

УДК 517.923, 539.32
MSC2010 34B30

© Г. М. Севастьянов¹

Усадка полого цилиндра при нагреве

Усадка внешней поверхности полого цилиндра из материала с положительным коэффициентом линейного термического расширения при нагревании не может реализоваться в рамках модели термоупругости Дюамеля – Неймана с постоянными упругими модулями. Однако оказывается, что в случае температурной зависимости модулей при неравномерном нагреве возможно отрицательное радиальное смещение внешней цилиндрической поверхности. В данной работе проводится точное аналитическое интегрирование дифференциального уравнения термоупругого равновесия (Ламе) для длинного полого цилиндра, находящегося в условиях плоской деформации, при определенных ограничениях на коэффициенты и правую часть. Приведены условия для усадки цилиндра при нагреве, а также физически реализуемый пример конструкции такого цилиндра.

Ключевые слова: *термоупругость Дюамеля – Неймана, гипергеометрическое уравнение Эйлера, непостоянные упругие модули, уравнение Гойна.*

Введение

Рассмотрим задачу термоупругой деформации длинного полого цилиндра с радиусами r_1 и r_2 ($r_1 < r_2$), который имел начальную равномерную по объему температуру T_0 и подвергся изменению этой температуры так, что $T \equiv T(r) = a_T + b_T \cdot r$. Ограничимся рассмотрением только одномерной задачи, когда под действием осесимметричного плоского температурного поля реализуется состояние плоской деформации цилиндра, $\varepsilon_{zz} = 0$. Единственная ненулевая компонента перемещений – радиальная. Предположение линейности распределения температурного поля по радиусу в качественном отношении справедливо в некоторых важных для практики случаях стационарного теплообмена. Также условимся, что на граничных поверхностях цилиндра не возникает сил трения, касательные напряжения $\sigma_{rz} = 0$.

¹Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, 681005, г. Комсомольск-на-Амуре, ул. Металлургов, 1. Электронная почта: ake1a.86@mail.ru

Тогда система уравнений, описывающая процесс, примет вид:
уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \quad (1)$$

закон Дюамеля – Неймана

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E}{1+\nu} \cdot \left(\varepsilon_{rr} + \frac{\nu\varepsilon - (1+\nu) \cdot \alpha_L(T - T_0)}{1-2\nu} \right), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{E}{1+\nu} \cdot \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} + \frac{\nu\varepsilon - (1+\nu) \cdot \alpha_L(T - T_0)}{1-2\nu} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

линейные соотношения Коши для малых деформаций

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r}. \quad (3)$$

В уравнениях (1)–(3) E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, α_L – коэффициент линейного термического расширения, $\varepsilon = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}$ – первый инвариант тензора деформаций, u – радиальная компонента перемещений.

Соответствующее (1) уравнение Ламе при $\nu(r) \equiv \nu(T(r)) = const$ имеет вид

$$u'' \cdot E + u' \cdot \left(\frac{E}{r} + \frac{dE}{dr} \right) + u \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{dE}{dr} \cdot \frac{\nu}{1-\nu} - \frac{E}{r^2} \right) = \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{d(E \cdot \alpha_L(T - T_0))}{dr}. \quad (4)$$

В случае, когда $E(r) \equiv E(T(r)) = const$, (4) допускает понижение порядка и интегрируется при задании произвольных функций $T(r)$, $\alpha_L(r) \equiv \alpha_L(T(r))$:

$$\frac{d}{dr} \left(u' + \frac{u}{r} \right) = \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{d(\alpha_L(T - T_0))}{dr}.$$

В частности, при постоянном коэффициенте линейного расширения α_L и линейном распределении температуры по радиусу общее решение имеет вид

$$u(r) = \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \alpha_L \cdot \left(\frac{b_T}{3} \cdot r^2 + C_1 \cdot r \right) + \frac{C_2}{r}. \quad (5)$$

Наряду с требованием линейного распределения температуры по радиусу положим $\nu(T) = const$, $\alpha_L(T) = const$, а также линейную зависимость модуля Юнга от температуры: $E(T) = a_E + b_E \cdot T \equiv (a_E + b_E \cdot a_T) + b_E \cdot b_T \cdot r$.

Общий интеграл уравнения в перемещениях

Запишем уравнение (4) в виде системы

$$\begin{cases} u'' \cdot E + u' \cdot \frac{E}{r} - u \cdot \frac{E}{r^2} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot E \cdot \frac{d(\alpha_L(T - T_0))}{dr} = f(r), \\ \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \alpha_L(T - T_0) \cdot \frac{dE}{dr} - \left(u' \cdot \frac{dE}{dr} + \frac{u}{r} \cdot \frac{dE}{dr} \cdot \frac{\nu}{1-\nu} \right) = f(r), \end{cases}$$

где $f(r)$ — некоторая неизвестная функция.

Общее решение первого уравнения системы

$$u(r) = \frac{F'}{3} \cdot r^2 + \lambda_1 \cdot r + \frac{\lambda_2}{r} + \frac{1}{r} \cdot \int r \cdot \int \frac{f(r)}{E(r)} dr dr, \quad (6)$$

общее решение второго

$$u(r) = \lambda_3 \cdot r^{-\frac{\nu}{1-\nu}} + r^{-\frac{\nu}{1-\nu}} \cdot \int r^{\frac{\nu}{1-\nu}} \cdot \left(F(r) - \frac{f(r)}{E'(r)} \right) dr, \quad (7)$$

где $F(r) = \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \alpha_L (T - T_0)$, $F' = \frac{dF}{dr} = const$; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — константы интегрирования.

Таким образом, задача нахождения частного решения неоднородного уравнения (4) сводится к указанию подходящей функции $f(r)$, которая обеспечивала бы тождество правых частей выражений (6) и (7) при некоторых частных константах $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Заметим, что такая функция может быть найдена в виде $f(r) = \lambda \cdot E(r)$, где λ — константа, определяющаяся сопоставлением коэффициентов в (6) и (7), конкретно, $\lambda = F' \cdot (1 - 2\nu) / (5 - 4\nu)$.

Частное решение неоднородного уравнения (4) имеет вид

$$u(r) = A_2 \cdot r^2 + A_1 \cdot r, \quad (8)$$

где $A_2 = 2\alpha_L \cdot b_T \cdot \frac{1+\nu}{5-4\nu}$, $A_1 = \alpha_L \cdot (1 + \nu) \cdot \left(a_T - T_0 - \left(\frac{a_E}{b_E} + a_T \right) \cdot \frac{1-2\nu}{5-4\nu} \right)$.

Получим теперь общий интеграл соответствующего (4) однородного уравнения

$$u'' \cdot E + u' \cdot \left(\frac{E}{r} + \frac{dE}{dr} \right) + u \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{dE}{dr} \cdot \frac{\nu}{1-\nu} - \frac{E}{r^2} \right) = 0. \quad (9)$$

Отдельно рассмотрим случай, когда $a_E + b_E \cdot a_T = 0$. Тогда (9) примет вид

$$u'' \cdot r + 2u' - \frac{u}{r} = 0, \quad (10)$$

замена $u(r) = y(r) \cdot r^{\phi_1}$, $\phi_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ переводит уравнение (10) в (11):

$$y'' \cdot r + y' \cdot (\sqrt{5} + 1) = 0. \quad (11)$$

Уравнение (11) интегрируется в элементарных функциях. Общее решение (10) имеет вид

$$u(r) = C_1^{(1)} \cdot r^{-\frac{\sqrt{5}+1}{2}} + C_2^{(1)} \cdot r^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}. \quad (12)$$

Теперь при $a_E + b_E \cdot a_T \neq 0$ обозначим $c = \frac{a_E + b_E \cdot a_T}{b_E \cdot b_T}$ и $k = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \in (0, \frac{3}{2})$. После преобразований (9) примет вид

$$u'' + \frac{u'}{r+c} \cdot \left(2 + \frac{c}{r} \right) - \frac{u}{r} \cdot \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} + \frac{c}{r} \right) = 0. \quad (13)$$

Введем замену $x = |c|/r$, $x > 0$, переводящую (13) в уравнение

$$u'' \cdot x^2 \cdot (x-1) + u' \cdot x \cdot (2-x) + u \cdot (k-x) = 0 \quad \text{при } c < 0, \quad (14)$$

или в уравнение

$$u'' \cdot x^2 \cdot (x + 1) - u' \cdot x \cdot (2 + x) - u \cdot (k + x) = 0 \quad \text{при } c > 0. \quad (15)$$

Уравнение (14) имеет 3 регулярные особые точки 0, 1 и ∞ , следовательно, определенной заменой искомой функции может быть переведено в гипергеометрическое уравнение Эйлера. Необходимое преобразование для (14) есть $u(x) = y(x) \cdot x^{\phi_2}$ при $\phi_2 = \frac{3 + \sqrt{9 + 4k}}{2}$:

$$y'' \cdot x \cdot (x - 1) + y' \cdot \left(x \cdot \left(2 + \sqrt{9 + 4k} \right) - \left(1 + \sqrt{9 + 4k} \right) \right) + y \cdot \left(k + \frac{1 + \sqrt{9 + 4k}}{2} \right) = 0,$$

или

$$y'' \cdot x \cdot (x - 1) + y' \cdot (x \cdot (\alpha + \beta + 1) - \gamma) + \alpha \cdot \beta \cdot y = 0, \quad (16)$$

где $\gamma = 1 + \sqrt{9 + 4k}$, $\beta = \gamma/2 + \sqrt{2}$, $\alpha = \gamma/2 - \sqrt{2}$.

Гипергеометрическое уравнение (16) будем обозначать $H(\alpha, \beta, \gamma; y, x) = 0$ [1]. Указанное выше преобразование переводит (15) в уравнение $H(\alpha, \beta, \gamma; y, -x) = 0$.

Отметим, что ни сами числа α , β , γ , ни какая-либо из их попарных разностей не являются целыми числами, что определяет общий вид решения. Однако $\alpha + \beta = \gamma$, тогда на интервале $x \in (0, 1)$ общее решение уравнения (16) имеет вид [2, 3]

$$y(x) = C_1^{(2)} \cdot {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; x) + C_2^{(2)} \cdot x^{1-\gamma} \cdot {}_2F_1(1 + \alpha - \gamma, 1 + \beta - \gamma, 2 - \gamma; x),$$

здесь и далее ${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n x^n}{(\gamma)_n n!}$, $|x| < 1$ — гипергеометрическая функция Гаусса, $(q)_n = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow n = 0 \\ q(q+1) \dots (q+n-1) & \Leftrightarrow n > 0 \end{cases}$ — символ Похгаммера.

Решение вне интервала $x \in (0, 1)$ может быть получено дробно-линейными преобразованиями.

Так, при $x \in (1, +\infty)$ подстановка $y(x) = x^{-\alpha} \cdot \eta(\zeta)$, $\zeta = 1/x$, $\zeta \in (0, 1)$ переводит (16) в $H(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1; \eta, \zeta) = 0$, общее решение которого имеет вид

$$\eta(\zeta) = C_1^{(3)} \cdot {}_2F_1(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1; \zeta) + C_2^{(3)} \cdot \zeta^{\beta-\alpha} \cdot {}_2F_1(\beta, 1 + \beta - \gamma, 1 - \alpha + \beta; \zeta).$$

При $c > 0$ подстановка $y(x) = (1+x)^{-\alpha} \cdot \eta(\zeta)$, $\zeta = x/(x+1)$, $\zeta \in (0, 1)$ переводит уравнение $H(\alpha, \beta, \gamma; y, -x) = 0$, $x \in (0, +\infty)$ в $H(\alpha, \alpha - \gamma, \gamma; \eta, \zeta) = 0$, общее решение которого $\eta(\zeta) = C_1^{(4)} \cdot {}_2F_1(\alpha, \alpha - \gamma, \gamma; \zeta) + C_2^{(4)} \cdot \zeta^{1-\gamma} \cdot {}_2F_1(1 + \alpha - \gamma, 1 + \alpha - 2\gamma, 2 - \gamma; \zeta)$.

Итак, полное решение уравнения (4) при указанных допущениях:

1) при $b_E \cdot b_T = 0$ имеет вид (5);

2) при $a_E + b_E \cdot a_T = 0$ представляет собой сумму частного неоднородного решения (8) и общего однородного (12);

3) в остальных случаях, когда замена $x = |c|/r$ не теряет смысл, — сумму частного неоднородного решения (8) и общего однородного следующего вида: при

$c < 0, r > -c$

$$u(r) = C_1^{(2)} \cdot \left(-\frac{c}{r}\right)^{1+\gamma/2} \cdot {}_2F_1\left(\alpha, \beta, \gamma; -\frac{c}{r}\right) + C_2^{(2)} \cdot \left(-\frac{c}{r}\right)^{1+\tilde{\gamma}/2} \cdot {}_2F_1\left(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}; -\frac{c}{r}\right),$$

$$\alpha = 1/2 - \sqrt{2} + \sqrt{9+4k}/2, \quad \beta = 1/2 + \sqrt{2} + \sqrt{9+4k}/2, \quad \gamma = 1 + \sqrt{9+4k},$$

$$\tilde{\alpha} = 1/2 - \sqrt{2} - \sqrt{9+4k}/2, \quad \tilde{\beta} = 1/2 + \sqrt{2} - \sqrt{9+4k}/2, \quad \tilde{\gamma} = 1 - \sqrt{9+4k};$$

при $c < 0, r < -c$

$$u(r) = C_1^{(3)} \cdot \left(-\frac{c}{r}\right)^{1+\sqrt{2}} \cdot {}_2F_1\left(\alpha, \beta, \gamma; -\frac{r}{c}\right) + C_2^{(3)} \cdot \left(-\frac{c}{r}\right)^{1-\sqrt{2}} \cdot {}_2F_1\left(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}; -\frac{r}{c}\right),$$

$$\alpha = 1/2 - \sqrt{2} + \sqrt{9+4k}/2, \quad \beta = 1/2 - \sqrt{2} - \sqrt{9+4k}/2, \quad \gamma = 1 - 2\sqrt{2},$$

$$\tilde{\alpha} = 1/2 + \sqrt{2} + \sqrt{9+4k}/2, \quad \tilde{\beta} = 1/2 + \sqrt{2} - \sqrt{9+4k}/2, \quad \tilde{\gamma} = 1 + 2\sqrt{2};$$

при $c > 0$

$$u(r) = C_1^{(4)} \cdot \left(\frac{c}{r}\right)^{1+\gamma/2} \cdot \left(\frac{r}{c+r}\right)^\alpha \cdot {}_2F_1\left(\alpha, \beta, \gamma; \frac{c}{c+r}\right) +$$

$$+ C_2^{(4)} \cdot \left(\frac{c}{r}\right)^{1+\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{c}{c+r}\right)^{\tilde{\alpha}} \cdot {}_2F_1\left(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}; \frac{c}{c+r}\right),$$

$$\alpha = 1/2 - \sqrt{2} + \sqrt{9+4k}/2, \quad \beta = -1/2 - \sqrt{2} - \sqrt{9+4k}/2, \quad \gamma = 1 + \sqrt{9+4k},$$

$$\tilde{\alpha} = 1/2 - \sqrt{2} - \sqrt{9+4k}/2, \quad \tilde{\beta} = -1/2 - \sqrt{2} - \sqrt{9+4k}/2, \quad \tilde{\gamma} = 1 - \sqrt{9+4k}.$$

Здесь, как и ранее, $c = (a_E + b_E \cdot a_T) / (b_E \cdot b_T)$, $k = (1 - 2\nu) / (1 - \nu)$.

По существу, решение исходного уравнения термоупругой задачи в перемещениях было сведено — за исключением рассмотренных частных случаев — к интегрированию неоднородного гипергеометрического уравнения с правой частью определенного вида. Подобные решения для правой части специального вида встречаются в литературе, например, в работе [4], а также в указанных в ней публикациях.

Отметим, что решение термоупругой задачи о деформации полого цилиндра, приведено в [5] для широкого класса коэффициентов и правой части. Однако случай линейного распределения модуля Юнга по радиусу, рассмотренный в данной работе, нельзя описать приведенным в [5] общим интегралом. Кроме того, в [5] на упругий модуль налагается жесткое ограничение $dE/dr < 0$, от которого свободно приведенное выше решение.

Полученный общий интеграл уравнения термоупругого равновесия с коэффициентами в виде функций от r может быть использован для построения решений задач механики слоистых цилиндрических конструкций. В этом случае решения в разных слоях должны сопрягаться, обеспечивая непрерывность перемещений и напряжений на границах слоев посредством подбора констант в выражениях общего интеграла. Отметим, что подобная задача решена в работе [6] для случая постоянных в пределах слоя упругих характеристик материала. В нашем случае определение констант будет, очевидно, технически более сложным. Кроме того, здесь, как и в [6], принципиальным ограничением является отсутствие трения между слоями конструкции, что, конечно, не всегда является хорошим приближением.

Приведенные решения также могут оказаться полезны для приближенного интегрирования уравнений термоупругости в случае более сложного распределения температуры по толщине стенки цилиндра, если кусочно-линейно аппроксимировать профиль температуры и сопрягать решения на интервалах.

Усадка при неравномерном нагреве

Замкнем дифференциальное уравнение (4) граничными условиями $\sigma_{rr}\Big|_{r=r_1} = 0$, $\sigma_{rr}\Big|_{r=r_2} = 0$ и зададимся целью сформулировать условия, налагаемые на коэффициенты уравнения — физические характеристики материала и геометрические характеристики цилиндра, при которых реализуется отрицательное радиальное смещение его внешней границы.

Ограничимся специальным случаем $a_E + b_E \cdot a_T = 0$, когда общий интеграл (4) с учетом $T(r) = a_T + b_T \cdot r$ имеет вид

$$u(r) = A_2 \cdot r^2 + A_1 \cdot r + C_1^{(1)} \cdot r^{-\frac{\sqrt{5}+1}{2}} + C_2^{(1)} \cdot r^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, \quad (17)$$

где $A_2 = \frac{2\alpha_L}{r_1} \cdot \left(T_1 + \frac{a_E}{b_E}\right) \cdot \frac{1+\nu}{5-4\nu}$, $A_1 = -\alpha_L \cdot (1+\nu) \cdot \left(T_0 + \frac{a_E}{b_E}\right)$, здесь $T_1 = T(r_1)$.

Отметим, что устойчивость такого решения относительно изменения коэффициентов исходного уравнения при отклонениях параметра $c = (a_E + b_E \cdot a_T) / (b_E \cdot b_T)$ от нуля непосредственно следует из непрерывности функций коэффициентов уравнения (13) при c , стремящемся к нулю. Иными словами, если будут найдены такие параметры рассматриваемой системы, обеспечивающие в идеальном случае параметр $c = 0$, при которых $u(r_2) < 0$, то мы вправе рассчитывать, что подобное поведение системы сохранится и при некоторых конечных отклонениях параметра c от нуля. Это важный вывод, так как в точности соблюсти равенство $c = 0$ в реальных конструкциях заведомо невозможно.

Из выражений (2), (3), (17) и граничных условий после необходимых преобразований получим следующие значения констант в (17):

$$C_1^{(1)} = \alpha_L \cdot r_1^{1-\phi} \cdot \left(T_1 + \frac{a_E}{b_E}\right) \cdot \frac{1 - k^{\phi+3}}{1 - k^{2\phi+1}} \cdot \frac{(1 - 2\nu) \cdot (1 + \nu)}{(\nu + \phi(1 - \nu)) \cdot (5 - 4\nu)},$$

$$C_2^{(1)} = \alpha_L \cdot r_1^{2+\phi} \cdot \left(T_1 + \frac{a_E}{b_E}\right) \cdot \left(1 - \frac{1 - k^{\phi+3}}{1 - k^{2\phi+1}}\right) \cdot \frac{(1 - 2\nu) \cdot (1 + \nu)}{(\nu - (1 + \phi)(1 - \nu)) \cdot (5 - 4\nu)},$$

где $k = r_2/r_1$, $\phi = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Рассмотрим функцию $\Omega \equiv \frac{u(r_2)}{\alpha_L \cdot r_1} = \Omega\left(\frac{a_E}{b_E}, \nu, T_0; T_1, k\right)$. Здесь группы аргументов a_E/b_E , ν , T_0 — параметры материала, T_1 , k — параметры, однозначно определяющие распределение температуры по радиусу полого цилиндра.

Отметим, что

$$\frac{1 - k^{\phi+3}}{1 - k^{2\phi+1}} \cdot \frac{1}{\nu + \phi(1 - \nu)} > 0, \quad \left(1 - \frac{1 - k^{\phi+3}}{1 - k^{2\phi+1}}\right) \cdot \frac{1}{\nu - (1 + \phi)(1 - \nu)} > 0,$$

$$\frac{1 + \nu}{5 - 4\nu} > 0, \quad \frac{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}{5 - 4\nu} > 0, \quad \nu \in \left(-1, \frac{1}{2}\right), \quad k \in (1, +\infty).$$

Следовательно $\frac{\partial \Omega}{\partial T_1} > 0$; в силу непрерывности Ω по T_1 это означает, что, если отрицательные перемещения внешней границы и реализуются при каком-либо наборе параметров $\left\{\frac{a_E}{b_E}, \nu, T_0, k\right\}$, то наибольшего по модулю своего значения они достигают при наименьшем из возможных в условиях рассматриваемой задачи значении T_1 .

Далее будем рассматривать именно этот предельный случай. Возможны два следующих варианта нагрева.

В первом варианте нагрев происходит с внутренней поверхности ($b_T < 0$). Так как мы условились рассматривать только чистый нагрев конструкции, то есть $T(r) \geq T_0$, $r \in [r_1, r_2]$, то минимально возможным значением T_1 будет то, которое обеспечивает температуру внешней стенки, совпадающую с начальной температурой в ненапряженном состоянии: $T_2 = -\frac{a_E}{b_E} + \left(T_1 + \frac{a_E}{b_E}\right) \cdot k = T_0$, откуда $T_1 = \frac{1}{k} \cdot \left(T_0 + \frac{a_E}{b_E}\right) - \frac{a_E}{b_E}$, что с необходимостью влечет за собой $T_0 + \frac{a_E}{b_E} < 0$, т. к. $k > 1$. Отметим, что для любого известного материала при нормальных физических условиях это означает $b_E < 0$, т. е. с ростом температуры модуль Юнга материала должен снижаться.

В этом случае

$$\Omega\left(\frac{a_E}{b_E}, \nu, T_0; \frac{1}{k} \cdot \left(T_0 + \frac{a_E}{b_E}\right) - \frac{a_E}{b_E}, k\right) = \frac{(1 - \nu^2)(T_0 + \frac{a_E}{b_E})}{(k^{\sqrt{5}} - 1)(\nu^2 + \nu - 1)} \cdot \Sigma_1(\nu, k),$$

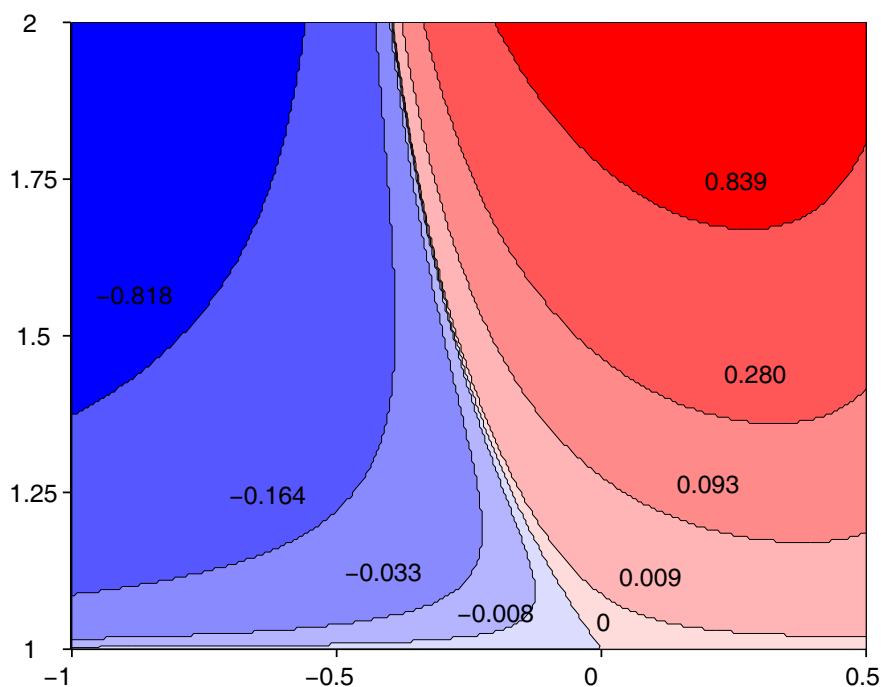
$$\Sigma_1(\nu, k) = \sqrt{5} \cdot k^{\frac{\sqrt{5}-3}{2}} - k \cdot \left(\nu + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + k^{\sqrt{5}+1} \cdot \left(\nu - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) +$$

$$+ \frac{2\sqrt{5} \cdot k}{5 - 4\nu} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \nu + k^{\sqrt{5}} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \nu\right) - (2 - \nu) \cdot k^{\frac{\sqrt{5}-5}{2}}\right),$$

и очевидно, что знак функции перемещений внешней границы совпадает со знаком функции $\Sigma_1(\nu, k)$ (рис. 1).

Необходимо отметить, что для отрицательных смещений внешней границы полого цилиндра в рамках указанных допущений при нагреве с внутренней поверхности необходимо, чтобы его материал относился к классу ауксетиков, т. е. имел отрицательный коэффициент Пуассона.

Во втором варианте нагрев происходит с внешней поверхности ($b_T > 0$). При этом минимально возможным значением T_1 будет $T_1 = T_0$, температура внешней стенки $T_2 = -\frac{a_E}{b_E} + \left(T_0 + \frac{a_E}{b_E}\right) \cdot k$, откуда $T_0 + \frac{a_E}{b_E} > 0$. Аналогично предыдущему случаю это означает $b_E > 0$ для любого известного материала, т. е. с ростом температуры модуль Юнга материала должен повышаться.

Рис. 1. Изолинии поверхности $\Sigma_1(\nu, k)$.

В этом случае

$$\Omega\left(\frac{a_E}{b_E}, \nu, T_0; T_0, k\right) = \frac{(1 - \nu^2) \left(T_0 + \frac{a_E}{b_E}\right)}{(k\sqrt{5} - 1)(\nu^2 + \nu - 1)} \cdot \Sigma_2(\nu, k),$$

$$\Sigma_2(\nu, k) = \sqrt{5} \cdot k^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} - k \cdot \left(\nu + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + k^{\sqrt{5}+1} \cdot \left(\nu - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) +$$

$$+ \frac{2\sqrt{5} \cdot k^2}{5 - 4\nu} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \nu + k^{\sqrt{5}} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \nu\right) - (2 - \nu) \cdot k^{\frac{\sqrt{5}-5}{2}}\right) -$$

$$- k \cdot \frac{k-1}{2} \cdot \left(\frac{1-3\nu}{1-\nu} \cdot (k\sqrt{5} - 1) + \sqrt{5} \cdot (k\sqrt{5} + 1)\right),$$

и знак функции перемещений внешней границы оказывается противоположен знаку функции $\Sigma_2(\nu, k)$ (рис. 2). Как видно из графика изолиний поверхности $\Sigma_2(\nu, k)$, материал должен иметь положительный коэффициент Пуассона.

Физически реализуемый пример конструкции

Для случая нагрева с внешней стороны удастся привести реальные параметры, при которых происходит усадка цилиндра.

Итак, пусть полый цилиндр выполнен из безводного кварцевого стекла КВ, имеющего следующие характеристики: $\nu = 0.17$, $E(T) = 73.7 + 12 \cdot 10^{-3} \cdot T$ ГПа,

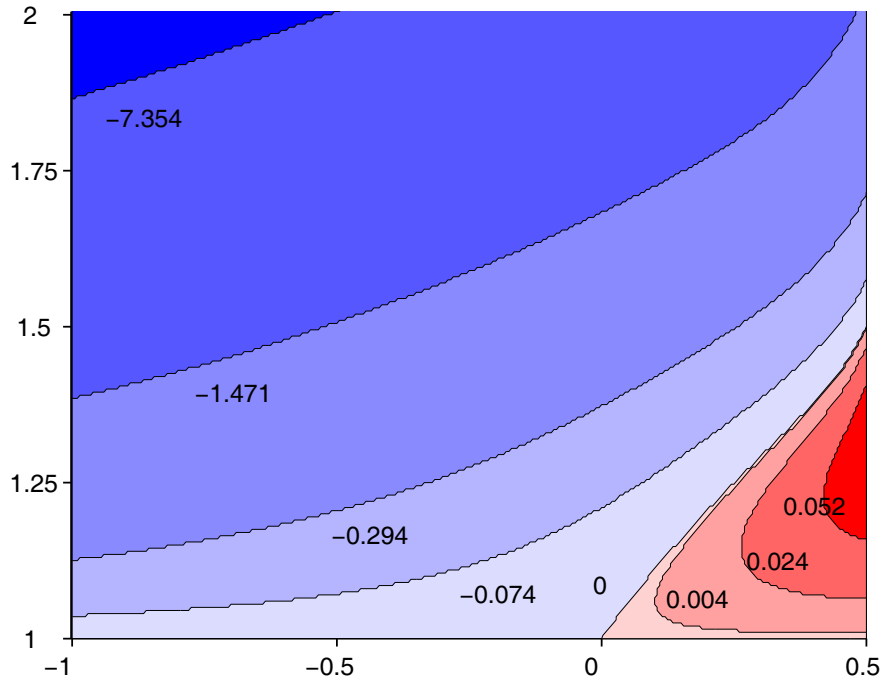


Рис. 2. Изолинии поверхности $\Sigma_2(\nu, k)$.

$\alpha_L = 0.54 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Исследования упругих свойств показывают, что температурную зависимость модуля Юнга этого материала можно считать линейной (см., например, [7], а также приведенные там ссылки). Параметры стационарного нагрева: $T_1 = T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_2 = 520 \text{ }^\circ\text{C}$. Тогда из ограничений однозначно определяется параметр $k = r_2/r_1 = 1.0825$, $\Sigma_2(\nu, k) = 0.0105 > 0$; положим $r_1 = 0.1 \text{ м}$.

На рис. 3 сплошными линиями приведены радиальные перемещения u и напряжения σ_{rr} , $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz} , полученные после решения термупругой задачи (4) при свободных границах с оговоренными ограничениями на коэффициенты. Штриховыми линиями на рисунках приведены значения величин, которые получаются для той же конструкции при том же нагреве, но без учета зависимости модуля Юнга от температуры по решению (5). В расчетах по формуле (5) принято среднее значение $E = 77 \text{ ГПа}$. Таким образом, учет зависимости модуля Юнга от температуры, несмотря на относительно малый коэффициент b_E , приводит к заметным качественным изменениям в решении термоупругой задачи. В частности, при определении такого параметра напряженного состояния, как интенсивность касательных напряжений (рис. 4).

Эффект уменьшения внешнего радиуса полого цилиндра при неравномерном нагреве со стороны внешней поверхности может быть использован в некоторых технических системах. Например, при изготовлении многоразовых литейных стрелок, когда остро стоит вопрос об их извлечении из тела отливки после ее затвердевания, или в технологиях упрочнения стекла в металлических обоймах [8].

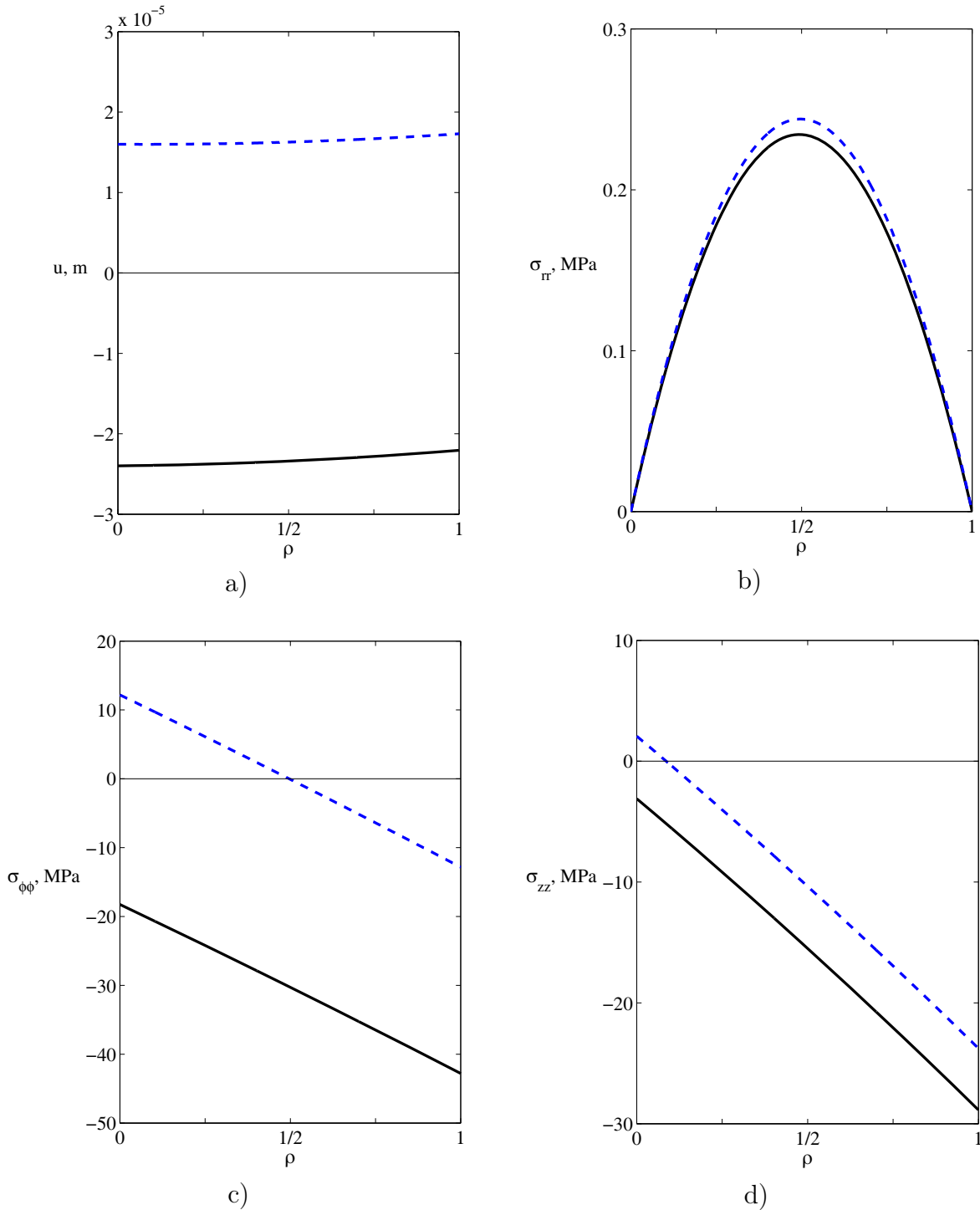


Рис. 3. Результаты расчета, $\rho = (r - r_1)/(r_2 - r_1)$ — безразмерная радиальная координата: а) радиальные перемещения u , б) напряжения σ_{rr} , в) напряжения $\sigma_{\phi\phi}$, д) напряжения σ_{zz} .

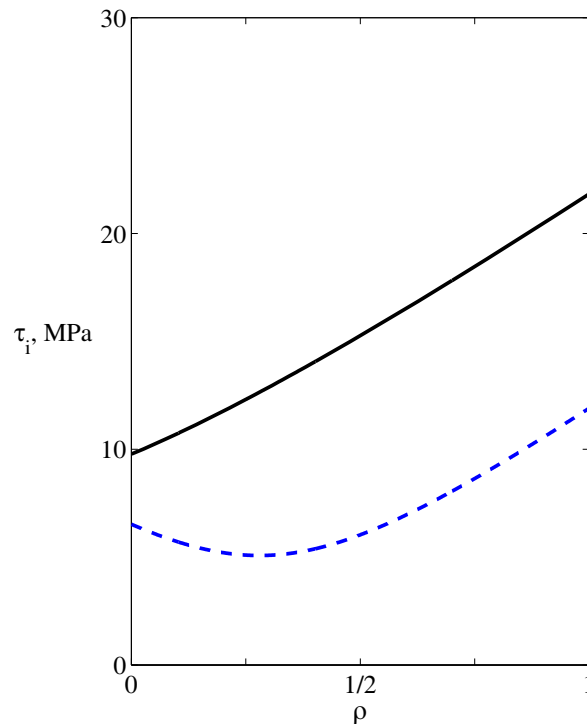


Рис. 4. Интенсивность касательных напряжений τ_i .

Некоторые замечания

Полученные выше решения, как уже отмечалось, справедливы при постоянном коэффициенте Пуассона. Вместе с тем, это допущение не всегда согласуется с экспериментальными данными (например, [9] и приведенные там источники). Для многих материалов физически более правильным было бы при линейной зависимости модуля Юнга от температуры постулировать постоянным модуль объемной упругости $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$. Однако в этом случае уравнение термоупругого равновесия в перемещениях, имеющее вид

$$u'' + \frac{u'}{r} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{6KE' \cdot r}{(9K - E)(3K + E)} \right) - \frac{u}{r^2} \cdot \left(1 + \frac{6KE' \cdot r}{(9K - E)(3K + E)} \right) = \alpha_L T' \cdot \frac{9K - E}{3K + E}, \quad (18)$$

обладает свойствами, отличающимися от свойств (4).

Соответствующее (18) однородное уравнение, в отличие от (9), имеет четыре регулярные особые точки: $r = 0$, $\frac{9K - a_E}{b_E}$, $-\frac{3K + a_E}{b_E}$, ∞ , а значит, может быть переведено в уравнение Гойна (К. Heun) [10, 11, 12], полное решение которого содержит одноименную специальную функцию.

В предыдущем случае путем выбора частных значений параметров процесса, дающих $a_E + b_E \cdot a_T = 0$, можно было привести уравнение (9) к уравнению только с двумя регулярными особыми точками (10), решение которого имеет вид конечной

комбинации элементарных функций. В случае, когда $\nu(T) \neq const$, число регулярных особых точек соответствующего (18) однородного уравнения также может быть уменьшено, но только до трех (при $b_E \neq 0$), если наложить на параметры процесса дополнительные условия $a_E = 9K$ или $a_E = -3K$. Эти условия переводят (18) в уравнения гипергеометрического типа, коэффициенты которых не позволяют представить решение в элементарном виде: при $a_E = 9K$

$$x = -r \cdot b_E / (12K), u = f \cdot x^{\chi_1}, \chi_1 = (\sqrt{3} + 1) / 2; H(\chi_1 - 1, \chi_1 + 1, 2\chi_1; f, x) = 0;$$

при $a_E = -3K$

$$x = r \cdot b_E / (12K), u = f \cdot x^{\chi_2}, \chi_2 = (\sqrt{7} - 1) / 2; H(\chi_2 - 1, \chi_2 + 1, 2(\chi_2 + 1); f, x) = 0.$$

Следовательно, при непостоянном коэффициенте Пуассона уже не удастся получить простые аналитические условия отрицательных радиальных перемещений внешней боковой поверхности полого цилиндра. Впрочем, результаты, полученные в численном примере, остаются верными: коэффициент Пуассона безводного кварцевого стекла по экспериментальным данным постоянен вплоть до температуры $T = 0.85 \cdot T_g \approx 1000$ °С, где T_g – температура стеклования, и далее меняется крайне незначительно (см. подробный обзор в [13]).

Список литературы

- [1] Э. Камкэ, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, ФИЗМАТГИЗ, М., 1961.
- [2] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, Наука, М., 1965.
- [3] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications, New York, 1972.
- [4] А. А. Андреев, А. А. Килбас, “О некоторых ассоциированных гипергеометрических функциях”, *Известия ВУЗов. Математика*, **271**:12 (1984), 3–12.
- [5] А. Д. Коваленко, *Основы термоупругости*, Наукова думка, Киев, 1970.
- [6] В. А. Кудинов, А. В. Ерёмин, Е. В. Котова, “Получение точных аналитических решений задач термоупругости для многослойных цилиндрических конструкций”, *Вестник СамГТУ. Серия "Физико-математические науки"*, **27**:2 (2012), 188–191.
- [7] Б. С. Лунин, С. Н. Торбин, “О температурной зависимости модуля Юнга чистых кварцевых стекол”, *Вестник Московского университета. Серия 2. Химия*, **41**:3 (2000), 172–173.
- [8] О. Н. Любимова, Е. А. Гридасова, К. Н. Пестов, “К вопросу упрочнения стекла методом диффузионной сварки с металлом”, *Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния*, **8**:2 (2010), 318–325.
- [9] Л. Б. Потапова, В. П. Ярцев, *Механика материалов при сложном напряженном состоянии. Как прогнозируют предельные напряжения?*, Издательство Машиностроение-1, М., 2005.
- [10] В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, М., 1995.
- [11] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, *Курс современного анализа*, ФИЗМАТГИЗ, М., 1963.
- [12] R. S. Maier, “The 192 solutions of the Heun equation”, *Mathematics of Computation*, **76**:258 (2007), 811–843.

- [13] G. N. Greaves, A. L. Greer, R. S. Lakes, T. Rouxel, “Poisson’s ratio and modern materials”, *Nature Materials*, **986**:10 (2011), 823–837.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 01 марта 2014 г.

Sevastyanov G. M. Shrinkage of the hollow cylinder during heating. Far Eastern Mathematical Journal. 2015. V. 15. № 2. P. 264–276.

ABSTRACT

Shrinkage of the outer surface of a hollow cylinder of a material with a positive coefficient of linear thermal expansion on heating can’t be realized in the model of Duhamel – Neumann’s thermoelasticity with constant elastic moduli. But it turns out that if elastic moduli are temperature dependent with uneven heating negative radial displacement of the outer cylindrical surface is possible. In this paper the exact analytical integration of the differential equations of thermoelastic equilibrium (Lame) for the long hollow cylinder, which is in under plane strain conditions, under certain restrictions on the coefficients and the right part, are carried out. Conditions for shrinkage on heating of cylinder and physically realizable example of such cylinder are given.

Key words: Duhamel – Neumann’s thermoelasticity, Euler’s hypergeometric differential equation, nonconstant elastic moduli, Heun’s differential equation.