Дальневосточный математический журнал. 2015. Том 15. № 2. С. 222–237

УДК 515.16
MSC2010 13F55, 55U10, 52B11

© И. Ю. Лимонченко[1]

Семейства минимально неголодовских комплексов и полиэдральные произведения

Рассматриваются семейства простых многогранников P и симплициальных комплексов K, хорошо известные в теории многогранников и выпуклой геометрии, и показывается, что их момент-угол комплексы обладают важными гомотопическими свойствами в зависимости от комбинаторики соответствующих комплексов, а также от алгебраических свойств их колец Стенли – Райснера. Мы вводим бесконечные семейства голодовских и минимально неголодовских комплексов K, момент-угол комплексы $\mathcal{Z}_K$ которых имеют свободные группы целочисленных когомологий, но гомотопически не эквивалентны никаким букетам сфер или связным суммам произведений сфер соответственно. Затем доказывается критерий, когда итерированная симплициальная вставка (мультивставка) и операция подстановки комплексов в комплекс будут голодовскими и минимально неголодовскими комплексами, а также рассматривается новый класс минимально неголодовских многогранных сфер.

Ключевые слова: *простые многогранники, кольца Голода, момент-угол комплексы, кольца Стенли – Райснера*

Введение

Обозначим через K абстрактный симплициальный комплекс размерности $n-1$ на m вершинах, а через $\Bbbk$ — поле или кольцо целых чисел. Пусть $\Bbbk[v_1, \ldots, v_m]$ есть градуированная алгебра многочленов от m переменных, $\deg(v_i) = 2$. *Кольцом граней* (или *кольцом Стенли – Райснера*) комплекса K над $\Bbbk$ называется фактор-кольцо

$$\Bbbk[K] = \Bbbk[v_1, \ldots, v_m]/\mathcal{I}_K,$$

где $\mathcal{I}_K$ — идеал, порожденный такими свободными от квадратов мономами $v_{i_1} \cdots v_{i_k}$, что $\{i_1, \ldots, i_k\}$ не является симплексом из K. Мы называем $\mathcal{I}_K$ *идеалом Стенли–*

[1]Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова, 119992, г. Москва, Ленинские горы, 1. Электронная почта: ilimonchenko@gmail.com

Райснера комплекса K. Заметим, что $\Bbbk[K]$ является $\Bbbk$-алгеброй, а также при помощи естественной проекции наделяется структурой модуля над алгеброй многочленов $\Bbbk[v_1,\dots,v_m]$.

Всюду в дальнейшем P обозначает простой n-мерный выпуклый многогранник с m *гипергранями* (т.е гранями коразмерности 1) $F_1,\dots,F_m$. Обозначим через K_P границу ∂P^* двойственного симплициального многогранника. Она может быть рассмотрена как $(n-1)$-мерный симплициальный комплекс на множестве $[m]=\{1,\dots,m\}$, симплексы которого суть подмножества $\{i_1,\dots,i_k\}$ такие, что $F_{i_1}\cap\ldots\cap F_{i_k}\neq\varnothing$ в P.

Положим $(\mathbf{X},\mathbf{A})=\{(X_i,A_i)\}_{i=1}^m$ есть множество пар топологических пространств. *Полиэдральным произведением* называется топологическое пространство

$$(\mathbf{X},\mathbf{A})^K=\bigcup_{I\in K}(\mathbf{X},\mathbf{A})^I\subset\prod_{i=1}^m X_i,$$

где $(\mathbf{X},\mathbf{A})^I=\prod\limits_{i=1}^m Y_i$ и $Y_i=X_i$, если $i\in I$, и $Y_i=A_i$, если $i\notin I$. Частными случаями полиэдрального произведения $(\mathbf{X},\mathbf{A})^K$ являются *момент-угол комплексы* $\mathcal{Z}_K=(\mathbb{D}^2,\mathbb{S}^1)^K$ и *вещественные момент-угол комплексы* $\mathcal{R}_K=(\mathbb{D}^1,\mathbb{S}^0)^K$. Мы также называем $\mathcal{Z}_P=\mathcal{Z}_{K_P}$ *момент-угол многообразием* многогранника P. Согласно [6, Corollary 6.2.5], $\mathcal{Z}_P$ имеет структуру гладкого многообразия размерности $m+n$.

Tor-группы $\Bbbk[K]$ получают топологическую интерпретацию согласно следующему результату Бухштабера и Панова о когомологиях $\mathcal{Z}_K$.

Теорема 1 ([6, Theorem 4.5.4] и [18, Theorem 4.7])**.** *Алгебра когомологий момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_K$ дается следующими изоморфизмами*

$$\begin{aligned}H^{*,*}(\mathcal{Z}_K;\Bbbk)&\cong\operatorname{Tor}^{*,*}_{\Bbbk[v_1,\dots,v_m]}(\Bbbk[K],\Bbbk)\\&\cong H\big[\Lambda[u_1,\dots,u_m]\otimes\Bbbk[K],d\big]\\&\cong\bigoplus_{I\subset[m]}\widetilde{H}^*(K_I),\end{aligned}$$

где биградуировка и дифференциал в когомологиях дифференциальной градуированной алгебры определяются так:

$$\operatorname{bideg}u_i=(-1,2),\ \operatorname{bideg}v_i=(0,2);\quad du_i=v_i,\ dv_i=0.$$

В третьей строке $\widetilde{H}^*(K_I)$ обозначает приведенные симплициальные когомологии полного подкомплекса K_I в K (ограничения K на подмножество $I\subset[m]$). Последний изоморфизм является суммой изоморфизмов

$$H^p(\mathcal{Z}_K)\cong\sum_{I\subset[m]}\widetilde{H}^{p-|I|-1}(K_I),$$

и кольцевая структура задается отображениями

$$\widetilde{H}^{p-|I|-1}(K_I)\otimes\widetilde{H}^{q-|J|-1}(K_J)\to\widetilde{H}^{p+q-|I|-|J|-1}(K_{I\cup J}),\qquad(*)$$

индуцированными каноническими симплициальными отображениями $K_{I\cup J}\hookrightarrow K_I*K_J$ (джойн симплициальных комплексов) при $I\cap J=\varnothing$ и нуль иначе.

Из предыдущей теоремы следует наличие аддитивных изоморфизмов, доказанных ранее Хохстером.

Теорема 2 ([11]). *Для любого симплициального комплекса K на m вершинах имеем:*

$$\mathrm{Tor}^{-i,2j}_{\Bbbk[v_1,\ldots,v_m]}(\Bbbk[K],\Bbbk)\cong\bigoplus_{J\subset[m],\,|J|=j}\widetilde{H}^{j-i-1}(K_J).$$

Ранги биградуированных компонент Tor-алгебры

$$\beta^{-i,2j}(\Bbbk[K])=\mathrm{rk}_{\Bbbk}\,\mathrm{Tor}^{-i,2j}_{\Bbbk[v_1,\ldots,v_m]}(\Bbbk[K],\Bbbk)$$

называются *биградуированными числами Бетти* $\Bbbk[K]$ или K, когда основное поле $\Bbbk$ фиксировано.

Кольцо граней $\Bbbk[K]$ называется *голодовским*, если умножение и все высшие операции Масси в $\mathrm{Tor}_{\Bbbk[v_1,\ldots,v_m]}\big(\Bbbk[K],\Bbbk\big)$ тривиальны. Это свойство впервые рассматривалось в работе Голода [8] при изучении нетеровых локальных колец с рациональными рядами Пуанкаре, см. также монографию Гулликсена и Левина [10]. Согласно результату, полученному Берглундом и Йолленбеком [5, Theorem 5.1], $\Bbbk[K]$ является кольцом Голода, если произведение в Tor-алгебре тривиально над полем $\Bbbk$. Скажем, что K — *голодовский* комплекс, если $\Bbbk[K]$ есть кольцо Голода над любым полем $\Bbbk$.

Если K не является голодовским, но удаление любой вершины v из K превращает оставшийся комплекс $K-v$ в голодовский, то $\Bbbk[K]$ и K называются *минимально неголодовскими*.

В дальнейшем мы пользуемся следующим результатом, полученным Бари, Бендерски, Коэном и Гитлером, имеющим место в гораздо более общей ситуации полиэдральных произведений.

Теорема 3 ([3]). *Для любого момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_K$ надстройка $\Sigma\mathcal{Z}_K$ гомотопически эквивалентна букету надстроек над всеми полными подкомплексами, не являющимися симплексами:* $\bigvee_{J\notin K}\Sigma^{2+|J|}|K_J|$.

Структура этой статьи такова. В разделе 2 мы рассматриваем несколько триангуляций K классических многообразий с хорошими комбинаторными свойствами, для которых мы вычисляем гомотопические типы $\mathcal{Z}_K$ и исследуем свойства голодовости и минимальной неголодовости этих комплексов. В частности, мы доказываем Теорему 4 и Предложение 5, которые дают нам бесконечные серии момент-угол комплексов $\mathcal{Z}_K$ со свободными группами целочисленных когомологий и голодовскими или минимально неголодовскими K такие, что момент-угол комплексы последних не гомотопически эквивалентны букетам сфер и связным суммам произведений сфер соответственно (см. Теорему 5). Вопрос о существовании таких момент-угол комплексов был ранее открытым в торической топологии.

В разделе 3 мы доказываем критерий, когда мультивставка и подстановка комплексов в комплекс являются голодовскими и минимально неголодовскими комплексами (Теорема 4 и Теорема 8). Мы используем конструкцию мультивставки, чтобы доказать критерий минимальной неголодовости нерв-комплексов K_P простых многогранников P с малым числом гиперграней (Теорема 7). Полученные результаты указывают на связь между свойством минимальной неголодовости триангулированных сфер K и случаем, когда момент-угол комплекс $\mathcal{Z}_K$ гомеоморфен связной сумме произведений сфер с двумя сферами в каждом произведении, изучавшуюся в работах [9, 15].

Автор глубоко признателен Т. Е. Панову за многочисленные полезные обсуждения и советы. Также автор благодарен Антону Айзенбергу, Николаю Ероховцу, Елене Грбич, Шидзуо Кадзи и Стивену Терио за комментарии и предложения по тексту работы.

Некоторые голодовские комплексы и их момент-угол комплексы

В этом разделе мы рассматриваем несколько хорошо известных минимальных триангуляций классических поверхностей в качестве симплициальных комплексов K и обсуждаем гомотопические типы и когомологии соответствующих момент-угол комплексов $\mathcal{Z}_K$. Обозначим через $X^{\vee k}$ букет k копий пространства X.

Пример 1. *Пусть K есть 6-вершинная минимальная триангуляция $\mathbb{R}P^2$. Согласно результату Грбич, Панова, Терио и Ву [9, Example 3.3], K является голодовским комплексом и $\mathcal{Z}_K$ гомотопически эквивалентен букету:*

$$\mathcal{Z}_K \simeq (S^5)^{\vee 10} \vee (S^6)^{\vee 15} \vee (S^7)^{\vee 6} \vee \Sigma^7 \mathbb{R}P^2.$$

Предложение 1. *Пусть K есть 7-вершинная минимальная триангуляция $\mathbb{T}^2$. Тогда K — комплекс Голода, и $\mathcal{Z}_K$ гомотопически эквивалентен букету сфер:*

$$\mathcal{Z}_K \simeq (S^5)^{\vee 21} \vee (S^6)^{\vee 49} \vee (S^7)^{\vee 42} \vee (S^8)^{\vee 14} \vee (S^9)^{\vee 2} \vee S^{10}.$$

Доказательство. Докажем голодовость K. По Теореме 1 отображение

$$\widetilde{H}^i(K_I) \otimes \widetilde{H}^j(K_J) \to \widetilde{H}^{i+j+1}(K_{I\cup J})$$

тривиально. Действительно, если $i = j = 1$, то $H^{i+j+1}(K_{I\cup J}) = 0$ поскольку K имеет размерность $n-1=2$; если $i=0$, то $\widetilde{H}^i(K_I) = 0$ поскольку K является 2-смежностным.

Используя пакет Macaulay2 [16], мы вычисляем биградуированные числа Бетти комплекса K (над $\mathbb{Z}$). Таблицы $\beta^{-i,2j}(K)$ ниже имеют n строк и m столбцов. Число, стоящее на пересечении k-ой строки и l-го столбца, равно $\beta^{-l,2(l+k)}(K)$, где $1 \le k \le n$ и $2 \le l+k \le m$. Остальные биградуированные числа Бетти **нулевые**, кроме $\beta^{0,0}(K) = 1$, см. [6, Corollary 4.6.7]. Таблица ниже имеет $m = 7$ столбцов и $n = 3$ строк.

Чтобы вычислить гомотопический тип $\mathcal{Z}_K$, заметим, что стабильное гомотопическое разложение в Теореме 3 может быть денадстроено, поскольку все отображения приклейки k-клеток в CW-комплексе $\mathcal{Z}_K$ в размерностях $6 \le k \le 10$ стабильны

0	0	0	0	0	0	0
21	49	42	14	2	0	0
0	0	0	1	0	0	0

Таблица 1. Биградуированные числа Бетти $\mathbb{T}^2_7$.

(коммутируют с отображением надстройки). В размерностях $6 \leq k \leq 9$ возможность денадстройки следует из того, что приклеивающие отображения $(m-1)$-связного CW-комплекса до размерности $(2m-1)$ стабильны (у нас $m=5$). Предположим, что в старшей размерности, равной 10, приклеивающее отображение является отображением Уайтхеда: $S^9 \to \vee S^5$. Тогда оно имеет в качестве кослоя произведение S^5 и не может быть отображением Уайтхеда в силу голодовости K, если в букете больше одной сферы (умножение в $H^*(\mathcal{Z}_K)$ тривиально). Наконец, отображение Уайтхеда $S^9 \to S^5$ нетривиально (оно порождает $\pi_9(S^5) \cong \mathbb{Z}_2$), однако приклеивающее отображение для клетки старшей размерности гомотопически тривиально из [12, Proposition 10.4]. Таким образом, все приклеивающие отображения гомотопически тривиальны; денадстройка в Теореме 3 дает искомый гомотопический тип, в силу Теоремы 2, см. таблицу 1. $\square$

Приведенные два примера, как и все до сих пор известные примеры, позволяют поставить вопрос: верно ли, что если K – голодовский комплекс и все полные подкомплексы имеют свободные группы целочисленных гомологий, то $\mathcal{Z}_K$ гомотопически эквивалентен букету сфер?

Ответ на этот вопрос отрицательный, как показывает следующий результат.

Пример 2. *Пусть K есть 9-вершинная минимальная триангуляция $\mathbb{C}P^2$, описанная в работе Кюнела и Банхоф [13]. Кюнел и Лассман [14] вычислили группу симметрий и доказали комбинаторную единственность и 3-смежностность K. Комплекс K рассматривается на множестве вершин $\{0,\ldots,8\}$, и имеется 36 максимальных 4-мерных граней, которые приведены в таблице 2, см. [14, стр. 178].*

Группа G симметрий K действует транзитивно на множестве вершин K и порождена тремя перестановками R, S, T (см. [14, стр. 179]):

$$R = (107)(245)(863),\ S = (128)(357),\ T = (28)(46)(53).$$

Заметим, что имеет место следующее комбинаторное свойство K.

Предложение 2. *Симплициальный комплекс K изоморфен своему двойственному по Александеру комплексу $K^\vee$, т.е минимальные не-грани K суть в точности дополнения до максимальных симплексов.*

Доказательство. Сначала докажем, что дополнение до максимальной 4-мерной грани есть минимальная не-грань K и все минимальные не-грани на 4 вершинах появляются таким образом. Заметим, что группа G переводит максимальные симплексы в максимальные симплексы и имеется 2 орбиты этого действия:

01234	70485	17562
01237	70481	17560
01267	70431	17580
02345	74852	15624
02367	74831	15680
03467	78531	16280
03456	78523	16248
04567	75231	12480
02358	74826	15643
02368	74836	15683
03568	78236	16483
02458	74526	15243

Таблица 2. Максимальные симплексы $\mathbb{C}P^2_9$.

(1) симплексы в строках 6, 7, 8 (орбита элемента (12480)); (2) остальные максимальные симплексы K (орбита элемента (01234)). Отсюда следует первое утверждение, поскольку для любого максимального симплекса, (см. (01234) и (12480)), его дополнение, (см. (5678) и (3567)), есть в самом деле минимальная не-грань. Второе утверждение следует из того, что f-вектор K есть (9,36,84,90,36), см. [14], и $\binom{9}{4} = 126 = f_3 + f_4$, поэтому все минимальные не-грани на 4 вершинах имеют указанную выше форму.

Пусть имеется минимальная не-грань K на 5 вершинах: $I = (v_1, \dots, v_5)$. Согласно доказанному выше, ее дополнение J есть 3-симплекс из K (иначе оно должно быть минимальной не-гранью K в силу 3-смежностности K). Рассмотрим 3-мерную грань, лежащую в максимальных симплексах одной из орбит, например, (0123) или (1248) (см. таблицу 2). Но ее дополнение есть (45678) или (03567) соответственно и содержит не-грань, (5678) или (3567) (см. выше). Получаем противоречие. Таким образом, не существует минимальных не-граней на 5 вершинах в K.

Наконец, предположим, что I есть минимальная не-грань K на 6 вершинах $I = (v_1, \dots, v_6)$ (в K нет симплексов больше чем на 5 вершинах, а значит, не может быть минимальных не-граней K больше чем на 6 вершинах). Тогда (v_i, v_7, v_8, v_9) для $i = 1, \dots, 6$ суть минимальные не-грани K на 4 вершинах (как дополнения максимальных граней). Однако не существует 2-мерного симплекса (v_7, v_8, v_9), лежащего в дополнении к 6 максимальным симплексам комплекса K (см. таблицу 2). Получаем противоречие. Таким образом, мы нашли все минимальные не-грани K. □

Замечание. Заметим, что то же верно для $K = \mathbb{R}P^2_6$: K комбинаторно эквивалентен своему двойственному по Александеру комплексу $K^\vee$, но неверно для $\mathbb{T}^2_7$.

Теорема 4. *9-вершинная минимальная триангуляция K комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$ есть голодовский комплекс, все его полные подкомплексы имеют свободные группы целочисленных гомологий, а $\mathcal{Z}_K$ имеет гомотопический* *тип следующей надстройки:*

$$\mathcal{Z}_K \simeq (S^7)^{\vee 36} \vee (S^8)^{\vee 90} \vee (S^9)^{\vee 84} \vee (S^{10})^{\vee 36} \vee (S^{11})^{\vee 9} \vee \Sigma^{10}\mathbb{C}P^2.$$

Доказательство. Сначала докажем голодовость K. Рассмотрим cup-произведение в Tor-алгебре K, индуцированное симплициальным вложением полных подкомплексов на некоторых множествах вершин I и J:

$$\widetilde{H}^i(K_I) \otimes \widetilde{H}^j(K_J) \to \widetilde{H}^{i+j+1}(K_{I\cup J})$$

Возможны следующие случаи.

1) I и J суть 4-вершинные минимальные не-грани и $i = j = 2$.

2) $|I| = 4, |J| = 5, i = 1$ (и тогда $I \sqcup J = [9]$).

Но случай (1) невозможен, поскольку размерность K равна $n - 1 = 4$. Случай (2) невозможен в силу Предложения 2 (ибо в этом случае K_I – минимальная не-грань K, а значит, K_J – (максимальный) симплекс, и его приведенные когомологии тривиальны). Таким образом, $K = \mathbb{C}P^2_9$ есть комплекс Голода.

Как и в Предложении 1, вычислим биградуированные числа Бетти K с помощью программы Macaulay2. Приведенная ниже таблица имеет $m = 9$ столбцов и $n = 5$ строк.

0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
36	90	84	36	9	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0

Таблица 3. Биградуированные числа Бетти $\mathbb{C}P^2_9$.

Чтобы вычислить гомотопический тип $\mathcal{Z}_K$, заметим, что стабильное гомотопическое разложение в Теореме 3 может быть денадстроено, поскольку все отображения приклейки k-клеток в CW-комплексе $\mathcal{Z}_K$ в размерностях $8 \le k \le 14$ стабильны. В размерностях $8 \le k \le 13$ возможность денадстройки следует из того, что приклеивающие отображения $(m-1)$-связного CW-комплекса до размерности $(2m-1)$ стабильны (у нас $m = 7$). Предположим, что в старшей размерности, равной 14, приклеивающее отображение является отображением Уайтхеда: $S^{13} \to \vee S^7$. Тогда оно имеет в качестве кослоя произведение S^7 и не может быть отображением Уайтхеда в силу голодовости K, если в букете больше одной сферы (умножение в $H^*(\mathcal{Z}_K)$ тривиально). Наконец, отображение Уайтхеда $S^{13} \to S^7$ тривиально, поскольку S^7 есть H-пространство. Таким образом, все приклеивающие отображения гомотопически тривиальны; денадстройка в Теореме 3 дает искомый гомотопический тип в силу Теоремы 2, см. таблицу 3. □

Замечание. Возможность денадстройки в утверждении Теоремы 3 в случае Предложения 1 и Теоремы 4 следует также из тривиальности фильтрации толстого букета для $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$, в силу смежностности рассмотренных триангуляций, согласно результату Ирие и Кишимото [12, Theorem 10.9]. Другое доказательство может быть получено из результатов работы Бебена и Грбич [4], в которой используется иной подход к исследованию свойства голодовости для K и его связи со случаем, когда $\mathcal{Z}_K$ имеет гомотопический тип ко-Н-пространства.

Теперь мы перейдем к классу минимально неголодовских комплексов K и их момент-угол комплексов $\mathcal{Z}_K$. Обозначим через sK звездное подразбиение K в максимальном симплексе σ. Геометрически sK получается из K заменой σ на конус над его границей; мы обозначаем через v вершину данного конуса.

Теорема 5. *Имеют место следующие утверждения:*

(a) *если $K = \mathbb{R}P^2_6$, то sK голодовский комплекс над любым полем $\Bbbk$, кроме $char(\Bbbk) = 2$. В последнем случае sK минимально неголодовский;*

(b) *если $K = \mathbb{T}^2_7$, то sK минимально неголодовский комплекс;*

(c) *если $K = \mathbb{C}P^2_9$, то sK минимально неголодовский комплекс.*

Более того, во всех трех случаях $\mathcal{Z}_{sK}$ гомотопически не эквивалентен никакой связной сумме произведений сфер.

Доказательство. Докажем утверждение (a).
Предположим, что новая вершина 7 есть вершина v конуса над максимальным симплексом $J = (456)$. Поскольку $K = \mathbb{R}P^2_6$ есть 2-смежностный комплекс размерности $n-1 = 2$, единственное нетривиальное произведение в Tor-алгебре sK имеет вид
$$\widetilde{H}^0(K_I;\Bbbk) \otimes \widetilde{H}^1(K_J;\Bbbk) \to \widetilde{H}^2(\mathbb{R}P^2;\Bbbk),$$
где $I = (1237)$. Имеем $\widetilde{H}^2(\mathbb{R}P^2;\Bbbk) \neq 0$, если и только если $char(\Bbbk) = 2$, что заканчивает доказательство утверждения (a).

Докажем утверждение (b).
Предположим, что новая вершина 8 есть вершина v конуса над максимальным симплексом $J = (123)$. Заметим, что комплекс sK не голодовский, так как имеется нетривиальное произведение
$$\widetilde{H}^0(sK_I) \otimes \widetilde{H}^1(sK_J) \to \widetilde{H}^2(\mathbb{T}^2),$$
где $I = (45678)$. Если удалить вершину w из sK, то классов размерности 2 в когомологиях полных подкомплексов не будет, и из 2-смежностность K следует, что $(K' = sK - w)$ $\widetilde{H}^0(K'_I)$ и $\widetilde{H}^0(K'_J)$ не могут быть ненулевыми одновременно, когда $I \cap J = \varnothing$. Таким образом, умножение в Tor-алгебре индуцированного комплекса K' тривиально, а значит sK – минимально неголодовский комплекс.

Наконец, докажем утверждение (c).
Пусть K – комплекс на множестве вершин $\{0,\dots,8\}$ и 9 есть вершина v конуса над максимальной гранью (01234). Комплекс sK неголодовский по той же причине,

что и в предыдущем случае. Чтобы доказать минимальную неголодовость sK, рассмотрим комплекс K', полученный удалением вершины w из K. Возможны следующие 3 случая.

1) $w \in \{0,1,2,3,4\}$. Тогда

$$sK - w = (K - w) \cup_{\Delta^3} \Delta^4.$$

Это голодовский комплекс в силу [15, Proposition 3.1].

2) $w \in \{5,6,7,8\}$. Согласно приведенному выше описанию группы симметрий G, достаточно рассмотреть случай $w = 5$. Вначале мы вычислим биградуированные числа Бетти $K' = sK - w$:

8	28	56	70	56	28	8	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	60	68	36	9	1	0	0	0
1	4	6	4	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 4. Биградуированные числа Бетти K'.

В силу Теоремы 2, это означает, что $H^1(K'_I) = 0$ для всех полных подкомплексов на I вершинах из K'. Если $\widetilde{H}^0(K'_I) \neq 0$, то $9 \in I$. Применяя тот же аргумент к следуюшей таблице биградуированных чисел Бетти комплекса $K' - 9$, легко видеть, что $H^2(K'_J) = 0$ для всех J с $9 \notin J$:

1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
20	40	33	14	2	0	0	0
1	8	9	2	0	0	0	0

Таблица 5. Биградуированные числа Бетти $K' - 9$.

Таким образом, cup-произведение в Tor-алгебре $K' = sK - w$ тривиально.

3) w есть новая вершина 9. Тогда $|K'| \cong \mathbb{C}P^2 - D^4 \simeq S^2$, и из смежностности K следует, что $\widetilde{H}^0(K'_I) = 0$ для всех I, так что произведение в Tor-алгебре $K' = sK - w$ тривиально.

Таким образом, sK — минимально неголодовский комплекс для $K = \mathbb{C}P^2_9$.

Что касается последнего утверждения теоремы, заметим, что K не является Горенштейновым* комплексом (и даже не является Коэн-Маколеевским комплексом) во всех трех случаях. В силу теоремы Аврамова–Голода (см. [6, Theorem 3.4.4]), его Tor-алгебра не является алгеброй Пуанкаре. Тогда по Теореме 1, $\mathcal{Z}_K$ не может быть гомотопически эквивалентен замкнутому ориентированному многообразию, а значит, не гомотопен связной сумме произведений сфер. $\square$

Случаи (b) и (c) в Теореме 5 дают контрпримеры к гипотезе, сформулированной в [15], и мы сформулируем ее модифицированную версию здесь.

Вопрос 1. *Пусть K есть триангулированная сфера. Тогда $\mathcal{Z}_K$ топологически эквивалентно связной сумме произведений сфер с двумя сферами в каждом произведении тогда и только тогда, когда K минимально неголодовский и свободный от кручений комплекс (последнее означает, что $H^*(\mathcal{Z}_K)$ — свободная группа).*

Часть "только тогда" верна в силу следующего утверждения.

Предложение 3. *Предположим, что K является триангулированной сферой. Тогда имеют место следующие утверждения:*

(a) если $\mathcal{Z}_K$ гомотопически эквивалентен связной сумме произведений сфер с двумя сферами в каждом произведении, то K — минимально неголодовский и свободный от кручений комплекс;

(b) $\mathcal{Z}_K$ имеет когомологическую длину 2 тогда и только тогда, когда K — минимально неголодовский комплекс.

Доказательство. Для доказательства утверждения (a) воспользуемся тем, что, в силу Теоремы 1, единственное нетривиальное cup-произведние в Tor-алгебре K появляется на дополнительных полных подкомплексах K_I и K_J, $I \sqcup J = [m]$, и равно образующей в группе когомологий сферы $H^{n-1}(K; \Bbbk)$. Последнее равносильно для триангулированных сфер тому, что K — минимально неголодовский комплекс; K очевидно свободен от кручений, поскольку $H^*(\mathcal{Z}_K)$ есть свободная абелева группа для связных сумм произведений сфер.

Доказательство утверждения (b) получается применением теоремы 1 и двойственности Александера. □

Минимально неголодовские комплексы, простые многогранники и полиэдральные произведения

Рассмотрим конструкцию итерированной симплициальной вставки или мультивставки, введенную Бари, Бендерским, Коэном и Гитлером [2].

Определение 1. *Пусть K есть $(n-1)$-мерный симплициальный комплекс на m вершинах: $\{v_1, \ldots, v_m\}$, а $J = (j_1, \ldots, j_m)$ — строка положительных целых чисел. Тогда мультивставка $K(J)$ есть комплекс на $j_1 + \ldots + j_m$ вершинах, минимальные не-грани которого имеют следующий вид*

$$\{v_{i_1,1}, \ldots, v_{i_1,j_{i_1}}, \ldots, v_{i_k,1}, \ldots, v_{i_k,j_{i_k}}\},$$

где $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\}$ — минимальная не-грань K.

Это определение дает явное описание идеала Стенли–Райснера комплекса $K(J)$. Очевидно, что $K(1, \ldots, 1) = K$.

Замечание. Если $K = K_P$ — нерв-комплекс простого n-мерного многогранника, то существует простой многогранник $P(J)$, удовлетворяющий соотношению $K_{P(J)} = K_P(J)$, см. [2]. Очевидно, что $P(J)$ имеет $j_1 + \ldots + j_m$ гиперграней и размерность $(j_1 - 1) + \ldots + (j_m - 1) + n$, так что число $m - n$ сохраняется при операции мультивставки.

Пример 3. *Пусть P – 6-угольник. Тогда $P(2,1,1,1,1,1)$ есть простой 3-мерный многогранник с 7 гипергранями. Из определения легко видеть, что его идеал Стенли–Райснера будет идеалом Стенли–Райснера многогранника усечения $vc^3(\Delta^3)$. Значит, $P(2,1,1,1,1,1)$ комбинаторно эквивалентен $vc^3(\Delta^3)$.*

В дальнейшем нам понадобится следующий результат о полиэдральных произведениях мультивставки. Обозначим $(\underline{D}^{2J},\underline{S}^{2J-1})^K=(\mathbf{X},\mathbf{A})^K$, где $(\mathbf{X},\mathbf{A})^I=\prod\limits_{i=1}^{m}Y_i$ и $Y_i=D^{2j_i}$, если $i\in I$, и $Y_i=S^{2j_i-1}$, если $i\notin I$.

Теорема 6 ([2, Theorem 7.5, Corollary 7.6])**.** *Существует действие тора $\mathbb{T}^m$ на $(\underline{D}^{2J},\underline{S}^{2J-1})^K$ и на $(\mathbb{D}^2,\mathbb{S}^1)^{K(J)}$, относительно которых они эквивариантно гомеоморфны.*
Следовательно, пространства $(\mathbb{D}^2,\mathbb{S}^1)^{K(J)}$ и $(\mathbb{D}^2,\mathbb{S}^1)^K$ имеют неградуированно изоморфные кольца когомологий.

Операция мультивставки сохраняет свойства голодовости и минимальной неголодовости симплициальных комплексов.

Предложение 4. *Пусть $J=(j_1,\dots,j_m)$ — строка положительных целых чисел.*

(a) K — комплекс Голода тогда и только тогда, когда $K(J)$ — комплекс Голода.

(b) K — минимально неголодовский комплекс тогда и только тогда, когда $K(J)$ — минимально неголодовский комплекс.

Доказательство. Утверждение (a) прямо следует из Теоремы 6. Докажем утверждение (b). Предположим, что K — минимально неголодовский комплекс. Тогда $K(J)$ неголодовский в силу утверждения (a). Рассмотрим комплекс, полученный удалением вершины v из $K(J)$. Положим $v=v_{il}$, при $1\le i\le m, 1\le l\le j_i$ в обозначениях из определения мультивставки. Тогда

$$K(J)-v=(K-i)(j_1,\dots,j_{i-1},j_{i+1},\dots,j_m)*\Delta,$$

где Δ — симплекс, натянутый на вершины $v_{i,1},\dots,v_{i,l-1},v_{i,l+1},\dots,v_{i,j_i}$ (и пустое множество при $j_i=1$), и является комплексом Голода в силу утверждения (a).

Таким образом, мы доказали, что $K(J)$ — минимально неголодовский, если K — минимально неголодовский. Обратное утверждение доказывается с помощью тех же рассуждений. □

Предложение 5. *Пусть $K=\mathbb{C}P^2_9(J)$ для некоторой строки положительных целых чисел J. Тогда $\mathcal{Z}_K$ гомотопически не эквивалентен никакому букету сфер. Более того, если $\mathcal{Z}_K$ не гомотопически эквивалентен букету сфер, то же верно и для $\mathcal{Z}_{K(J)}$ для любого симплициального комплекса K.*

Доказательство. В случае $J=(1,\dots,1)$ мы знаем гомотопический тип $\mathcal{Z}_K$ (см. Теорему 4). Квадрат Стинрода Sq^2 дает ненулевое отображение в когомологиях любой надстройки над $\mathbb{C}P^2$, однако все когомогические операции тривиальны на букетах сфер.

В общем случае неградуированный изоморфизм колец когомологий из Теоремы 6 с коэффициентами в $\mathbb{Z}/p$ (p простое) есть изоморфизм $\mathbb{Z}/p$-модулей, коммутирующий с действием алгебры Стинрода (см. [2, Corollary 7.7]), поэтому $\mathcal{Z}_{K(J)}$ не может быть гомотопически эквивалентен букету сфер. □

Замечание. Заметим, что, вообще говоря, $K(J)$ не является смежностным комплексом для смежностного комплекса K.

Далее мы переходим к изучению минимальной неголодовости для $(n-1)$-мерных сфер с малым числом вершин. Как известно, всякая $(n-1)$-мерная сфера с $m \leq n+3$ вершинами является границей симплициального многогранника.

Теорема 7. *Предположим, что $K = K_P$ есть нерв-комплекс простого n-мерного многогранника с $m \leq n+3$ гипергранями. Имеют место следующие утверждения.*

(a) Если $m = n+1$, то P — есть симплекс, $\mathcal{Z}_P$ — сфера и K_P — комплекс Голода.

(b) Если $m = n+2$, то P комбинаторно эквивалентен произведению двух симплексов, $\mathcal{Z}_P$ есть произведение двух нечетномерных сфер и K_P — минимально неголодовский комплекс.

(c) Если $m = n+3$, то K_P — минимально неголодовский комплекс тогда и только тогда, когда P **не** *является произведением трех симплексов.*

Доказательство. Утверждения (a) и (b) очевидны, поскольку n-мерные многогранники с $m = n+1$ и $m = n+2$ однозначно определены, с точностью до аффинных и проективных преобразований, соответственно.
Докажем утверждение (c).
Согласно результату, полученному Ероховцом [7, Теорема 2.3.48], если P — простой n-мерный многогранник с $m = n+3$ гипергранями, то $P = C^{2k-4}(2k-1)^*(j_1, \ldots, j_{2k-1})$, где $k \geqslant 3$ и $C^n(m)$ обозначает n-мерный циклический многогранник с m вершинами, а $C^n(m)^*$ – двойственный к нему простой многогранник.

Но циклический многогранник является смежностным (см. [19]). В силу [15, Предложение 3.6], нерв-комплекс K_P четномерного двойственно смежностного многогранника P — минимально неголодовский. Доказательство заканчивается применением Предложения 4. □

Топологические типы момент-угол многообразий $\mathcal{Z}_P$ для многогранников из утверждения (c) Теоремы 7 могут быть описаны следующим образом.

Предложение 6 ([17], [7])**.** *Пусть P — простой n-мерный многогранник с $m = n+3$ вершинами, так что $P = C^{2k-4}(2k-1)^*(j_1, \ldots, j_{2k-1})$, при некотором $k \geqslant 3$. Тогда*

$$\mathcal{Z}_P \cong \mathop{\#}_{i=1}^{2k-1} S^{2\varphi_i - 1} \times S^{2\psi_{i+k-1} - 2},$$

где $\varphi_r = j_r + \ldots + j_{r+k-2}$, $\psi_r = j_r + \ldots + j_{r+k-1}$, и все индексы рассматриваются по модулю $2k-1$.

Таким образом, мы получили бесконечное семейство триангулированных сфер K, являющихся минимально неголодовскими и свободными от кручений, момент-угол многообразия $\mathcal{Z}_K$ которых гомеоморфны связным суммам произведений сфер с двумя сферами в каждом произведении.

Замечание. Минимальная неголодовость в утверждении (c) Теоремы 7 может быть также получена из явного описания умножения в $H^{*,*}(\mathcal{Z}_P)$ в случае $m = n+3$, см. [7, Теорема 2.5.8]

Мы можем обобщить наши результаты, рассмотрев операцию подстановки симплициальных комплексов, определенную в работе Айзенберга [1].

Определение 2. *Пусть K есть $(n-1)$-мерный симплициальный комплекс на m вершинах, $K_1,\ldots,K_m$ суть симплициальные комплексы (возможно, пустые или с "призрачными" вершинами) на множествах $[l_1],\ldots,[l_m]$ соответственно. Тогда подстановкой в комплекс K комплексов $K_i, 1\le i\le m$, называется симплициальный комплекс $K(K_1,\ldots,K_m)$ на множестве $[l_1]\sqcup\ldots\sqcup[l_m]$, определяемый следующим образом: множество вида $I = I_1\sqcup\ldots\sqcup I_m$ при $I_j\subset[l_j]$ есть симплекс из $K(K_1,\ldots,K_m)$, если и только если $\{j\in[m]|I_j\notin K_j\}\in K$. Подстановка комплексов имеет, таким образом, $l_1+\ldots+l_m$ вершин.*

Пример 4. *Пусть $K_i = \partial\Delta^{j_i-1}$ при $1\le i\le m$. Тогда $K(K_1,\ldots,K_m) = K(J)$ есть мультивставка.*

Теорема 8. *Пусть $K_1,\ldots,K_m$ суть симплициальные комплексы.*

(a) $K(K_1,\ldots,K_m)$ является комплексом Голода, если и только если $K_{[m]-\{s_1,\ldots,s_r\}}$ – комплекс Голода, где $1\le s_1,\ldots,s_r\le m$ таковы, что $K_{s_i} = \Delta^{l_{s_i}-1}$ для всех $1\le i\le r$ $(l_j\ge 1,\ 1\le j\le m)$.

(b) $K(K_1,\ldots,K_m)$ является минимально неголодовским комплексом, если и только если $K_{[m]-\{s_1,\ldots,s_r\}}$ — минимально неголодовский комплекс, где $1\le s_1,\ldots,s_r\le m$ таковы, что $K_{s_i} = \Delta^{l_{s_i}-1}$ для всех $1\le i\le r$ и $K_j = \partial\Delta^{l_j-1}$ при $j\ne s_i, 1\le i\le r$, $1\le j\le m$ $(l_j, l_{s_i}\ge 1)$.

Доказательство. Доказательство получается индукцией по числу N непустых симплициальных комплексов из $K_1,\ldots,K_m$. База индукции $N=0$ тривиальна (считаем $\varnothing$ пустыми комплексами с 1 призрачной вершиной), так что рассмотрим случай $N=1$. Предположим, что $K_i = L$ есть единственный непустой комплекс. Тогда

$$K(L) = K(\varnothing_1,\ldots,K_i,\ldots,\varnothing_m) = L*(K-i)\cup\Delta^{l_i-1}*\operatorname{link}_i K, \qquad (0.1)$$

где симплициальные комплексы в объединении склеиваются по общему подкомплексу $L*\operatorname{link}_i K$.

Докажем утверждение (a). В части "только если", если L есть симплекс, то $K(L) = \Delta^{l_i-1}*(K-i)$ и утверждение верно, поскольку $\mathcal{Z}_{K(L)}\simeq\mathcal{Z}_{K-i}$. Иначе, рассмотрим минимальную не-грань V в L. Тогда $K(V)$ есть полный подкомплекс в голодовском комплексе $K(L)$ и потому $K(V)$ — комплекс Голода. Таким образом, K голодовский в силу Предложения 4.

В части “если”, когда L есть симплекс, то $K(L) = \Delta^{l_i-1} * (K - i)$ и утверждение верно. Иначе, предположим, что $K(L)$ — неголодовский комплекс и следующее отображение, задающее cup-произведение, нетривиально:

$$\widetilde{H}^i(K(L)_I) \otimes \widetilde{H}^j(K(L)_J) \to \widetilde{H}^{i+j+1}(K(L)_{I \sqcup J}).$$

Тогда оно нетривиально и как отображение, задающее cup-произведение в Tor-алгебре $K(\partial\Delta^{(I\sqcup J)\cap L})$, но последний комплекс является голодовским по Предложению 4. Получили противоречие. Значит, $K(L)$ — комплекс Голода, утверждение (a) доказано.

Докажем утверждение (b). Часть “если” очевидно следует из Предложения 4. Докажем часть “только если”. Предположим, что $K(L)$ — минимально неголодовский комплекс. Если L есть симплекс, то $\mathcal{Z}_{K(L)} \simeq \mathcal{Z}_{K-i}$; если L есть граница симплекса, то K — минимально неголодовский комплекс в силу Предложения 4 и утверждение верно. Пусть L не является ни симплексом, ни границей симплекса. Тогда существует собственное подмножество вершин $V \subset L$ (минимальная неграни L) такое, что L_V есть граница симплекса. Заметим, что $K(L_V)$ есть полный подкомплекс в $K(L)$, так что $K(L_V)$ есть комплекс Голода, поскольку $K(L)$ — минимально неголодовский комплекс. Тогда K есть комплекс Голода в силу Предложения 4, и мы получаем противоречие с утверждением (a).

Для того чтобы сделать шаг индукции одновременно в (a) и в (b), мы используем следующий результат [1, Следствие 4.14]

$$K(K_1, \ldots, K_m) = K(L)(K_1, \ldots, K_{i-1}, \varnothing, \ldots, \varnothing, K_{i+1}, \ldots, K_m),$$

где ровно l_i пустых комплексов стоит во второй подстановке. Этим доказательство заканчивается индукцией по числу непустых симплициальных комплексов в подстановке комплексов в комплекс. □

Список литературы

[1] А. А. Айзенберг, “Подстановки многогранников, симплициальных комплексов и мультиградуированные числа Бетти”, *Тр. ММО*, **74**:2 (2013), 211–245.

[2] A. Bahri, M. Bendersky, F. R. Cohen, S. Gitler, *Operations on polyhedral products and a new topological construction of infinite families of toric manifolds*, Preprint, 2010, arXiv: 1011.0094v5.

[3] A. Bahri, M. Bendersky, F. R. Cohen, S. Gitler, “The polyhedral product functor: A method of decomposition for moment-angle complexes, arrangements and related spaces”, *Advances in Mathematics*, **225**:3 (2010), 1634–1668.

[4] Piotr Beben and Jelena Grbić, *Configuration spaces and polyhedral products*, Preprint, 2014, arXiv: 1409.4462v11.

[5] Alexander Berglund and Michael Jöllenbeck, “On the Golod property of Stanley–Reisner rings”, *J. Algebra*, **315**:1 (2007), 249–273.

[6] Victor M. Buchstaber and Taras E. Panov, “Toric Topology”, *Mathematical Surveys and Monographs.* V. 204, American Mathematical Society, RI, Providence, 2015.

[7] Н. Ю. Ероховец, “Теория инварианта Бухштабера симплициальных комплексов и выпуклых многогранников”, *Тр. МИАН*, **286** (2014), 144–206.

[8] Е. С. Голод, “О гомологиях некоторых локальных колец”, *ДАН СССР*, **144**:3 (1962), 479–482.

[9] Jelena Grbic, Taras Panov, Stephen Theriault and Jie Wu, “Homotopy types of moment-angle complexes for flag complexes”, *Transactions of the AMS*, 2015 (to appear), arXiv: 1211.0873.

[10] T. H. Gulliksen and G. Levin, “Homology of local rings”, *Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics*. V. 20, Queen's University, Kingston, Ontario, 1969.

[11] M. Hochster, “Cohen-Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes, in Ring theory, II”, *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*. V. 26, Proc. Second Conf. (Univ. Oklahoma, Norman, Okla., 1975), Dekker, New York, 1977, 171–223.

[12] Kouyemon Iriye and Daisuke Kishimoto, *Fat wedge filtrations and decomposition of polyhedral products*, Preprint, 2014, arXiv: 1412.4866v3.

[13] W. Kühnel, T. F. Banchoff, “The 9-Vertex Complex Projective Plane”, *Math. Int.*, **5**:3 (1983), 11–22.

[14] W. Kühnel, G. Lassmann, “The Unique 3-Neighbourly 4-Manifold with Few Vertices”, Series A, **35**, 1983, 173–184.

[15] И. Ю. Лимонченко, “Кольца Стенли–Райснера обобщенных многогранников усечения и их момент-угол многообразия”, *Тр. МИАН*, **286** (2014), 207–218.

[16] Macaulay 2, *A software system devoted to supporting research in algebraic geometry and commutative algebra*, Available at `http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/`.

[17] S. Lopez de Medrano, “Topology of the intersection of quadrics in $\mathbb{R}^n$”, *Lecture Notes in Mathematics*, **1370** (1989), 280–292.

[18] Taras E. Panov, “Cohomology of face rings, and torus actions”, *Surveys in Contemporary Mathematics*. V. 347, London Math. Soc. Lecture Note Series, Cambridge, U.K., 2008, 165–201, arXiv: math.AT/0506526.

[19] Günter M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Springer-Verlag, New York, 2007.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 28 сентября 2015 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (грант 14-11-00414)

Limonchenko I. Yu. Families of minimally non-Golod simplicial complexes and polyhedral products. Far Eastern Mathematical Journal. 2015. V. 15. № 2. P. 222–237.

ABSTRACT

We consider families of simple polytopes P and simplicial complexes K well-known in polytope theory and convex geometry, and show that their moment-angle complexes have some remarkable homotopy properties which depend on combinatorics of the underlying complexes and algebraic properties of their Stanley–Reisner rings. We introduce infinite series of Golod and minimally non-Golod simplicial complexes K with moment-angle complexes $\mathcal{Z}_K$ having free integral cohomology but not homotopy equivalent to a wedge of spheres or a connected sum of products of spheres respectively. We then prove a criterion for a simplicial multiwedge and composition of complexes to be Golod and minimally non-Golod and present a class of minimally non-Golod polytopal spheres.
Key words: *simple polytopes, Golod rings, moment-angle complexes, Stanley–Reisner rings.*