Дальневосточный математический журнал. 2015. Том 15. № 2. С. 288–298

УДК 517.15, 517.588
MSC2010 33C05, 34E05

© Д. А. Фроленков[1]

Равномерные асимптотические формулы для гипергеометрической функции

Получена новая равномерная по параметрам асимптотическая формула для гипергеометрической функции.

Ключевые слова: *гипергеометрическая функция, интеграл Меллина–Барнса.*

1. Введение

Во многих задачах аналитической теории чисел (см. [2], [3] и [4]) в остаточных членах асимптотических формул возникают гипергеометрические функции

$$F(a,b,c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)}\frac{z^n}{\Gamma(n+1)}, \tag{1}$$

где $\Gamma(s)$ — гамма функция Эйлера. Их появление обусловлено применением формул Вороного и Кузнецова. Довольно часто возникает необходимость использования равномерных по a,b,c оценок на гипергеометрическую функцию. Особую сложность представляет случай комплексных параметров с растущими действительной и мнимой частью. В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Пусть $S_{2k}(N)$ — линейное комплексное пространство голоморфных параболических форм веса $2k$ относительно конгруэнц-подгруппы $\Gamma_0(N)$. Обозначим через $O_{2k}(N)$ ортонормированный базис этого пространства относительно скалярного произведения Петерсона. Каждая форма f из $S_{2k}(N)$ раскладывается в ряд Фурье

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\rho_f(n)e(nz),$$

где $e(x)=\exp(2\pi ix)$. Известно, что пространство $S_{2k}(N)$ распадается на подпространства новых и старых форм

$$S_{2k}(N)=S_{2k}^{new}(N)\oplus S_{2k}^{old}(N).$$

[1]Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, 119991, г. Москва, ул. Губкина, 8, НИУ ВШЭ . Электронная почта: `frolenkov@mi.ras.ru`

Обозначим через $H_{2k}^{*}(N)$ ортогональный базис пространства $S_{2k}^{new}(N)$. Определим L-ряд ассоциированный с f, следующим образом:

$$L_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_f(n)}{n^{s+k-1/2}}.$$

Положим

$$W_{2k}(N;t) = \log N + 2\gamma - 2\log(2\pi) + \frac{\Gamma'(k+it)}{\Gamma(k+it)} + \frac{\Gamma'(k-it)}{\Gamma(k-it)},$$

$$U_{2k}(N;t) = \frac{\zeta(1+2it)}{(2\pi)^{2it}} \frac{\Gamma(k+it)}{\Gamma(k-it)} + \frac{\zeta(1-2it)}{(2\pi)^{-2it}} \frac{\Gamma(k-it)}{\Gamma(k+it)},$$

$$G_k(t;x) = \frac{\Gamma(k+it)\Gamma(k-it)}{\Gamma(2k)} F(k+it, k-it; 2k; x), \tag{2}$$

$$\tau_s(n) = \sum_{n_1 n_2 = n} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^s$$

и обозначим через $\delta_{m,n}$ символ Кронекера, равный 1 при $m = n$ и 0 — в остальных случаях. В статье [2] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Для любого натурального $k \geqslant 2$ и действительного $t \geqslant 0$*

$$\frac{\Gamma(2k-1)}{(4\pi)^{2k-1}} \sum_{f \in O_{2k}(N)} \left| L_f\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 = W_{2k}(N;t) + (-1)^k \delta_{1,N} U_{2k}(N;t) +$$
$$+2 \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\tau_0(d)\tau_{it}(dN+1)}{(dN+1)^k} G_k(t;(dN+1)^{-1}) +$$
$$+2(-1)^k \cosh(\pi t) \sum_{d=1+\delta_{1,N}}^{\infty} \frac{\tau_0(d)\tau_{it}(dN-1)}{(dN-1)^k} G_k(t;-(dN-1)^{-1}).$$

Кроме того, в работе [2] для $x > 0$ и вещественного t были получены следующие оценки:

$$|G_k(t;x)| \ll 2^{-k} \quad \text{если} \quad x \leqslant 1/2,$$

$$\cosh(\pi t)|G_k(t;-x)| \ll \frac{\sqrt{x}}{x^k},$$

$$\cosh(\pi t)|G_k(t;-x)| \ll \frac{\sqrt{x}}{kx^k}, \quad \text{если} \quad x \leqslant 1,\ 4t\sqrt{x} \leqslant 2k-1,$$

$$\cosh(\pi t)|G_k(t;-x)| \ll \frac{|\Gamma(k+it)|^2}{\Gamma(2k)} \frac{2^{2k}\cosh(\pi t)}{1 - x(1+t)^2} \ll \frac{(1+t)^{2k-1}}{\sqrt{k}} \frac{1}{1 - x(1+t)^2}, \tag{3}$$

если $(1+t)\sqrt{x} < 1$. Целью данной работы является получение равномерной по k и t асимптотической формулы для функции $G_k(t;-x)$.

Теорема 2. *Для любого натурального k и действительных t и $x > 0$*

$$G_k(t;-x) = \frac{|\Gamma(k+it)|^2}{\Gamma(2k)}\left(1 + O\left(\frac{k+t}{\sqrt{k}}\sqrt{x}\right)\right). \tag{4}$$

Пусть p простое, $q = p^\nu$ и $\nu \geqslant 2$. Теорема 2 применяется в работе [1] для вычисления асимптотики

$$\frac{\Gamma(2k-1)}{(4\pi)^{2k-1}} \sum_{f\in H^*_{2k}(q)} \frac{a_f(l)}{l^{k-1/2}} \left|L_f(\frac{1}{2}+it)\right|^2. \tag{5}$$

Заметим, что использование теоремы 2 вместо оценки (3) позволило доказать нетривиальную асимптотическую формулу для (5) при существенно больших значениях параметра l. Увеличение величины l приводит к улучшению нижней оценки для пропорции необнуляемых L функций на критической прямой.

2. Сведение задачи к оценке интегралов

Отметим, что, используя неравенства [5, ф. 5.6.6, ф.5.6.7]

$$\frac{\Gamma(x)}{\sqrt{\cosh(\pi y)}} \leqslant |\Gamma(x+iy)| \leqslant \Gamma(x),$$

а также формулы (1) и (2), можно свести случай $|t| \leqslant 1$ к случаю $t = 0$. Поэтому далее считаем $t > 1$.

Доказательство теоремы 2 базируется на интегральном представлении Меллина–Барнса [5, ф. 15.6.6] гипергеометрической функции

$$G_k(t;-x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(c)} \frac{\Gamma(k+it+s)\Gamma(k-it+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(2k+s)} x^s ds,$$

где интегрирование ведется по вертикальной оси $\Re s = c,\ -k < c < 0$. Сдвигая контур на прямую $\Re s = 1/2$, мы пройдем полюс в точке $s = 0$ и получим

$$G_k(t;-x) = \frac{|\Gamma(k+it)|^2}{\Gamma(2k)} +$$
$$+O\left(\sqrt{x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Gamma(k+\frac{1}{2}+i(r+t))\Gamma(k+\frac{1}{2}+i(r-t))\Gamma(-\frac{1}{2}-ir)|}{|\Gamma(2k+\frac{1}{2}+ir)|} dr\right). \tag{6}$$

Обозначим интеграл в (6) через I. Используя соотношения

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \text{и} \quad |\Gamma(1/2+iy)|^2 = \frac{\pi}{\cosh(\pi y)}$$

— см. [5, ф. 5.4.4, ф.5.5.1], находим

$$I \ll \int_0^\infty \frac{\sqrt{P^-P^+}}{\sqrt{P}} \frac{dr}{\sqrt{\cosh(2\pi r)+\cosh(2\pi t)}\sqrt{1/4+r^2}}, \tag{7}$$

где

$$P^\pm = \prod_{n=0}^{k-1}\left((n+1/2)^2+(r\pm t)^2\right), \qquad P = \prod_{n=0}^{2k-1}\left((n+1/2)^2+r^2\right).$$

Обозначим целую часть числа y через $[y]$ и положим

$$a = \left[|r-t|-\frac{1}{2}\right], \qquad b = \left[|r+t|-\frac{1}{2}\right], \qquad c = \left[|r|-\frac{1}{2}\right].$$

Тогда

$$P^- = P_1^-P_2^-R_1^-R_2^-, \qquad \text{где}$$

$$P_1^- = \prod_{n=0}^{a}(r-t)^2 = (r-t)^{2a+2}, \qquad P_2^- = \prod_{n=a+1}^{k-1}(n+1/2)^2 = \frac{\Gamma^2(k+1/2)}{\Gamma^2(a+3/2)},$$

$$R_1^- = \prod_{n=0}^{a}\left(1+\frac{(n+1/2)^2}{(r-t)^2}\right), \qquad R_2^- = \prod_{n=a+1}^{k-1}\left(1+\frac{(r-t)^2}{(n+1/2)^2}\right). \tag{8}$$

Аналогичные разложения справедливы и для P^+, P:

$$P^+ = P_1^+P_2^+R_1^+R_2^+, \qquad P = P_3P_4R_3R_4.$$

Заметим, что при $0 \leqslant a < k-1$

$$P_1^-P_2^- = (r-t)^{2a+2}\frac{\Gamma^2(k+1/2)}{\Gamma^2(a+3/2)} \asymp \Gamma^2(k+1/2)e^{2a}. \tag{9}$$

Обозначим

$$g_1(z) = \int_0^z \log(1+x^2)\frac{dx}{x^2} = 2\arctan z - \frac{\log(1+z^2)}{z},$$

$$g_2(z) = \int_0^z \log(1+x^2)dx = z\log(1+z^2) - 2z + 2\arctan z.$$

Из определения функций $g_{1,2}(z)$ сразу следует

$$g_1(z)+zg_1'(z) = 2\arctan z, \quad g_2(z)-zg_2'(z) = 2\arctan z - 2z. \tag{10}$$

Логарифмируя $R_1^-R_2^-$ и $R_1^+R_2^+$, применяя формулу суммирования Эйлера – Маклорена и учитывая соотношение $g_1(1)+g_2(1) = \pi-2$, получаем следующие леммы.

Лемма 1. *Положим* $y^{\pm} = |r \pm t|$ *и* $\kappa = k - 1/2$, *тогда*

$$R_1^{\pm} R_2^{\pm} \asymp \begin{cases} e^{y^{\pm}(\pi - 2 - g_1(y^{\pm}/\kappa))}, & \text{если } 0 \leqslant y^{\pm} \leqslant \kappa, \\ e^{y^{\pm} g_2(\kappa/y^{\pm}))}, & \text{если } \kappa < y^{\pm}. \end{cases} \tag{11}$$

Лемма 2. *Положим* $y = |r|$ *и* $\kappa = 2k - 1/2$, *тогда*

$$R_3 R_4 \asymp \begin{cases} e^{y(\pi - 2 - g_1(y/\kappa))}, & \text{если } 0 \leqslant y \leqslant \kappa, \\ e^{y g_2(\kappa/y))}, & \text{если } \kappa < y. \end{cases} \tag{12}$$

3. Разбиение интегралов

Следующим шагом в доказательстве теоремы 2 является разбиение интеграла из (7) в зависимости от значений t и k. Сначала оценим интеграл

$$I_0 = \int\limits_0^{1/2} \frac{|\Gamma(k + \frac{1}{2} + i(r+t))\Gamma(k + \frac{1}{2} + i(r-t))\Gamma(-\frac{1}{2} - ir)|}{|\Gamma(2k + \frac{1}{2} + ir)|} dr \ll \frac{\left|\Gamma(k + \frac{1}{2} + it)\right|^2}{\left|\Gamma(2k + \frac{1}{2})\right|}.$$

Используя (9) и (12), получаем

$$I_0 \ll \frac{1}{\cosh(\pi t)\Gamma(2k + 1/2)} \begin{cases} \Gamma^2(k + 1/2) e^{2t} e^{t(\pi - 2 - g_1(t/(k-1/2)))}, & t \leqslant k - 1/2; \\ t^{2k} e^{t g_2((k-1/2)/t))}, & k - 1/2 < t. \end{cases} \tag{13}$$

Таким образом, нам остается оценить интеграл

$$I_{1/2} = \int\limits_{1/2}^{\infty} \frac{\sqrt{P^- P^+}}{\sqrt{P}} \frac{dr}{r\sqrt{\cosh(2\pi r) + \cosh(2\pi t)}}.$$

Чтобы применить разбиения (8), необходимо рассмотреть отдельно случаи

$$a < 0, \qquad 0 \leqslant a < k - 1, \qquad k - 1 \leqslant a.$$

При разбиении $I_{1/2}$ мы не будем каждый раз писать подынтегральную функцию для сокращения записи . Вместо этого мы будем указывать, равны ли $P_1^{\pm}$, $P_2^{\pm}$, P_3, P_4 единице. Обозначим

$$\mathfrak{a} = \begin{cases} 0, & \text{если } P_{1,2}^- \neq 1, \\ 1, & \text{если } P_1^- = 1, \\ 2, & \text{если } P_2^- = 1. \end{cases} \qquad \mathfrak{b} = \begin{cases} 0, & \text{если } P_{1,2}^+ \neq 1, \\ 1, & \text{если } P_1^+ = 1, \\ 2, & \text{если } P_2^+ = 1. \end{cases} \qquad \mathfrak{c} = \begin{cases} 0, & \text{если } P_{3,4} \neq 1, \\ 2, & \text{если } P_4 = 1. \end{cases} \tag{14}$$

А вместо записи $\mathfrak{a} = *$, $\mathfrak{b} = \star$, $\mathfrak{c} = \diamond$ будем в интеграле писать три числа $(*, \star, \diamond)$. Сначала разбиваем область интегрирования на подобласти

$$|r - t| < 1/2, \qquad 1/2 \leqslant |r - t| < k - 1/2, \qquad k - 1/2 \leqslant |r - t|,$$

возникающие для P^-. Затем разбиваем область интегрирования на подобласти

$$r+t<k-1/2, \qquad k-1/2\leqslant r+t,$$

возникающие для P^+. В конце разбиваем область интегрирования на подобласти

$$r<2k-1/2, \qquad 2k-1/2\leqslant r,$$

возникающие для P. В итоге получаем следующие разбиения в зависимости от значений t и k. Если $t>3k-1$, то

$$\begin{gathered}I_{1/2}=\int\limits_{1/2}^{2k-1/2}(2,2,0)+\int\limits_{2k-1/2}^{t-k+1/2}(2,2,2)+\int\limits_{t-k+1/2}^{t-1/2}(0,2,2)+\int\limits_{t-1/2}^{t+1/2}(1,2,2)+\\+\int\limits_{t+1/2}^{t+k-1/2}(0,2,2)+\int\limits_{t+k-1/2}^{\infty}(2,2,2)=\sum_{j=1}^{6}I_{1,j}.\end{gathered}\tag{15}$$

Если $2k<t\leqslant 3k-1$, то

$$\begin{gathered}I_{1/2}=\int\limits_{1/2}^{t-k+1/2}(2,2,0)+\int\limits_{t-k+1/2}^{2k-1/2}(0,2,0)+\int\limits_{2k-1/2}^{t-1/2}(0,2,2)+\int\limits_{t-1/2}^{t+1/2}(1,2,2)+\\+\int\limits_{t+1/2}^{t+k-1/2}(0,2,2)+\int\limits_{t+k-1/2}^{\infty}(2,2,2)=\sum_{j=1}^{6}I_{2,j}.\end{gathered}\tag{16}$$

Если $2k-1<t\leqslant 2k$, то

$$\begin{gathered}I_{1/2}=\int\limits_{1/2}^{t-k+1/2}(2,2,0)+\int\limits_{t-k+1/2}^{t-1/2}(0,2,0)+\int\limits_{t-1/2}^{2k-1/2}(1,2,0)+\int\limits_{2k-1/2}^{t+1/2}(1,2,2)+\\+\int\limits_{t+1/2}^{t+k-1/2}(0,2,2)+\int\limits_{t+k-1/2}^{\infty}(2,2,2)=\sum_{j=1}^{6}I_{3,j}.\end{gathered}\tag{17}$$

Если $k<t\leqslant 2k-1$, то

$$\begin{gathered}I_{1/2}=\int\limits_{1/2}^{t-k+1/2}(2,2,0)+\int\limits_{t-k+1/2}^{t-1/2}(0,2,0)+\int\limits_{t-1/2}^{t+1/2}(1,2,0)+\int\limits_{t+1/2}^{2k-1/2}(0,2,0)+\\+\int\limits_{2k-1/2}^{t+k-1/2}(0,2,2)+\int\limits_{t+k-1/2}^{\infty}(2,2,2)=\sum_{j=1}^{6}I_{4,j}.\end{gathered}\tag{18}$$

Если $k-1<t\leqslant k$, то

$$\begin{gathered}I_{1/2}=\int\limits_{1/2}^{t-1/2}(0,2,0)+\int\limits_{t-1/2}^{t+1/2}(1,2,0)+\int\limits_{t+1/2}^{t+k-1/2}(0,2,0)+\\ +\int\limits_{t+k-1/2}^{2k-1/2}(2,2,0)+\int\limits_{2k-1/2}^{\infty}(2,2,2)=\sum_{j=1}^{5}I_{5,j}.\end{gathered}\tag{19}$$

Если $k/2<t\leqslant k-1$, то

$$\begin{gathered}I_{1/2}=\int\limits_{1/2}^{k-t-1/2}(0,0,0)+\int\limits_{k-t-1/2}^{t-1/2}(0,2,0)+\int\limits_{t-1/2}^{t+1/2}(1,2,0)+\int\limits_{t+1/2}^{t+k-1/2}(0,2,0)+\\ +\int\limits_{t+k-1/2}^{2k-1/2}(2,2,0)+\int\limits_{2k-1/2}^{\infty}(2,2,2)=\sum_{j=1}^{6}I_{6,j}.\end{gathered}\tag{20}$$

Если $(k-1)/2<t\leqslant k/2$, то

$$\begin{gathered}I_{1/2}=\int\limits_{1/2}^{t-1/2}(0,0,0)+\int\limits_{t-1/2}^{k-t-1/2}(1,0,0)+\int\limits_{k-t-1/2}^{t+1/2}(1,2,0)+\int\limits_{t+1/2}^{t+k-1/2}(0,2,0)+\\ +\int\limits_{t+k-1/2}^{2k-1/2}(2,2,0)+\int\limits_{2k-1/2}^{\infty}(2,2,2)=\sum_{j=1}^{6}I_{7,j}.\end{gathered}\tag{21}$$

Если $1<t\leqslant (k-1)/2$, то

$$\begin{gathered}I_{1/2}=\int\limits_{1/2}^{t-1/2}(0,0,0)+\int\limits_{t-1/2}^{t+1/2}(1,0,0)+\int\limits_{t+1/2}^{k-t-1/2}(0,0,0)+\int\limits_{k-t-1/2}^{t+k-1/2}(0,2,0)+\\ +\int\limits_{t+k-1/2}^{2k-1/2}(2,2,0)+\int\limits_{2k-1/2}^{\infty}(2,2,2)=\sum_{j=1}^{6}I_{8,j}.\end{gathered}\tag{22}$$

4. Оценки интегралов

В дальнейших вычислениях ключевую роль играет следующее утверждение

Лемма 3. *Если $h(x)$ непрерывно дифференцируема и монотонна на отрезке $[x_1,x_2]$, то*

$$\left|\int\limits_{x_1}^{x_2}e^{h(x)}dx\right|\ll\frac{\max\left(e^{h(x_1)},\ e^{h(x_2)}\right)}{\min\limits_{x\in[x_1,x_2]}|h'(x)|}.$$

Введем обозначения для аргументов функций $g_{1,2}(z)$ из лемм 1 и 2:

$$\theta_1 = \frac{k}{|r-t|}, \quad \theta_2 = \frac{k}{|r+t|}, \quad \theta_3 = \frac{2k}{r}, \quad \vartheta_1 = \theta_1^{-1}, \quad \vartheta_2 = \theta_2^{-1}, \quad \vartheta_3 = \theta_3^{-1}.$$

Отметим, что мы заменили $(k-1/2)$ на k. Такая замена даст погрешность $O(1)$. Для демонстрации метода мы оценим интегралы из формулы (15). Остальные семь случаев доказываются аналогично.

Оценим $I_{1,1}$. Из (3), (14), (15), (8) и (12) следует, что

$$I_{1,1} \ll \frac{1}{\cosh(\pi t)\Gamma(2k+1/2)} \int\limits_{1/2}^{2k-1/2} (t-r)^k (t+r)^k P(r) \frac{dr}{re^r},$$
$$P^2(r) = e^{(t-r)g_2(\theta_1)+(t+r)g_2(\theta_2)-r(\pi-2-g_1(\vartheta_3))}.$$

Чтобы применить лемму 3, запишем оценку для $I_{1,1}$ в виде

$$I_{1,1} \ll \frac{1}{\cosh(\pi t)\Gamma(2k+1/2)} \int\limits_{1/2}^{2k-1/2} e^{f_{1,1}(r)} dr,$$
$$f_{1,1}(r) = k\log(t-r) + k\log(t+r) - \log r - r + \log P(r).$$

Используя (10), находим

$$f'_{1,1}(r) = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{r} - \arctan\theta_1 + \arctan\theta_2 + \arctan\vartheta_3 <$$
$$< -\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{1}{3} + \arctan 1 < 0.$$

Применяя лемму 3 и используя неравенство (13), получаем

$$I_{1,1} \ll \frac{e^{f_{1,1}(1/2)}}{\cosh(\pi t)\Gamma(2k+1/2)} \ll \frac{t^{2k}}{\cosh(\pi t)\Gamma(2k+1/2)} e^{tg_2(k/t)} \ll I_0.$$

Мы хотим доказать, что $I_{1,j} \leqslant I_{1,j-1}$. Заметим, что для этого достаточно показать, что $f'_{1,j}(r) < 0$ и $|f'_{1,j}(r)| \gg 1$.

Оценим $I_{1,2}$. Из (3), (14),(15), (8) и (12) следует, что

$$I_{1,2} \ll \frac{1}{\cosh(\pi t)} \int\limits_{2k-1/2}^{t-k+1/2} (t-r)^k (t+r)^k P(r) \frac{dr}{r^{2k+1}} = \frac{1}{\cosh(\pi t)} \int\limits_{2k-1/2}^{t-k+1/2} e^{f_{1,2}(r)} dr,$$

где

$$P^2(r) = e^{(t-r)g_2(\theta_1)+(t+r)g_2(\theta_2)-rg_2(\theta_3)},$$
$$f_{1,2}(r) = k\log(t-r) + k\log(t+r) - (2k+1)\log r + \log P(r).$$

Используя (10), получаем

$$f'_{1,2}(r) = -\frac{1}{r} - \arctan\theta_1 + \arctan\theta_2 - \arctan\theta_3 <$$
$$< -\arctan\frac{2k}{r} - \arctan\frac{2kr}{t^2+k^2-r^2} < 0.$$

Следовательно, $I_{1,2} \leqslant I_{1,1}$.

Оценим $I_{1,3}$. Из (3), (14),(15), (8), (9) и (12) следует, что

$$I_{1,3} \ll \frac{1}{\cosh(\pi t)} \int\limits_{t-k+1/2}^{t-1/2} \Gamma(k+1/2)e^{t-r}(t+r)^k P(r)\frac{dr}{r^{2k+1}} = \frac{\Gamma(k+1/2)}{\cosh(\pi t)} \int\limits_{t-k+1/2}^{t-1/2} e^{f_{1,3}(r)}dr,$$

где

$$P^2(r) = e^{(t-r)(\pi-2-g_1(\vartheta_1))+(t+r)g_2(\theta_2)-rg_2(\theta_3)},$$
$$f_{1,3}(r) = t - r + k\log(t+r) - (2k+1)\log r + \log P(r).$$

Применяя (10), находим

$$f'_{1,3}(r) = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{r} + \arctan\vartheta_1 + \arctan\theta_2 - \arctan\theta_3 <$$
$$< -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \arctan\frac{k}{2t-k+1/2} < 0.$$

Следовательно, $I_{1,3} \leqslant I_{1,2}$.

Оценим $I_{1,4}$. Из (3), (14), (15), (8), (9) и (12) следует, что

$$I_{1,4} \ll \frac{\Gamma(k+1/2)}{\cosh(\pi t)} \int\limits_{t-1/2}^{t+1/2} (t+r)^k P(r)\frac{dr}{r^{2k+1}} = \frac{\Gamma(k+1/2)}{\cosh(\pi t)} \int\limits_{t-1/2}^{t+1/2} e^{f_{1,4}(r)}dr,$$

где

$$P^2(r) = e^{(t+r)g_2(\theta_2)-rg_2(\theta_3)},$$
$$f_{1,4}(r) = k\log(t+r) - (2k+1)\log r + \log P(r).$$

Используя (10), получаем

$$f'_{1,4}(r) = -\frac{1}{r} + \arctan\theta_2 - \arctan\theta_3 < 0.$$

Следовательно, $I_{1,4} \leqslant I_{1,3}$.

Оценим $I_{1,5}$. Из (3), (14), (15), (8), (9) и (12) следует, что

$$I_{1,5} \ll \int\limits_{t+1/2}^{t+k-1/2} \frac{\Gamma(k+1/2)}{\cosh(\pi r)}(t+r)^k e^{r-t} P(r)\frac{dr}{r^{2k+1}} = \Gamma(k+1/2) \int\limits_{t+1/2}^{t+k-1/2} e^{f_{1,5}(r)}dr,$$

где

$$P^2(r) = e^{(r-t)(\pi-2-g_1(\vartheta_1))+(t+r)g_2(\theta_2)-rg_2(\theta_3)},$$
$$f_{1,5}(r) = -\pi r + r - t + k\log(t+r) - (2k+1)\log r + \log P(r).$$

Применяя (10), находим

$$f'_{1,5}(r) = -\frac{1}{r} - \frac{\pi}{2} - \arctan\vartheta_1 + \arctan\theta_2 - \arctan\theta_3 < -\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{k}{2t} < 0.$$

Следовательно, $I_{1,5} \leqslant I_{1,4}$.

Оценим $I_{1,6}$. Из (3), (14), (15),(8) и (12) следует, что

$$I_{1,6} \ll \int\limits_{t+k-1/2}^{\infty} \frac{(r+t)^k(r-t)^k}{\cosh(\pi r)} P(r)\frac{dr}{r^{2k+1}} = \int\limits_{t+k-1/2}^{\infty} e^{f_{1,6}(r)}dr,$$

где

$$P^2(r) = e^{(r-t)g_2(\theta_1)+(t+r)g_2(\theta_2)-rg_2(\theta_3)},$$
$$f_{1,6}(r) = -\pi r + k\log(r+t) + k\log(r-t) - (2k+1)\log r + \log P(r).$$

Используя (10), получаем

$$f'_{1,6}(r) = -\frac{1}{r} - \pi + \arctan\theta_1 + \arctan\theta_2 - \arctan\theta_3 < 0.$$

Следовательно, $I_{1,6} \leqslant I_{1,5}$.

Итак, мы доказали, что $I_{1/2} \ll I_0$ при $t > 3k-1$. Доказательство того, что $I_{1/2} \ll I_0$ в остальных случаях (16)–(22) аналогично приведенному. Подставляя оценку (13) в (6), получаем

$$G_k(t;-x) = \frac{|\Gamma(k+it)|^2}{\Gamma(2k)} + O\left(\sqrt{x}\frac{\left|\Gamma(k+\frac{1}{2}+it)\right|^2}{\left|\Gamma(2k+\frac{1}{2})\right|}\right). \tag{23}$$

Обозначим $d = [\,|t|\,]$. Применяя соотношения

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \text{и} \quad |\Gamma(iy)|^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{y\sinh(\pi y)},$$

получаем $|\Gamma(k+it)|^2 = P_5P_6R_5R_6|\Gamma(it)|^2$, где

$$P_5 = \prod_{n=0}^{d} t^2 = t^{2d+2}, \qquad P_6 = \prod_{n=d+1}^{k-1} n^2 = \frac{\Gamma^2(k)}{\Gamma^2(d+1)},$$
$$R_5 = \prod_{n=0}^{d}\left(1+\frac{n^2}{t^2}\right), \qquad R_6 = \prod_{n=d+1}^{k-1}\left(1+\frac{t^2}{n^2}\right).$$

Для произведения R_5R_6 справедлива оценка из леммы 1 с $y = |t|$ и $\kappa = k - 1$. Заметим, что при $0 < d < k - 1$

$$P_5P_6 = t^{2d+2}\frac{\Gamma^2(k)}{\Gamma^2(d+1)} \asymp \Gamma^2(k)de^{2d}.$$

Таким образом, мы получаем

$$|\Gamma(k+it)|^2 \asymp e^{-\pi|t|}\begin{cases} \Gamma^2(k)e^{2t}e^{t(\pi-2-g_1(t/(k-1)))}, & t \leqslant k-1; \\ t^{2k-1}e^{tg_2((k-1)/t))}, & k-1 < t. \end{cases} \tag{24}$$

Тогда формула (4) следует из (24), (23) и (13) и оценки

$$\Gamma(n+1/2) \asymp \Gamma(n)\sqrt{n}.$$

Теорема 2 доказана.

Список литературы

[1] Balkanova O. G., Frolenkov D. A., "A uniform asymptotic formula for the second moment of primitive L-functions of prime power level,", preprint.

[2] Быковский В. А., Фроленков Д. А., "О втором моменте L-рядов голоморфных параболических форм на критической прямой", *ДАН. Математика*, **463**:2 (2015), 133–136.

[3] Motohashi Y., "The binary additive divisor problem", *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **27** (1994), 529–572.

[4] Ivic A., Motohashi Y., "The moments of the Riemann zeta-function Part I: The fourth moment off the critical line", *Functiones et Approximatio*, **35** (2006), 133–181.

[5] Olver F. W. J., Lozier D. W., Boisvert R. F., Clark C. W., *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Nat. Inst. of Stand. and Tech. and Cam. Univ.Press, Cambridge, 2010.

Представлено в Дальневосточный математический журнал 28 сентября 2015 г.

Работа выполнена при поддержке фонда «Династия»и фонда РФФИ (проекты № 14-01-90002 Бел_а, № 14-01-00203).

Frolenkov D. A. On the uniform bounds on hypergeometric function. Far Eastern Mathematical Journal. 2015. V. 15. № 2. P. 288–298.

ABSTRACT

A uniform asymptotic formula for hypergeometric function is obtained.

Key words: *hypergeometric function, Mellin-Barnes integral.*