Дальневосточный математический журнал. 2015. Том 15. № 2. С. 238–246

УДК 517.54
MSC2010 30C75, 30C85

© Н. А. Павлов[1]

Теорема искажения для ограниченных однолистных функций

Доказывается теорема искажения для однолистных ограниченных в круге функций, включающая угловые производные в двух граничных точках и производную Шварца во внутренней точке круга.

Ключевые слова: *однолистные функции, угловая производная, производная Шварца, емкости конденсаторов.*

Введение и формулировка основного результата

Пусть функция f голоморфна в единичном круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и удовлетворяет условию $|f(z)| < 1$ при $z \in U$. Точка z, $|z| = 1$, называется неподвижной граничной точкой функции f, если существует угловой предел $\angle \lim\limits_{\zeta \to z} f(\zeta) = z$. По лемме Жюлиа – Вольфа существование углового предела $f(z)$ в граничной неподвижной точке z влечет за собой существование угловой производной $f'(z)$ [1, с. 79–83]. Хорошо известно, что если $e^{\pm i\theta}$ — две неподвижные граничные точки однолистной функции f, то

$$f'(e^{i\theta})f'(e^{-i\theta}) \geq 1 \tag{1}$$

(см., например, [2]). В недавней статье [3] получена нижняя оценка левой части (1) для голоморфной однолистной функции f, зависящая от величины $\Phi(f(0))$. Здесь Φ есть дробно-линейный автоморфизм круга U такой, что $\operatorname{Im}\Phi(f(0)) = 0$, $\Phi(e^{\pm i\theta}) = e^{\pm i\theta}$ [3, теорема 6]. Ранее Васильев и Поммеренке [4] доказали неравенство, включающее в себя $f'(0)$ при условии $f(0) = 0$

$$f'(e^{i\theta})f'(e^{-i\theta}) \geq |1/f'(0)|^2.$$

В данной статье впервые устанавливается точное неравенство, включающее произведение $f'(e^{i\theta})f'(e^{-i\theta})$ и более сложный объект — производную Шварца

$$S_f(z) = \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2,$$

вычисленную в точке $z = 0$. Справедливо следующее утверждение.

[1]Дальневосточный федеральный университет, 690950, г. Владивосток, ул. Суханова, 8. Электронная почта: `npamcs@gmail.com`

Теорема. *Для любой голоморфной и однолистной в круге U функции f, отображающей сопряженные граничные точки $e^{\pm i\theta}$, $\theta \in (0, \pi)$ в сопряженные точки на границе круга U, выполняется неравенство*

$$|S_f(0)| \le 6\left(1 - \frac{|f'(0)|^2}{(1-|f(0)|^2)^2}\right) - 3\log|f'(e^{i\theta})f'(e^{-i\theta})| - \\ -3\log\frac{1-\Phi^2(f(0))}{1-2\Phi(f(0))\cos\theta + \Phi^2(f(0))}. \tag{2}$$

Равенство в (2) достигается в случае тождественного отображения.

Неравенство (2) дополняет исследования в [3]. В случае, когда $f(0) = 0$, отображение Φ является тождественным, и, учитывая то, что $f'(e^{\pm i\theta}) > 0$ для неподвижных граничных точек $e^{\pm i\theta}$ [1, с. 82, утверждение 4.13], мы приходим к следствию.

Следствие. *Если функция f голоморфная и однолистная в круге U, $f(0) = 0$, и точки $e^{\pm i\theta}$, $\theta \in (0, \pi)$, являются неподвижными граничными точками f, то*

$$|S_f(0)| \le 6(1 - |f'(0)|^2) - \frac{3}{2}\log(f'(e^{i\theta})f'(e^{-i\theta})). \tag{3}$$

Равенство в (3) достигается в случае тождественного отображения.

Используя (1) и (3), приходим к классической оценке Нехари

$$|S_f(0)| \le 6(1 - |f'(0)|^2).$$

Основным инструментом при доказательстве теоремы служит неравенство Нехари для производных однолистных ограниченных функций, вычисленных во внутренних точках круга U [5]. Мы предлагаем упрощенное доказательство частного случая этого неравенства (утверждение), основанное на применении приведенных модулей [6].

1. Вспомогательное утверждение

Следующий результат восходит к работе Нехари [5].

Утвержнение. *Для любой голоморфной и однолистной в круге U функции f, любых четырех точек $z_k \in U$, $k = 1, \ldots, 4$, и любого числа $\rho \in (0, 1)$ выполняется неравенство*

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{\rho^2}\log\frac{(1-|z_k|^2)|f'(z_k)|}{1-|f(z_k)|^2}+\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{4}\log\frac{(1-|z_k|^2)|f'(z_k)|}{1-|f(z_k)|^2}\le$$
$$\le\frac{1}{\rho^2}\log\left|\frac{1-\overline{z_1}z_2}{z_1-z_2}\right|-\frac{1}{\rho}\log\left|\frac{1-\overline{z_1}z_3}{z_1-z_3}\right|+\frac{1}{\rho}\log\left|\frac{1-\overline{z_1}z_4}{z_1-z_4}\right|+\frac{1}{\rho}\log\left|\frac{1-\overline{z_2}z_3}{z_2-z_3}\right|-$$
$$-\frac{1}{\rho}\log\left|\frac{1-\overline{z_2}z_4}{z_2-z_4}\right|+\log\left|\frac{1-\overline{z_3}z_4}{z_3-z_4}\right|-\frac{1}{\rho^2}\log\left|\frac{1-\overline{f(z_1)}f(z_2)}{f(z_1)-f(z_2)}\right|+ \tag{4}$$
$$+\frac{1}{\rho}\log\left|\frac{1-\overline{f(z_1)}f(z_3)}{f(z_1)-f(z_3)}\right|-\frac{1}{\rho}\log\left|\frac{1-\overline{f(z_1)}f(z_4)}{f(z_1)-f(z_4)}\right|-\frac{1}{\rho}\log\left|\frac{1-\overline{f(z_2)}f(z_3)}{f(z_2)-f(z_3)}\right|+$$
$$+\frac{1}{\rho}\log\left|\frac{1-\overline{f(z_2)}f(z_4)}{f(z_2)-f(z_4)}\right|-\log\left|\frac{1-\overline{f(z_3)}f(z_4)}{f(z_3)-f(z_4)}\right|.$$

Доказательство. Пользуясь терминологией, принятой в [6, с. 55], рассмотрим приведенные модули $M(U,\partial U,Z,\Delta,\Psi_z)$ и $M(f(U),\partial f(U),W,\Delta,\Psi_w)$. Здесь $Z=\{z_k\}_{k=1}^4$, $\Delta=\{\delta_k\}_{k=1}^4$, $\delta_k\in\mathbb{R}$, $k=1,\dots,4$, $\sum\limits_{k=1}^{4}\delta_k^2\ne 0$, $\Psi_z=\{r,r,r,r\}$, $W=\{f(z_k)\}_{k=1}^4$, $\Psi_w=\{|f'(z_1)|r,|f'(z_2)|r,|f'(z_3)|r,|f'(z_4)|r\}$, $r\in\mathbb{R}_+$. Воспользуемся следующей формулой для приведенных модулей [6, с. 56, формула 2.16]:

$$M(B,\partial B,Z,\Delta,\Psi_z)=\frac{\nu^2}{2\pi}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta_k^2}{\nu_k^2}\log\frac{r(B,z_k)}{\mu_k}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1,\\ l\ne k}}^{n}\frac{\delta_k\delta_l}{\nu_k\nu_l}g_B(z_k,z_l)\right]. \tag{5}$$

Здесь $g_B(z,\zeta)$ — функция Грина области B с полюсом в точке $\zeta\in B$ [6, с. 29], $r(B,\zeta)$ — внутренний радиус открытого множества B относительно точки $\zeta\in B$ [6, с. 30], $\mu_k\in\mathbb{R}_+$, $\nu_k\in\mathbb{R}_+$, $k=1,\dots,n$, $\nu=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\delta_k^2/\nu_k\right)^{-1}$.

Проведя непосредственную проверку, можно убедиться, что для круга U

$$g_U(z,\zeta)=\log\left|\frac{1-\overline{\zeta}z}{z-\zeta}\right|,\qquad r(U,\zeta)=1-|\zeta|^2.$$

Пусть $\mu_k=1$, $\nu_k=1$, $k=1,\dots,4$. Поскольку f голоморфная и однолистная функция, она реализует конформное отображение. Известно, что емкость конденсатора конформно инвариантна [6, с. 19], поэтому

$$M(U_z,\partial U_z,Z,\Delta,\Psi_z)=M(f(U),\partial f(U),W,\Delta,\Psi_w).$$

Здесь $U_z=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$. Пусть также $U_w=\{w\in\mathbb{C}:|w|<1\}$. Поскольку $f(U)\subset U$, из свойства монотонности приведенных модулей [6, с. 56–57, формула 2.18] следует

$$M(U_z,\partial U_z,Z,\Delta,\Psi_z)=M(f(U),\partial f(U),W,\Delta,\Psi_w)\le M(U_w,\partial U_w,W,\Delta,\Psi_w). \tag{6}$$

Используя (5) и (6), получим

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{4}\delta_k^2\log\frac{(1-|z_k|^2)|f'(z_k)|}{1-|f(z_k)|^2}\le\sum_{k=1}^{4}\sum_{\substack{l=1,\\ l\ne k}}^{4}\delta_k\delta_l\log\left|\frac{1-\overline{f(z_k)}f(z_l)}{f(z_k)-f(z_l)}\right|-\\ -\sum_{k=1}^{4}\sum_{\substack{l=1,\\ l\ne k}}^{4}\delta_k\delta_l\log\left|\frac{1-\overline{z_k}z_l}{z_k-z_l}\right|.\end{gathered}\tag{7}$$

Положив в (7) $\delta_1=\frac{1}{\rho}$, $\delta_2=-\frac{1}{\rho}$, $\delta_3=1$, $\delta_4=-1$, получим (4). □

2. Доказательство теоремы

Рассмотрим сначала функцию $f(z)$, удовлетворяющую условию $f(0)=0$. В утверждении положим $z_1=\rho e^{i\varphi}$, $z_2=-\rho e^{i\varphi}$. Преобразуем слагаемые правой части (4). Всюду ниже $o(1)$ означает бесконечно малую функцию при $\rho\to 0$.

$$\begin{gathered}\frac{1}{\rho^2}\log\left|\frac{1-\overline{z_1}z_2}{z_1-z_2}\right|=\frac{1}{\rho^2}\log\left|\frac{1+\rho^2}{2\rho}\right|=1-\frac{\log(2\rho)}{\rho^2}+o(1);\\ -\frac{1}{\rho}\log\left|\frac{1-\overline{z_1}z_3}{z_1-z_3}\right|=-\frac{1}{\rho}\log\left|\frac{1-\rho e^{-i\varphi}z_3}{\rho e^{i\varphi}-z_3}\right|=\frac{\log|z_3|}{\rho}+\mathrm{Re}\left[e^{-i\varphi}z_3-\frac{e^{i\varphi}}{z_3}\right]+o(1);\\ \frac{1}{\rho}\log\left|\frac{1-\overline{z_1}z_4}{z_1-z_4}\right|=\frac{1}{\rho}\log\left|\frac{1-\rho e^{-i\varphi}z_4}{\rho e^{i\varphi}-z_4}\right|=-\frac{\log|z_4|}{\rho}+\mathrm{Re}\left[-e^{-i\varphi}z_4+\frac{e^{i\varphi}}{z_4}\right]+o(1);\\ \frac{1}{\rho}\log\left|\frac{1-\overline{z_2}z_3}{z_2-z_3}\right|=\frac{1}{\rho}\log\left|\frac{1+\rho e^{-i\varphi}z_3}{-\rho e^{i\varphi}-z_3}\right|=-\frac{\log|z_3|}{\rho}+\mathrm{Re}\left[e^{-i\varphi}z_3-\frac{e^{i\varphi}}{z_3}\right]+o(1);\\ -\frac{1}{\rho}\log\left|\frac{1-\overline{z_2}z_4}{z_2-z_4}\right|=-\frac{1}{\rho}\log\left|\frac{1+\rho e^{-i\varphi}z_4}{-\rho e^{i\varphi}-z_4}\right|=\frac{\log|z_4|}{\rho}+\mathrm{Re}\left[e^{i\varphi}z_4+\frac{e^{i\varphi}}{z_4}\right]+o(1).\end{gathered}$$

Суммируя приведенные разложения, получим

$$1-\frac{\log(2\rho)}{\rho^2}+\mathrm{Re}\left[-2e^{-i\varphi}(z_4-z_3)-2e^{i\varphi}\frac{z_4-z_3}{z_3z_4}\right]+o(1).$$

Аналогично справедливы следующие асимптотические равенства:

$$\begin{gathered}-\frac{1}{\rho^2}\log\left|\frac{1-\overline{f(z_1)}f(z_2)}{f(z_1)-f(z_2)}\right|=-\frac{1}{\rho^2}\log\left|\frac{1-\overline{f(\rho e^{i\varphi})}f(-\rho e^{i\varphi})}{f(\rho e^{i\varphi})-f(-\rho e^{i\varphi})}\right|=\frac{\log(2\rho)}{\rho^2}+\frac{\log|c_1|}{\rho^2}+\\ +\mathrm{Re}\left[-|c_1|^2+\frac{c_3}{c_1}e^{2i\varphi}\right]+o(1);\end{gathered}$$

$$\frac{1}{\rho}\log\left|\frac{1-\overline{f(z_1)}f(z_3)}{f(z_1)-f(z_3)}\right| = \frac{1}{\rho}\log\left|\frac{1-\overline{f(\rho e^{i\varphi})}f(z_3)}{f(\rho e^{i\varphi})-f(z_3)}\right| = -\frac{\log|f(z_3)|}{\rho}+$$
$$+\operatorname{Re}\left[\frac{c_1e^{i\varphi}}{f(z_3)} - f(z_3)\overline{c_1}e^{-i\varphi}\right] + o(1);$$
$$-\frac{1}{\rho}\log\left|\frac{1-\overline{f(z_1)}f(z_4)}{f(z_1)-f(z_4)}\right| = -\frac{1}{\rho}\log\left|\frac{1-\overline{f(\rho e^{i\varphi})}f(z_4)}{f(\rho e^{i\varphi})-f(z_4)}\right| = \frac{\log|f(z_4)|}{\rho}+$$
$$+\operatorname{Re}\left[-\frac{c_1e^{i\varphi}}{f(z_4)} + f(z_4)\overline{c_1}e^{-i\varphi}\right] + o(1);$$
$$-\frac{1}{\rho}\log\left|\frac{1-\overline{f(z_2)}f(z_3)}{f(z_2)-f(z_3)}\right| = -\frac{1}{\rho}\log\left|\frac{1+\overline{f(-\rho e^{i\varphi})}f(z_3)}{f(-\rho e^{i\varphi})-f(z_3)}\right| = \frac{\log|f(z_3)|}{\rho}+$$
$$+\operatorname{Re}\left[\frac{c_1e^{i\varphi}}{f(z_3)} - f(z_3)\overline{c_1}e^{-i\varphi}\right] + o(1);$$
$$\frac{1}{\rho}\log\left|\frac{1-\overline{f(z_2)}f(z_4)}{f(z_2)-f(z_4)}\right| = \frac{1}{\rho}\log\left|\frac{1+\overline{f(-\rho e^{i\varphi})}f(z_4)}{f(-\rho e^{i\varphi})-f(z_4)}\right| = -\frac{\log|f(z_4)|}{\rho}+$$
$$+\operatorname{Re}\left[-\frac{c_1e^{i\varphi}}{f(z_4)} + f(z_4)\overline{c_1}e^{-i\varphi}\right] + o(1).$$

Суммируя приведенные выражения, получим

$$\frac{\log(2\rho)}{\rho^2}+\frac{\log|c_1|}{\rho^2}-|c_1|^2+\operatorname{Re}\left[\frac{c_3}{c_1}e^{2i\varphi}+2\overline{c_1}e^{-i\varphi}(f(z_4)-f(z_3))+2c_1e^{i\varphi}\frac{f(z_4)-f(z_3)}{f(z_3)f(z_4)}\right]+o(1).$$

Таким образом, правая часть (4) имеет вид

$$\begin{aligned}1+\frac{\log|c_1|}{\rho^2}-|c_1|^2+\log\left|\frac{1-\overline{z_3}z_4}{z_3-z_4}\right|-\log\left|\frac{1-\overline{f(z_3)}f(z_4)}{f(z_3)-f(z_4)}\right|+\\ +\operatorname{Re}\left[\frac{c_3}{c_1}e^{2i\varphi}+2\overline{c_1}e^{-i\varphi}(f(z_4)-f(z_3))+2c_1e^{i\varphi}\frac{f(z_4)-f(z_3)}{f(z_3)f(z_4)}-\right.\\ \left.-2e^{-i\varphi}(z_4-z_3)-2e^{i\varphi}\frac{z_4-z_3}{z_3z_4}\right]+o(1).\end{aligned} \tag{8}$$

Рассмотрим теперь левую часть (4). Используя разложение

$$f'(z)=c_1+2c_2z+3c_3z^2+\ldots,$$

получим:

$$\frac{1}{2\rho^2}\log\frac{(1-|\rho e^{i\varphi}|^2)|f'(\rho e^{i\varphi})|}{1-|f(\rho e^{i\varphi})|^2} = -\frac{1}{2}+\frac{\log|c_1|}{2\rho^2}+$$
$$+\operatorname{Re}\left[\frac{c_2}{c_1\rho}e^{i\varphi}+\frac{3}{2}\frac{c_3}{c_1}e^{2i\varphi}-\frac{c_2^2}{c_1^2}e^{2i\varphi}\right]+\frac{|c_1|^2}{2}+o(1);$$

$$\frac{1}{2\rho^2}\log\frac{(1-|-\rho e^{i\varphi}|^2)|f'(-\rho e^{i\varphi})|}{1-|f(-\rho e^{i\varphi}|^2} = -\frac{1}{2}+\frac{\log|c_1|}{2\rho^2}+$$
$$+\operatorname{Re}\left[-\frac{c_2}{c_1\rho}e^{i\varphi}+\frac{3}{2}\frac{c_3}{c_1}e^{2i\varphi}-\frac{c_2^2}{c_1^2}e^{2i\varphi}\right]+\frac{|c_1|}{2}^2+o(1).$$

Следовательно, левая часть (4) представима в виде

$$-1+\frac{\log|c_1|}{\rho^2}+|c_1|^2+\operatorname{Re}\left[3\frac{c_3}{c_1}e^{2i\varphi}-2\frac{c_2^2}{c_1^2}e^{2i\varphi}\right]+\frac{1}{2}\log\frac{(1-|z_3|^2)|f'(z_3)|}{1-|f(z_3)|^2}$$
$$++\frac{1}{2}\log\frac{(1-|z_4|^2)|f'(z_4)|}{1-|f(z_4)|^2}+o(1). \tag{9}$$

Используя (8) и (9), перепишем (4) в следующем виде:

$$-1+\frac{\log|c_1|}{\rho^2}+|c_1|^2+\operatorname{Re}\left[3\frac{c_3}{c_1}e^{2i\varphi}-2\frac{c_2^2}{c_1^2}e^{2i\varphi}\right]+\frac{1}{2}\log\frac{(1-|z_3|^2)|f'(z_3)|}{1-|f(z_3)|^2}+$$
$$+\frac{1}{2}\log\frac{(1-|z_4|^2)|f'(z_4)|}{1-|f(z_4)|^2}\le 1+\frac{\log|c_1|}{\rho^2}-|c_1|^2+\log\left|\frac{1-\overline{z_3}z_4}{z_3-z_4}\right|-$$
$$-\log\left|\frac{1-\overline{f(z_3)}f(z_4)}{f(z_3)-f(z_4)}\right|+\operatorname{Re}\left[\frac{c_3}{c_1}e^{2i\varphi}+2\overline{c_1}e^{-i\varphi}(f(z_4)-f(z_3))+\right.$$
$$\left.+2c_1e^{i\varphi}\frac{f(z_4)-f(z_3)}{f(z_3)f(z_4)}-2e^{-i\varphi}(z_4-z_3)-2e^{i\varphi}\frac{z_4-z_3}{z_3z_4}\right]+o(1).$$

После приведения подобных слагаемых и предельного перехода при $\rho\to 0$ получим

$$\operatorname{Re}\left[2\frac{c_3}{c_1}e^{2i\varphi}-2\frac{c_2^2}{c_1^2}e^{2i\varphi}\right]\le 2-2|c_1|^2+\operatorname{Re}\left[2\overline{c_1}e^{-i\varphi}(f(z_4)-f(z_3))+\right.$$
$$\left.+2c_1e^{i\varphi}\frac{f(z_4)-f(z_3)}{f(z_3)f(z_4)}-2e^{-i\varphi}(z_4-z_3)-2e^{i\varphi}\frac{z_4-z_3}{z_3z_4}\right]+$$
$$+\log\left|\frac{(f(z_3)-f(z_4))(1-\overline{z_3}z_4)}{(z_3-z_4)(1-\overline{f(z_3)}f(z_4))}\right|-\frac{1}{2}\log\frac{(1-|z_3|^2)|f'(z_3)f'(z_4)|(1-|z_4|^2)}{(1-|f(z_3)|^2)(1-|f(z_4)|^2)}. \tag{10}$$

Заметим, что

$$S_f(0)=6\left(\frac{c_3}{c_1}-\frac{c_2^2}{c_1^2}\right).$$

Домножив обе части (10) на 3, получим

$$\operatorname{Re}\left[S_f(0)e^{2i\varphi}\right]\le 6-6|f'(0)|^2+\operatorname{Re}\left[6\overline{c_1}e^{-i\varphi}(f(z_4)-f(z_3))+\right.$$
$$\left.+6c_1e^{i\varphi}\frac{f(z_4)-f(z_3)}{f(z_3)f(z_4)}-6e^{-i\varphi}(z_4-z_3)-6e^{i\varphi}\frac{z_4-z_3}{z_3z_4}\right]+$$
$$+3\log\left|\frac{(f(z_3)-f(z_4))(1-\overline{z_3}z_4)}{(z_3-z_4)(1-\overline{f(z_3)}f(z_4))}\right|-\frac{3}{2}\log\frac{(1-|z_3|^2)|f'(z_3)f'(z_4)|(1-|z_4|^2)}{(1-|f(z_3)|^2)(1-|f(z_4)|^2)}. \tag{11}$$

Преобразуем левую часть (11):

$$\operatorname{Re}[S_f(0)e^{2i\varphi}] = \operatorname{Re} S_f(0)\cos 2\varphi - \operatorname{Im} S_f(0)\sin 2\varphi.$$

Пусть теперь $z_4 = \overline{z_3}$, $f(z_4) = \overline{f(z_3)}$. Положим

$$A = 6 - 6|f'(0)|^2 - \frac{3}{2}\log\frac{(1-|z_3|^2)^2|f'(z_3)f'(z_4)|}{(1-|f(z_3)|^2)^2} + 3\log\left|\frac{f(z_3)(1-\frac{\overline{f(z_3)}}{f(z_3)})(1-\overline{z_3}^2)}{z_3(1-\frac{\overline{z_3}}{z_3})(1-\overline{f(z_3)}^2)}\right|,$$

$$B = \operatorname{Re}\left[6\overline{c_1}e^{-i\varphi}(\overline{f(z_3)} - f(z_3)) + 6c_1e^{i\varphi}\frac{\overline{f(z_3)} - f(z_3)}{|f(z_3)|^2} - 6e^{-i\varphi}(\overline{z_3} - z_3) - 6e^{i\varphi}\frac{\overline{z_3} - z_3}{|z_3|^2}\right].$$

После простых вычислений

$$B = 12(-\cos\varphi\operatorname{Im} c_1\operatorname{Im} f(z_3) - \sin\varphi\operatorname{Re} c_1\operatorname{Im} f(z_3)) + \frac{12}{|f(z_3)|^2}\Big(\cos\varphi\operatorname{Im} c_1\operatorname{Im} f(z_3) +$$
$$+ \sin\varphi\operatorname{Re} c_1\operatorname{Im} f(z_3)\Big) + 12\sin\varphi\operatorname{Im} z_3 - \frac{12}{|z_3|^2}\sin\varphi\operatorname{Im} z_3.$$

Пусть теперь точки $z_3 = e^{i\theta}$ и $z_4 = e^{-i\theta}$ (а следовательно, и $f(z_3)$, $f(z_4)$) лежат на границе U. Тогда

$$A = 6 - 6|f'(0)|^2 - \frac{3}{2}\log|f'(e^{i\theta})f'(e^{-i\theta})|, \qquad B = 0,$$

и неравенство (11) дает

$$\operatorname{Re} S_f(0)\cos 2\varphi - \operatorname{Im} S_f(0)\sin 2\varphi \le A.$$

Переходя к максимуму по φ, после простых преобразований получим

$$\frac{(\operatorname{Re} S_f(0))^2}{|S_f(0)|} + \frac{(\operatorname{Im} S_f(0))^2}{|S_f(0)|} \le A.$$

Отсюда

$$|S_f(0)| \le 6(1 - 6|f'(0)|^2) - \frac{3}{2}\log|f'(e^{i\theta})f'(e^{-i\theta})|. \tag{12}$$

Теорема в случае, когда $f(0) = 0$, доказана.

Пусть теперь $f(z)$ — любая голоморфная функция, удовлетворяющая условиям теоремы. Построим вспомогательное отображение, оставляющее точку 0 неподвижной, и применим к нему доказанное выше.

Рассмотрим сначала дробно-линейный автоморфизм $\Psi(v)$ круга U такой, что

$$\Psi(\Phi(f(0))) = 0, \tag{13}$$
$$\Psi(e^{\pm i\theta}) = e^{\pm i\gamma}, \tag{14}$$

где $\gamma \in (0,\pi)$ — некоторое число. Это отображение представимо в следующем виде:

$$\Psi(v) = e^{i\alpha}\frac{v-b}{1-\bar{b}v}, \qquad |b|<1, \qquad \mathrm{Im}(\alpha)=0.$$

Условия (13), (14) влекут за собой $b=\Phi(f(0))$ и $\alpha=0$ соответственно. Таким образом, $\mathrm{Im}\, b = 0$, и

$$\Psi(v) = \frac{v-b}{1-bv}. \tag{15}$$

Заметим, что отображение $\Psi(\Phi(f(z)))$ удовлетворяет условиям теоремы, при этом точка 0 является неподвижной.

Найдем сначала $(\Psi(\Phi(f(e^{i\theta}))))'(\Psi(\Phi(f(e^{-i\theta}))))'$. Докажем, что отображение Φ обладает свойством

$$\Phi'(e^{\theta})\Phi'(e^{-\theta}) = f'(e^{i\theta})f'(e^{-i\theta}). \tag{16}$$

Для этого рассмотрим дробно-линейный автоморфизм $F(w)$ круга U такой, что точки $e^{\pm i\theta}$ остаются неподвижными. Это отображение является гиперболическим и представимо в нормальной форме [7, с. 120–121]

$$\frac{F(w)-e^{i\theta}}{F(w)-e^{-i\theta}} = \mu\frac{w-e^{i\theta}}{w-e^{-i\theta}}, \qquad \mu\in\mathbb{R}_+. \tag{17}$$

Пусть $F_\mu(w)$ — представление $F(w)$ из (17). Проведя непосредственную проверку, можно убедиться в том, что

$$(F_\mu(f(z)))'|_{z=e^{i\theta}}(F_\mu(f(z)))'|_{z=e^{-i\theta}} = f'(e^{i\theta})f'(e^{-i\theta}). \tag{18}$$

Существует параметр μ_0, такой, что $F_{\mu_0}\equiv\Phi$, поэтому из (18) при $\mu=\mu_0$ следует (16).

Теперь, используя (15), получим

$$\Psi'(v) = \frac{1-b^2}{(1-bv)^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}(\Psi(\Phi(f(e^{i\theta}))))'(\Psi(\Phi(f(e^{-i\theta}))))' &= \frac{(1-b^2)^2}{(1-e^{i\theta}b)^2(1-e^{-i\theta}b)^2}(f'(e^{i\theta})f'(e^{-i\theta}))^2 = \\ &= \frac{(1-\Phi^2(f(0)))^2}{(1-2\Phi(f(0))\cos\theta+\Phi^2(f(0)))^2}(f'(e^{i\theta})f'(e^{-i\theta}))^2.\end{aligned} \tag{19}$$

Заметим, что отображение $\Psi\circ\Phi$ также является дробно-линейным автоморфизмом. Пусть $\Upsilon(w)=(\Psi\circ\Phi)(w)$. Нетрудно увидеть, что $\Upsilon(f(0))=0$. Из представления

$$\Upsilon(w) = e^{i\beta}\frac{w-c}{1-\bar{c}w}, \qquad |c|<1, \qquad \mathrm{Im}(\beta)=0,$$

следует $c=f(0)$. Поэтому

$$|(\Psi(\Phi(f(z))))'|_{z=0}| = |(\Upsilon(f(z)))'|_{z=0}| = \frac{|f'(0)|}{1-|f(0)|^2}. \tag{20}$$

Используя тот факт, что шварциан дробно-линейного отображения равен нулю, получим

$$S_{\Psi\circ\Phi\circ f}(z) = S_{(\Psi\circ\Phi)\circ f}(z) = (S_{\Psi\circ\Phi}\circ f)(f'(z))^2 + S_f(z) = S_f(z). \tag{21}$$

Используя (12), (19), (20) и (21), получим искомую оценку (2):

$$|S_f(0)| \leq 6\left(1 - \frac{|f'(0)|^2}{(1-|f(0)|^2)^2}\right) - 3\log|f'(e^{i\theta})f'(e^{-i\theta})| -$$
$$-3\log\frac{1-\Phi^2(f(0))}{1-2\Phi(f(0))\cos\theta + \Phi^2(f(0))}.$$

Случай равенства в (2) проверяется непосредственно. Теорема доказана. □

Список литературы

[1] Ch. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal maps*, Springer, Berlin, 1992.

[2] C. C. Cowen, Ch. Pommerenke, "Inequalities for the angular derivative of an analytic function in the unit disk", *J. London Math. Soc.*, **2**:26 (1982), 271–289.

[3] A. Frolova, M. Levenshtein, D. Shoikhet, A. Vasil'ev, "Boundary distortion estimates for holomorphic maps", *Complex Analysis and Operator Theory*, **8**:5 (2014), 1129–1149.

[4] Ch. Pommerenke, A. Vasil'ev, "Angular derivatives of bounded univalent functions and extremal partitions of the unit disk", *Pacific. J. Math.*, **206**:2 (2002), 425–450.

[5] Z. Nehari, "Some inequalities in the theory of functions", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **75**:2 (1953), 256–286.

[6] В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Дальнаука, Владивосток, 2009.

[7] И. И. Привалов, *Введение в теорию функций функций комплексного переменного*, Наука, Главная редакция физико-математической литературы, М., 1984.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 22 июля 2015 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект 14-11-00022)

Pavlov N. A. Distortion theorem for bounded univalent functions. Far Eastern Mathematical Journal. 2015. V. 15. № 2. P. 238–246.

ABSTRACT

Distortion theorem for bounded univalent functions in the unit disk is proven. Estimate includes angular derivatives in two boundary points and Schwarzian derivative in interior point of the unit disk.

Key words: *univalent functions, angular derivative, Schwarzian derivative, capacity of condenser.*