ при $k\to\infty$, т.к. не выяснена зависимость остатка от k. Теоретически методы [5, 10] позволяют получить требуемую более точную оценку остатка. Однако это приводит к чрезвычайно громоздким аналитическим вычислениям. Приводимые ниже основные результаты работы снабжены простыми доказательствами и частично восполняют имеющийся пробел.

2. Формулировка основных результатов

Основная теорема содержит верхнюю оценку среднего количества ребер целочисленной длины k *трехмерных* полиэдров Клейна.

Теорема 2.1. *Пусть N — простое. Тогда для любого целого $k>1$*

$$\frac{1}{\#\mathcal{L}_3(N)} \sum_{\Gamma\in\mathcal{L}_3(N)} \#E(\Gamma;k) \ll \frac{\ln^2 N}{k^3} + \frac{\ln N}{k^2}. \tag{2.1}$$

Следующий результат позволяет судить о типичной «суммарной» длине ребер трехмерных полиэдров Клейна.

Следствие 2.2. *Пусть N — простое. Тогда*

$$\frac{1}{\#\mathcal{L}_3(N)} \sum_{\Gamma\in\mathcal{L}_3(N)} \left(\sum_{E\in E(\Gamma)} l(E)\right) \asymp \ln^2 N. \tag{2.2}$$

Доказательства приводятся ниже. Мы ограничились случаем, когда N — простое, ради упрощения изложения.

Пусть $V(\Gamma)$ — множество вершин полиэдров Клейна решетки Γ. Согласно [11]

$$\forall s\geq 2 \qquad \frac{1}{\#\mathcal{L}_3(N)} \sum_{\Gamma\in\mathcal{L}_s(N)} \#V(\Gamma) \underset{s}{\asymp} \ln^{s-1} N. \tag{2.3}$$

Если f_0 — количество вершин, а f_1 — количество ребер некоторого трехмерного выпуклого многогранника, то по теореме Штейница (см., например, [12]) $1.5 f_0 \le f_1 \le 3(f_0 - 2)$. Поэтому

$$\begin{gathered}\forall \Gamma \in \mathcal{L}_3(N) \qquad \#E(\Gamma) \asymp \#V(\Gamma).\\ \frac{1}{\#\mathcal{L}_3(N)} \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_3(N)} \#E(\Gamma) \asymp \ln^2 N. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Согласно (2.2), (2.4) «типичная» целочисленная длина ребра трехмерного полиэдра Клейна есть абсолютная константа.

3. Доказательства

Нам понадобятся две вспомогательные леммы, причем вторая из них может представлять и самостоятельный интерес.

Пусть $\mathbb{Z}_N$ — поле вычетов по простому модулю N. Тогда $\mathbb{Z}_N^3$ есть линейное пространство над полем $\mathbb{Z}_N$.

Лемма 3.1. *Пусть N — простое. Если векторы $a, b \in \mathbb{Z}^3$ линейно независимые в $\mathbb{Z}_N^3$, то существует единственная решетка $\Gamma \in \mathcal{L}_3(N)$, содержащая a, b.*

Доказательство. Пусть $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$. По условию существует минор 2-го порядка матрицы $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$, который не равен нулю в $\mathbb{Z}_N$. Пусть

$$\det \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \not\equiv 0 \pmod{N}. \tag{3.1}$$

Так как N простое, то любая решетка $\Gamma \in \mathcal{L}_3(N)$ имеет базисную матрицу (столбцы образуют базис) одного из видов:

$$\begin{pmatrix} N & \mu_2 & \mu_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{либо} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & N & \mu_4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{либо} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & N \end{pmatrix}.$$

Здесь $0 \le \mu_i < N$, $i = 2, 3, 4$. Значит, любая решетка $\Gamma \in \mathcal{L}_3(N)$ принадлежит одному из следующих типов:

1) $\Gamma = \{x \in \mathbb{Z}^3 : \quad x_1 = \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 \text{ в } \mathbb{Z}_N\}$;

2) $\Gamma = \{x \in \mathbb{Z}^3 : \quad x_2 = \mu_4 x_3 \text{ в } \mathbb{Z}_N\}$;

3) $\Gamma = \{x \in \mathbb{Z}^3 : \quad x_3 = 0 \text{ в } \mathbb{Z}_N\}$.

Ввиду (3.1) существует ровно одна решетка первого типа, содержащая a, b, и не существует решеток второго и третьего типа, содержащих a, b. $\square$

Пусть Γ — трехмерная решетка и $\Gamma_+ = \Gamma \cap [0, +\infty)^3 \setminus \{0\}$. Возьмем любое компактное ребро $E = [a, \tilde{a}]$ полиэдра Клейна $K_+(\Gamma) = \operatorname{Conv}\Gamma_+$. Тогда хотя бы одна координата вектора $(\tilde{a} - a)$ отрицательная и хотя бы одна положительная. Не умаляя общности можно считать, что оставшаяся координата не положительная (в противном случае меняем местами a и $\tilde{a}$).

Определение. Пусть a — вершина компактного ребра E полиэдра $K_\theta(\Gamma)$, где $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, $\theta_i = \pm 1$. Пусть $(a + b)$ — ближайший к a узел Γ, лежащий на ребре E, т.е. $(a + b) \in \Gamma \cap E$ и b — примитивный узел Γ. Если вектор $(\theta_1 b_1, \theta_2 b_2, \theta_3 b_3)$ имеет ровно одну положительную координату, то узел a называем *началом*, а b — *направляющим вектором* ребра E.

Подчеркнем, что любое компактное ребро имеет ровно одно начало и один направляющий вектор.

Лемма 3.2. *Пусть a — начало, b — направляющий вектор некоторого компактного ребра E полиэдра Клейна трехмерной решетки Γ. Если $l(E) > 1$, то*

$$\prod_{i=1}^{3} \max\{|a_i|, |b_i|, 1\} < 4 \cdot \det \Gamma. \tag{3.2}$$

Замечание. Неравенство (3.2) доказано в [5, доказательство леммы 0.1] (с постоянной 2 вместо 4) как следствие неких очень громоздких и трудоемких рассуждений. Поэтому для полноты изложения мы приводим простое доказательство (3.2). Отметим, что в случае, когда $l(E) = 1$, величина в левой части (3.2) может быть сколь угодно большой (см. [5, замечание 3.4]).

Замечание. Пусть $\alpha = [q_0; q_1, q_2, \ldots]$ и $P_n/Q_n = [q_0; q_1, \ldots, q_n]$. Тогда

$$Q_n |\alpha Q_n - P_n| < q_n^{-1}. \tag{3.3}$$

Последнее неравенство имеет следующую геометрическую интерпретацию: если узлы a, $\tilde{a}$ двумерной решетки Γ лежат на одной стороне E полигона Клейна и $b = (b_1, b_2) = a - \tilde{a}$ — примитивный узел, то

$$|b_1 b_2| < \frac{\det \Gamma}{k}, \tag{3.4}$$

где k — целочисленная длина E. Пусть теперь выполняются условия леммы 3.2, причем $l(E) = k$. Так как $(a + bk) \in E$, то из (3.2) следует, что

$$|b_1 b_2 b_3| \le \frac{1}{k^2} \prod_{i=1}^{3} \max\{|a_i|, |b_i|, 1\} < 4 \frac{\det \Gamma}{k^2}.$$

Последнее неравенство можно рассматривать как один из вариантов многомерного обобщения (3.3), (3.4).

Доказательство леммы 3.2. Если существует такой j, что $a_j = b_j = 0$, то ребро E лежит на координатной плоскости $\pi_j = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_j = 0\}$. В этом случае E есть сторона полигона Клейна двумерной решетки $\Gamma_j = \Gamma \cap \pi_j$ и неравенство (3.2) является общеизвестным.

Пусть теперь $|a_i| + |b_i| \neq 0$, $i = 1, 2, 3$. Не умаляя общности, считаем, что

$$\begin{gathered} a = (a_1, a_2, a_3), \quad a_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3; \\ b = (-b_1, b_2, -b_3), \quad b_1 > 0, \quad b_2 > 0, \quad b_3 \geq 0. \end{gathered}$$

Тогда E — ребро полиэдра $\operatorname{Conv}\Gamma_+$. Так как $l(E) \geq 2$, то $(a + 2b) \in \Gamma_+$. Поэтому

$$a_i \geq 2b_i, \quad i = 1, 3.$$

Так как a — вершина и $(a + b) \in \Gamma_+$, то $(a - b) \notin \Gamma_+$. Поэтому $a_2 < b_2$.

Неравенство (3.2) принимает вид

$$a_1 b_2 a_3 \leq 4 \cdot \det \Gamma.$$

Предположим, что оно не выполняется. Тогда по теореме Минковского о линейных формах найдется такой ненулевой узел $w \in \Gamma$, что

$$|w_i| \leq \frac{a_i}{2},\ i = 1, 3; \quad 0 \leq w_2 < b_2.$$

Узлы $u = a + w$ и $v = a + b - w$ удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} u, v \in \Gamma_+ \setminus \{a, a + b\}; \\ u + v = a + (a + b). \end{gathered}$$

Это противоречит тому, что a, $(a + b)$ лежат на одном ребре полиэдра $\operatorname{Conv}\Gamma_+$, причем a — вершина. □

Теперь мы можем приступить к доказательству теоремы и следствия.

Доказательство теоремы. Если $\Gamma \in \mathcal{L}_3(N)$, то полиэдры Клейна решетки Γ содержатся в кубе $[-N, N]^3$. Поэтому для любого ребра E величина $\#(\mathbb{Z}^3 \cap E) - 1$ не превосходит N. Далее считаем, что $k \leq N$.

Пусть $\Gamma \in \mathcal{L}_3(N)$, $E \in E(\Gamma; k)$, причем a — начало, b — направляющий вектор ребра E. При исследовании средних характеристи достаточно ограничиться случаем, когда $E \subset [0, +\infty)^3$, причем положительной является вторая координата вектора b, т.е.

$$\begin{gathered} a = (a_1, a_2, a_3), \quad a_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3; \\ b = (-b_1, b_2, -b_3), \quad b_2 > 0, \quad b_i \geq 0,\ i = 1, 3. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Так как a — вершина, то $(a - b) \notin [0, +\infty)$. Так как $l(E) = k$, то $(a + kb) \in \Gamma_+$, $(a + b(k + 1)) \notin \Gamma_+$. Следовательно,

$$\begin{gathered} a_2 < b_2; \quad kb_i \leq a_i,\ i = 1, 3; \\ a_1 < (k + 1)b_1 \text{ либо } a_3 < (k + 1)b_3. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Опять же, в силу симметрии, достаточно ограничиться случаем, когда $a_1 < (k + 1)b_1$. Пусть $E_+(\Gamma; k)$ — множество ребер $E \in E(\Gamma; k)$, удовлетворяющих (3.5), (3.6) и условию $a_1 < (k + 1)b_1$. Тогда

$$\sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_3(N)} \#E(\Gamma; k) \ll \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_3(N)} \#E_+(\Gamma; k).$$

Любое ребро однозначно определяется своим началом и направляющим вектором. Пусть множество $A(\Gamma;k)$ состоит из всех пар (a,b), где a — начало, b — направляющий вектор некоторого ребра $E\in E_+(\Gamma;k)$. Для каждой $(a,b)\in A(\Gamma;k)$ выполняются условия (3.5), (3.6) и $a_1<(k+1)b_1$. Кроме того, по лемме 3.2

$$\overline{a_1}b_2\overline{a_3}<4N,\quad \overline{a_j}=\max\{a_j,1\}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&a=(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{Z}^3,\quad b=(-b_1,b_2,-b_3)\in\mathbb{Z}^3;\qquad a_1\geq 0;\\
&kb_1\leq a_1<(k+1)b_1,\quad 0\leq a_2<b_2,\quad 0\leq b_3\leq\frac{a_3}{k};\\
&k\overline{b_1}b_2\overline{a_3}<4N.
\end{aligned}\tag{3.7}$$

Пусть Ω состоит из пар (a,b), удовлетворяющих (3.7). Тогда $A(\Gamma;k)\subset\Omega$,

$$\sum_{\Gamma\in\mathcal{L}_3(N)}\#E_+(\Gamma;k)=\sum_{\Gamma\in\mathcal{L}_s(N)}\#A(\Gamma;k)=\sum_{\Gamma\in\mathcal{L}_3(N)}\ \sum_{(a,b)\in A(\Gamma;k)}1=$$
$$=\sum_{(a,b)\in\Omega}\left(\sum_{\Gamma\in\mathcal{L}_3(N):(a,b)\in A(\Gamma;k)}1\right)=\sum_{(a,b)\in\Omega}f(a,b),$$

где $f(a,b)$ — количество решеток $\Gamma\in\mathcal{L}_3(N)$ таких, что $(a,b)\in A(\Gamma;k)$. Очевидно, что $f(a,b)$ не больше, чем число решеток $\Gamma\in\mathcal{L}_3(N)$, содержащих a,b. Используя лемму 3.1, заключаем $f(a,b)\leq 1$. Значит,

$$\sum_{\Gamma\in\mathcal{L}_3(N)}\#E_+(\Gamma;k)\leq\sum_{(a,b)\in\Omega}1\ll\sum_{k\overline{b_1}b_2\overline{a_3}\leq 4N}b_1b_2\left(\frac{a_3}{k}+1\right)\ll$$
$$\ll\frac{N^2}{k^2}\sum_{kb_2\overline{a_3}\leq 4N}\frac{1}{\overline{a_3}^2b_2}\left(\frac{a_3}{k}+1\right)\leq\frac{N^2}{k^2}\sum_{b_2,a_3=1}^{4N}\frac{1}{b_2}\left(\frac{1}{ka_3}+\frac{1}{a_3^2}\right)\ll\frac{N^2}{k^2}\left(\frac{\ln^2N}{k}+\ln N\right).$$

Осталось заметить, что (см., например, [13, формула (5)])

$$\#\mathcal{L}_3(N)\asymp N^2\cdot\sum_{d|N}d^{-1}=N^2(1+N^{-1})\asymp N^2.$$

Поэтому

$$\sum_{\Gamma\in\mathcal{L}_3(N)}\#E_+(\Gamma;k)\ll\frac{\#\mathcal{L}_3(N)}{k^2}\left(\frac{\ln^2N}{k}+\ln N\right).$$

□

Доказательство следствия. Согласно (2.4)

$$\sum_{\Gamma\in\mathcal{L}_3(N)}\ \sum_{E\in E(\Gamma)}l(E)\geq\sum_{\Gamma\in\mathcal{L}_3(N)}\ \sum_{E\in E(\Gamma)}\#E(\Gamma)\gg\#\mathcal{L}_3(N)\ln^2N.$$

Если $\Gamma \in \mathcal{L}_3(N)$, $E \in E(\Gamma)$, то $l(E) \leq N$. Поэтому, используя (2.1), получаем

$$\sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_s(N)} \sum_{E \in E(\Gamma)} l(E) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\Gamma \in \mathcal{L}_3(N)} \#E(\Gamma; k) \cdot k \ll$$

$$\ll \sum_{k=1}^{N} \ln^2 N \cdot \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k \ln N} \right) \ll \#\mathcal{L}_3(N) \cdot \ln^2 N.$$

$\square$

Список литературы

[1] F. Klein, “Uber eine geometrische Auffassung der gewohlichen Kettenbruchentwichlung”, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingem*, **3** (1895), 357–359.

[2] V. I. Arnold, “Preface”, *Amer. Math. Soc. Transl.*, **197**:2 (1999), ix-xii.

[3] В. И. Арнольд, *Задачи Арнольда*, Фазис, М., 2000.

[4] O. N. Karpenkov, *Geometry of Continued Fractions*, Algorithms and Computation in Mathematics, **26**, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2013.

[5] А. А. Илларионов, “Некоторые свойства трехмерных полиэдров Клейна”, *Матем. сб.*, **206**:4 (2015), 35–66.

[6] H. Heilbronn, “On the average length of a class of finite continued fractions”, *Number Theory and Analysis, Papers in Honor of Edmund Landau, Plenum, New York*, 1969, 87–96.

[7] A. C. Yao, D. E. Knuth, “Analysis of the subtractive algorithm for greatest common divisors”, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **72**:12 (1975), 4720–4722.

[8] Е. Н. Жабицкая, “Среднее значение сумм неполных частных непрерывной дроби”, *Матем. заметки*, **89**:3 (2011), 472–476.

[9] М. Г. Рукавишникова, “Закон больших чисел для суммы неполных частных рационального числа с фиксированным знаменателем”, *Матем. заметки*, **90**:3 (2011), 431–444.

[10] А. А. Илларионов, “О статистических свойствах многогранников Клейна трехмерных целочисленных решеток”, *Матем. сб.*, **204**:6 (2013), 23–46.

[11] А. А. Илларионов, Д. А. Слинкин, “О количестве вершин многогранников Клейна в среднем”, *Дальневосточный матем. журн.*, **11**:1 (2011).

[12] В. А. Тиморин, *Комбинаторика выпуклых многогранников*, МЦНМО, М., 2002.

[13] A. A. Illarionov, “On the Asymptotic Distribution of Integer Matrices”, *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory*, **1**:4 (2011), 301–345.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 22 сентября 2015 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-90002 Бел_а)

A. A. Illarionov The distribution of integer lengths of Klein polyhedra edges. Far Eastern Mathematical Journal. 2015. V. 15. № 2. P. 214–221.

ABSTRACT

We examine some statistical properties for Klein polyhedra.

Key words: *Klein polyhedra, multidimensional continued fractions*